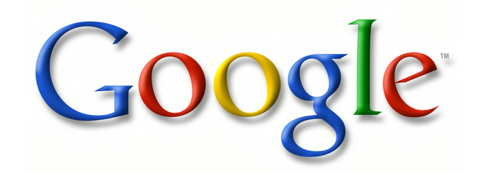


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



Rupicio
vol. I (all bull.)
$2.50

ENG
QA845
G7215
1904
TIMO-
SHENKO
COLL

ENGINEERING LIBRARY

Pupico
vol. I (all bull.)
$2.50



ENG
QA845
G7215
1904
TIMO-
SHENKO
COLL

ENGINEERING LIBRARY

LEHRBUCH DER PHYSIK

LEHRBUCH DER PHYSIK

VON

ANDREW GRAY

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT GLASGOW

AUTORISIERTE DEUTSCHE AUSGABE

VON

DR. FELIX AUERBACH

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT JENA

Prof. Dr. F. Braun

ERSTER BAND

ALLGEMEINE UND SPEZIELLE MECHANIK

MIT 400 EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SONH

1904



VORREDE DES HERAUSGEBERS.

In der Geschichte der wissenschaftlichen Literatur eines Landes kann man drei Perioden unterscheiden. In der ersten dieser Perioden ist das Land, mangels einer eigenen Literatur für das betreffende Wissensgebiet, auf Übersetzungen und Bearbeitungen von Werken vorgeschrittener Nationen angewiesen; in der zweiten hat es sich eine eigene Literatur geschaffen, und es wird sich hüten, dieser ihr Erstarken durch die Konkurrenz mit ausländischen Werken zu erschweren; in der dritten endlich ist diese Gefahr geschwunden, und das Land ist in der Lage, sich die eigene wie die fremde Literatur nutzbar zu machen.

Das sind etwa die Erwägungen, die den Herausgeber bestimmten, dem Antrage der Verlagshandlung betreffend die Veranstaltung einer deutschen Ausgabe von Andrew Grays „Treatise on Physics" Folge zu leisten; denn daß wir uns in Deutschland hinsichtlich der Physik längst in der dritten Periode befinden, kann keinem Zweifel unterliegen. Dazu kommt, daß der Verfasser der würdig befunden wurde, der Nachfolger eines Lord Kelvin auf dessen akademischem Lehrstuhle zu werden, schon in früheren und so auch wieder in diesem Buche seine besondere Begabung für klare und interessante Darstellung ganzer Disziplinen dargetan hat. Daß diese Darstellung, die Auswahl des Stoffes, das Verhältnis zwischen Erfahrung und Theorie und manches andere von dem bei uns Üblichen vielfach abweicht, daß das Buch sozusagen spezifisch englisch ist, wird man nach den obigen Erwägungen gerade auch für den deutschen Leser als einen Vorzug ansehen dürfen; denn es kann ihm nur von großem Nutzen sein zu sehen, wie seine Wissenschaft in einem Lande behandelt wird, dem sie einen so großen Teil ihrer wunderbaren Fortschritte

verdankt. Demgemäß sind auch die für die deutsche Ausgabe notwendigen Änderungen und Ergänzungen auf ein sehr geringes Maß beschränkt worden; im übrigen wurden einige deutsche Autorennamen eingefügt und die Umrechnungen der Zahlenbeispiele auf das metrische System vorgenommen, auch sind einige Figuren neu hinzugekommen.

Die Übersetzung rührt im wesentlichen von meiner Frau her; nur einige besonders schwierige Stellen habe ich selbst bearbeitet, außerdem natürlich das Ganze durchgesehen. Die Arbeit war nicht eben leicht, da die englische Sprache sich der modernen physikalischen Begriffs- und Ideenbildung leicht, die deutsche hingegen oft nur schwer anpassen läßt — eine Schwierigkeit, die schon Helmholtz gegenüber dem Werke von Thomson und Tait empfunden hat, und die sich seitdem in mancher Hinsicht noch gesteigert hat. Dazu kommt, daß das Original leider ungewöhnlich zahlreiche Druckfehler aufweist. Die in ihm konsequent benutzte Newtonsche Schreibweise und die schrägen Bruchstriche sind in der deutschen Ausgabe auf den Text beschränkt, in den Formeln dagegen durchaus vermieden worden. Das Register ist ganz selbständig hergestellt.

In ganz außerordentlich dankenswerter Weise hat sich der Herr Verfasser der Mühe unterzogen, nicht nur sämtliche Korrekturbogen und zum Teil auch die Revisionen zu lesen, sondern auch Verbesserungen und Zusätze für die deutsche Ausgabe zur Verfügung zu stellen.

Möge somit das Buch, das auch von der Verlagshandlung vortrefflich ausgestattet wurde, auch bei uns sich recht viele Freunde erwerben!

Jena, Dezember 1903.

Felix Auerbach.

VORREDE DES VERFASSERS.

Das vorliegende Werk bezweckt, ein Lehrbuch zur Verfügung zu stellen, geeignet für diejenigen, welche, mit den Elementen des Gegenstandes beginnend, in einem einzigen Buche einen Abriß der theoretischen und der experimentellen Physik zu besitzen wünschen, der für die meisten praktischen Zwecke wissenschaftlicher und technischer Ausbildung hinreicht.

Die ungebührliche Wichtigkeit, die man in unserem Erziehungssystem den Prüfungen beilegt, und die Überschätzung bloßer Prüfungszeugnisse hat zur Teilung einer Wissenschaft wie die Physik in einzelne, abgesonderte Gebiete geführt; dem gegenüber halte ich es für wünschenswert, denjenigen, welche ein ernsthaftes Studium vorhaben, von vornherein alles, was sie brauchen, um die Wissenschaft anwenden zu können, in einheitlicher Darstellung vorzulegen. Ich nehme also an, daß kein zukünftiger Ingenieur oder Elektrotechniker sich mit einer durchweg elementaren Darstellung zufrieden geben wird, und deshalb habe ich mich nicht gescheut, da, wo es der Gegenstand erfordert, Differential- und Integralrechnung anzuwenden. Was auch über diese Frage in neuerer Zeit geschrieben worden sein mag, soviel steht fest, daß kein wirklicher Fortschritt in der exakten Naturwissenschaft oder in der Technik ohne Mathematik gemacht werden kann, und daß selbst zum Verständnis der Grundbegriffe der Dynamik und der Prinzipien der Physik überhaupt dieselben Denkprozesse Anwendung finden, die in der Mathematik ausgebildet werden. Übrigens sind vielfach Erklärungen der benutzten mathematischen Begriffe und Methoden vorangeschickt, die das Nachschlagen mathematischer Werke entbehrlich machen.

Der Leser wird bemerken, daß einige Kapitel, welche sonst unter „Eigenschaften der Materie“ behandelt zu werden pflegen, hier fehlen. So die Diffusion und Osmose sowie die Reibung. Diese Dinge werden jedoch besser im Zusammenhange mit der Gastheorie im zweiten Bande behandelt. Ferner fehlt ein Gegenstand, von dem hin und wieder Anwendungen hätten gemacht werden können — das Prinzip der Dimensionen oder der dynamischen Ähnlichkeit; es wird mit seinen Anwendungen auf Probleme, die sonst kaum lösbar sind, in späteren Teilen erklärt und näher ausgeführt werden.

In Bezug auf viele Teile des Buches fühle ich mich anderen Autoren verpflichtet, und ich habe dies auch — freilich, wie ich fürchte, nicht überall — gebührend hervorgehoben. An dieser Stelle möchte ich noch besonders erwähnen: Prof. Loves „Treatise on Elasticity“; Lord Rayleighs „Papers“, die jetzt erfreulicherweise in gesammelter Form vorliegen; Prof. Greenhills „Treatise on Hydrostatics“ und Thomson und Taits „Natural Philosophy“. Einige meiner ehemaligen Studenten in Wales haben mich durch Lesen von Korrekturen unterstützt, namentlich bin ich in dieser Hinsicht meinem hiesigen Kollegen, Herrn Dr. Walter Stewart, zu Dank verpflichtet.

Es wäre zu weitgehend, zu hoffen, daß alle Fehler und Unklarheiten bemerkt und ausgemerzt seien; kein Werk dieser Art kann anders als durch Mithilfe vieler Leser von derartigen Mängeln befreit werden. Ich werde für alle Vorschläge zu Verbesserungen des Buches von seiten derer, die ihm die Ehre erweisen, es zu lesen, außerordentlich dankbar sein.

Universität Glasgow, 30. Januar 1901.

Andrew Gray.

INHALTSVERZEICHNIS.

(Die Zahlen links bedeuten die Paragraphen, die Zahlen rechts die Seiten.)

Drittes Kapitel.

Dynamik.

Viertes Kapitel.

Arbeit und Energie.

Fünftes Kapitel.

Allgemeine dynamische Theorien.

Sechstes Kapitel.

Statik materieller Systeme.

Siebentes Kapitel.

Graphische Statik.

Achtes Kapitel.

Gleichgewicht und Bewegung einer Kette oder einer biegsamen Schnur.

Neuntes Kapitel.

Hydrostatik und Hydrodynamik.

Zehntes Kapitel.

Spezielle Statik der Flüssigkeiten und Gase.

Elftes Kapitel.

Allgemeine Gravitation. Potentialtheorie.

Fünfzehntes Kapitel.

Elastizität.

Sechzehntes Kapitel.

Kapillarität.

Siebzehntes Kapitel.

Messungen und Instrumente.

Einleitung.

Die Absicht des vorliegenden Werkes ist, die Physik soweit als möglich von dem Standpunkte aus zu behandeln, von dem die moderne Naturwissenschaft die Naturerscheinungen anschaut. Es handelt sich dabei in erster Linie um die Beziehungen zwischen Stoff und Energie; um das Bestreben, die Gesetze zu erforschen, welche die Übertragung, Verwandlung und Verteilung der Energie regeln; ferner aber darum, soweit als möglich das Prinzip zu verfolgen, nach dem die physikalischen Erscheinungen sich tatsächlich abwickeln, und das, wenn es als richtig erkannt sein wird, ihre vollkommenste Erklärung bilden wird. Es ist nämlich eine irrige Annahme, der man häufig begegnet, daß zwei Prinzipien für die Ableitung der physikalischen Tatsachen genügen: das Prinzip von der Erhaltung des Stoffs und das Prinzip von der Erhaltung der Energie. Diese, so wichtig sie auch sind, genügen doch nicht als Wegweiser für die Wirksamkeit der Energie in der Materie ohne die Hilfe gewisser dynamischer Prinzipien, die in dieser Hinsicht die Beziehungen zwischen verschiedenen materiellen Systemen oder verschiedenen Teilen desselben Systems regeln.

Ohne die Hilfe der dynamischen Theoreme, die in der Lehre von der Erhaltung der Energie längst nicht alle enthalten sind, sind wir unfähig, irgend welchen befriedigenden Fortschritt im Studium der physikalischen Theorien zu machen. Die Erscheinungen bloß zu betrachten, sie zu verzeichnen, ihre Übereinstimmung und ihre Verschiedenheiten zu konstatieren, ist freilich ein höchst wichtiger Teil naturwissenschaftlicher Forschung; aber diese systematisierende Tätigkeit bedeutet längst nicht mehr die höchste Stufe der Wissenschaft; wir haben die Stufe philosophischer Tätigkeit erstiegen, diejenige, auf welcher unaufhörlich der Versuch gemacht wird, die Erscheinungen einheitlich in den Ring der physikalischen Theorie zu fassen; das Schema der theoretischen Physik zu prüfen, zu verbessern und zu stählen durch Anwendung ihrer Theorien zur Vorhersage bisher unbekannter Tatsachen, die daraufhin der Prüfung durch Beobachtung oder Experiment unterworfen werden können.

Es wird demnach notwendig sein, zunächst die Prinzipien der Dynamik darzulegen, was in einer elementaren Weise geschehen soll, indem wir immer physikalische Anwendungen im Auge behalten. Allzusehr hat man sich gewöhnt, namentlich seitdem in mehreren Staaten die Trennung der sogenannten angewandten Mathematik von der Physik bei den Doktor- und Lehrerprüfungen durchgeführt worden ist, die Prinzipien der Dynamik als bloße Pflöcke zu betrachten, wohl geeignet, Sammlungen mathematischer Übungen daran aufzuhängen, aber tatsächlich jedes physikalischen Interesses bar und ohne Beispiele in der täglichen Erfahrung und Beobachtung des Studierenden.

Kein Zweifel, daß die Dynamik eine Disziplin ist, die nicht ohne Zuhilfenahme der Mathematik studiert werden kann; aber ebenso sicher ist sie anderseits eine Wissenschaft, die durch alltägliche Bilder und Geschehnisse veranschaulicht werden kann. Die Bewegung eines in die Luft gestoßenen Fußballes, der Flug eines Tennisballes, der Fall eines Steines, die davon sehr verschiedene Art des Falles eines Regentropfens, das Aufsteigen des Rauches, die Stabilität eines Zweirades und die Art und Weise, in der ein geschickter Fahrer seine Bewegungen lenkt, das Treiben eines Kreisels und tausend andere wohl vertraute Dinge, die dem Blicke jedes Beobachters begegnen, dessen Augen offen sind für das, was um ihn herum vorgeht, sie sind alle einer mehr oder weniger elementaren Erklärung fähig und sollten für eine befriedigende Behandlung der dynamischen Prinzipien im Auge behalten werden.

In dem von der Dynamik handelnden Teile können wir — ebenso wie in dem übrigen Buche — uns des Ausdruckes „Ursache und Wirkung“ bedienen. Es muß aber ausdrücklich bemerkt werden, daß dies nur zum Zwecke der Bequemlichkeit des Ausdrucks geschieht. Man kann die Einwirkung eines Körpers als die Ursache für die Beschleunigung eines anderen bezeichnen, eine elektromotorische Kraft in einem voltaschen Kreise als die Ursache eines Stromes in diesem Kreise; aber es soll damit nicht gesagt sein, daß das, was Ursache genannt wird, ein besonderes, von der Wirkung getrenntes Dasein führt, oder daß die erstere zeitlich der letzteren vorangeht. Für uns handelt es sich um zwei nebeneinander bestehende Aspekte einer und derselben Erscheinung, deren Beziehungen zu ermitteln und quantitativ auszudrücken eben unsere Aufgabe ist.

Wir werden in die Dynamik eine Darstellung der Schwingungsbewegung oder — wie sie häufig genannt wird — einfachen harmonischen Bewegung aufnehmen; ferner die Darstellung der Bewegung eines Systems von Teilen und eines materiellen Systems, bei dem die relative Konfiguration der Teile sich nicht ändert (was, nicht ganz zutreffend, ein starres System genannt wird); denn diese Theorien sind unumgänglich für die Lösung vieler physikalischer Probleme, die sich in der Folge einstellen werden. Aber so weit als möglich wird zum leichteren Verständnis des Studierenden jeder Teil des Gegenstandes

vom Standpunkte eines wirklichen, von dem Studierenden leicht zu verstehenden Falles von Bewegung behandelt werden, und keine Mühe wird gespart werden, die Darstellung klar und exakt zu machen ohne unnötige Zuhilfenahme der mathematischen Analyse. Das Verfahren wird manchem über Gebühr weitschweifig erscheinen; aber es ist zu bedenken, daß es kaum einen Gegenstand geben wird, der einerseits mehr Schwierigkeiten und Quellen des Mißverständnisses darbietet, anderseits aber, wenn seine Prinzipien von dem Studierenden richtig erfaßt und angewandt werden, besser zur Klarheit des Denkens und zur Ausbildung logischer Denkgewohnheit führt. Darum wird schwerlich eine Disziplin in höherem Maße eine Darstellung verlangen, die geeignet ist, den Lernenden in dem Kampfe mit den weiteren Schwierigkeiten der Experimentalphysik vor Irrtümern, die aus Mißverständnissen oder vorgefaßten Meinungen entstehen, zu bewahren. Freilich können ein paar Seiten formaler Feststellungen und Prinzipien, gefolgt von ein paar weiteren Seiten druckfehlerfreier Algebra allenfalls das Wesentliche der elementaren Dynamik enthalten; aber eine solche Arbeit hat absolut keinen erziehlichen Wert und kann höchstens als Notizensammlung dienen zum Gebrauche eines Lehrers, der in eigener Arbeit die Schwierigkeiten des Gegenstandes bereits sorgfältig durchdacht und gelöst hat.

Erstes Kapitel.

Längenmessung und Zeitmessung.

1. Physikalische Einheiten. Alle physikalischen Größen werden in Einheiten gemessen, die entweder willkürlich oder auf eine bestimmte Weise gewählt sind und deren jede eine Größe derselben Art ist wie diejenige, welcher sie als Maß dient. So ist der Zahlenwert der Länge einer geraden Linie die Anzahl von Malen, die sie die gewählte Längeneinheit enthält, d. h. wenn die Einheit z. B. in Gestalt einer Meßrute verwirklicht ist, so erhält man den Zahlenwert der Länge, indem man die Rute der Reihe nach Ende an Ende anlegt, bis die Länge erschöpft ist und die Anzahl der Male, in denen dies geschehen ist, zählt. Die Zahl kann natürlich eine ganze Zahl sein oder ein echter oder unechter Bruch. Wenn die Länge die Einheit n mal enthält (wobei n eine ganze Zahl ist), sie aber nicht $(n + 1)$ mal enthält, so muß der Bruch, der nach der Abnahme der n Einheiten übrig bleibt, durch Anwendung einer kleineren Einheit, die in der größeren auf dieselbe Weise gerade eine ganze Anzahl von Malen enthalten ist, festgestellt werden. So kann z. B. eine Entfernung 37 Fuß 6 Zoll betragen, d. h. es ist 1 Fuß 37 mal in ihr enthalten und außerdem ein Abstand, der 6 mal eine Einheit enthält, die durch die Tatsache, daß sie genau 12 mal in einem Fuß enthalten ist, definiert wird. Wäre der Zoll nicht gerade eine ganze Anzahl von Malen in dem betreffenden Abstande enthalten, d. h. wäre der Abstand kleiner als 1 Zoll oder enthielte er den Zoll weniger als $(n + 1)$ mal und mehr als n mal, so müßte noch eine weitere Einheit, die eine Unterabteilung des Zolles ist, benutzt werden, um den Bruch zu bestimmen.

2. Grundeinheiten. Die fundamentalen Größen in der Dynamik sind Länge, Zeit und Masse, und auf die Einheiten dieser drei sind die Einheiten anderer Größen begründet, wie Moment, Kraft, Energie, die man deshalb „abgeleitete Einheiten" nennt. Wir werden hier das Längen- oder Entfernungsmaß und das Zeitmaß betrachten, die Masse aber späterer Behandlung vorbehalten.

3. Längeneinheit. a) Das Yard. Betrachten wir also zunächst die Längeneinheit näher. In Großbritannien galt früher ausschließlich und gilt jetzt noch vorwiegend als Einheit des Längenmaßes das Yard; sein Original wird in London, Greenwich und Westminster aufbewahrt. Von ihm leitet man den englischen Fuß, $^1/_3$ Yard, den englischen Zoll, $^1/_{36}$ Yard ab, und nach oben die englische Meile, 1760 Yards. Die untere Skala der Fig. 1 zeigt 5 Zoll (inches) und jeden Zoll in Zehntel eingeteilt.

In anderen Ländern hatte der Fuß eine andere Länge; der Pariser Fuß z. B. war um $6^1/_2$, der rheinische um 3 Proz. größer als der englische; auch wurden sie in je 12 Zoll und jeder Zoll in 12 „Linien" geteilt. Diese Maße sind indessen durch das nunmehr zu betrachtende verdrängt worden.

Fig. 1.

4. Längeneinheit. b) Das Meter. In Frankreich wurde nach der großen Revolution ein wissenschaftliches Komitee ernannt, um ein gänzlich neues System von Maß und Gewicht auszuarbeiten. Es wurde durch Dekret der Regierung, gegeben 1795 (Gesetz vom 18. Germinal, Jahr 3) bestimmt, daß die neue Längeneinheit auf die Erddimensionen gegründet sein sollte, und sie wurde definiert als der 10000000. Teil der Entfernung vom Äquator zum Nordpol auf dem durch Paris hindurchgehenden Meridian.

Diese Einheit wurde in der Hauptsache durch Delambre und Méchain unter Beihilfe von Borda festgestellt durch Ausmessung der Länge dieses Quadranten des Erdumfangs in Vielfachen eines bestimmten Maßstabes; mit diesem Maßstabe wurde nämlich eine Basis festgelegt, und von dieser aus wurde durch trigonometrische Beobachtung die Länge eines bestimmten Meridianbogens, zwischen einem Punkte von Dünkirchen und einem anderen Punkte in Barcelona, gefunden. Da das Verhältnis dieses Bogens zum ganzen Quadranten bekannt war, so konnte man die Länge des letzteren, in Vielfachen der Länge des Maßstabes ausgedrückt, in Erfahrung bringen und also auch das Verhältnis der Länge des Maßstabes zu der des 10000000. Teiles des Quadranten. So wurde es möglich, einen Maßstab herzustellen, der bei einer bestimmten Temperatur dieselbe Länge haben müßte wie die gewünschte Einheit.

Dies wurde von Borda geleistet durch Herstellung eines Platinstabes, der bei der Temperatur von 0° der Celsiusskala die gewünschte Länge haben sollte. Aus verschiedenen Ursachen ist die äußerste Genauigkeit nicht erreicht worden; aber Bordas Stab ist trotzdem der authentische Maßstab geblieben. Dieser französische Mustermaßstab wird das Meter genannt und dieses als die Entfernung zwischen den beiden Enden des Bordaschen Stabes bei der Temperatur von 0° C. definiert, ohne alle Rücksicht auf die Erddimensionen, obgleich die oben ausgeführte Beziehung nahezu erfüllt ist (nach dem jetzigen Stande unserer Kenntnisse ist der gedachte Erdquadrant nicht 10000000, sondern 10000856 m lang).

5. Das metrische Maßsystem. Das auf dieser Längeneinheit begründete Maßsystem heißt das „metrische System". Es ist auf dem Kontinent allenthalben in Gebrauch und auch in England, das im übrigen noch immer unbegreiflicherweise sein veraltetes, in jeder Hinsicht dem metrischen unendlich viel nachstehendes Maßsystem duldet, wenigstens gesetzlich anerkannt.

Im metrischen System ist die Dezimalrechnung vollständig durchgeführt. Das Meter (m) wird in 10 gleiche Teile geteilt, deren jedes ein Dezimeter (dm) heißt; das Dezimeter in 10 gleiche Teile, deren jedes also ein hundertel Meter beträgt und ein Centimeter (cm) genannt wird; das Centimeter wird in 10 gleiche, Millimeter (mm) genannte Teile geteilt; weitere Unterteilungen sind zehntel Millimeter u. s. w. Eine Länge von 10 m wird ein Dekameter, von 100 m ein Hektometer und von 1000 m ein Kilometer genannt. Das Kilometer ist als Einheit für die Messung von Entfernungen zwischen verschiedenen Orten allgemein eingeführt (in Frankreich bildet man häufig auch noch die 10fache Einheit und nennt sie „Myriameter").

Die obere Skala der Fig. 1 zeigt die Länge von etwa $1^1/_4$ Dezimeter in Centimeter und Millimeter eingeteilt.

6. Das Centimeter als Längeneinheit. Für die meisten wissenschaftlichen Zwecke ist das Centimeter als Grundeinheit der Länge eingeführt und wird im folgenden weit häufiger als irgend eine andere Einheit benutzt werden, um Ergebnisse auszudrücken. Wir geben darum hier eine Tabelle mit den verschiedenen britischen Längeneinheiten in cm ausgedrückt. Ihre Werte in Dezimetern erhält man, indem man den Dezimalpunkt um eine Stelle nach links rückt, in Metern, indem man ihn um zwei Stellen nach links rückt u. s. w.:

1 engl. Zoll	=	2,5400	cm,
1 „ Fuß	=	30,4797	„
1 „ Yard	=	91,4392	„
1 „ Meile	=	160933	„
1 „ Seemeile . . .	=	185230	„

1 mm . . .	= 0,039 37	engl. Zoll	= 0,003 2809	Fuß,
1 cm . . .	= 0,3937	„ „	= 0,032 809	„
1 m . . .	= 39,371	„ „	= 3,2809	„

Da auch ältere Angaben in kontinentalen Maßen noch häufig benutzt werden, fügen wir noch folgende Zahlen hinzu:

1 Pariser Linie	= 0,2256	cm,
1 „ Zoll	= 2,712	„
1 „ Fuß	= 32,484	„
1 rheinischer Fuß . . .	= 31,385	„
1 Toise	= 194,9	„
1 Seemeile	= 1,852	km,
1 geographische Meile . .	= 7,420 44	„
1 preußische Meile . . .	= 7,532 49	„

7. Flächeneinheit und Volumeneinheit. Auf die Längeneinheit sind zwei abgeleitete Einheiten begründet, die Flächeneinheit und die Volumeneinheit. Die Einheit der Fläche ist die Fläche eines Quadrats, dessen Seite die Längeneinheit beträgt, die Volumeneinheit das Volumen eines Würfels, dessen Kante die Längeneinheit beträgt. Im metrischen System haben wir Quadratmeter (qm), Quadratdezimeter (qdm), Quadratcentimeter (qcm) u. s. w.; anderseits Ar (a = 100 qm), Hektar (ha = 100 a) und Quadratkilometer (= 100 ha).

In Großbritannien werden kleine Flächen in Quadratyards, Quadratfuß oder Quadratzoll gemessen, während größere Flächen in Acres (einer Einheit von 4840 Quadratyards) oder englischen Quadratmeilen gemessen werden.

Ebenso haben wir im Volumenmaße Kubikmeter (cbm), Kubikdezimeter oder Liter (l), Kubikcentimeter (ccm) bezw. Kubikyards, Kubikfuß, Kubikzoll u. s. w. 1 cbm enthält 1000 Liter oder 1 000 000 ccm oder 1 000 000 000 cbmm.

Die folgende Tabelle enthält die wichtigsten Einheiten von Fläche und Volumen und ihre Beziehungen:

1 engl. Quadratzoll . .	= 6,451	qcm,
1 „ Quadratfuß . .	= 928,997	„
1 „ Quadratyard .	= 0,8361	„
1 qcm	= 0,155	Quadratzoll,
1 „	= 10,764	Quadratfuß,
1 „	= 1,196	Quadratyard,
1 Kubikzoll	= 16,386	ccm,
1 Kubikfuß	= 28,315	Liter,
1 Kubikyard	= 0,7645	Kubikmeter,
1 ccm	= 0,061 03	Kubikzoll,
1 Liter	= 61,027	„
1 „	= 0,035 32	Kubikfuß.

Ferner von früheren Kontinentalmaßen:

1 rheinischer Quadratzoll . .	=	6,8405	qcm,
1 „ Quadratfuß . .	=	985,04	„
1 preußischer Morgen . . .	=	25,53	a,
1 Quadratmeile	=	55,063	qm,
1 rheinischer Kubikzoll . .	=	17,891	ccm,
1 „ Kubikfuß . .	=	30,916	ccm.

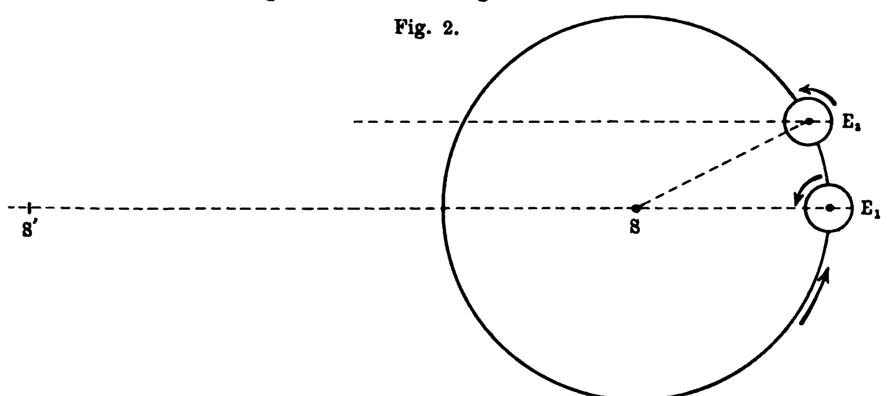
8. Zeitmessung. Die Zeit wird für bürgerliche und wissenschaftliche Zwecke durch die Umdrehung der Erde gemessen; als gleiche Zeitabschnitte werden solche definiert, in denen die Erde gleiche Winkel um ihre Axe zurücklegt. Die dynamische Definition gleicher Zeitabschnitte muß auf spätere Zeit verschoben werden; immerhin möge schon hier festgestellt werden, daß Grund vorliegt zu der Annahme, die bürgerliche Zeitrechnung erfordere eine kleine Korrektion; daß wir tatsächlich, wenn wir die dynamische Definition der Rechnung zu Grunde legen, fast gezwungen sind zu schließen, daß die rotierende Bewegung der Erde sich ganz allmählich verlangsamt (s. § 14). Diese Frage wird später behandelt werden; vorläufig benutzen wir die rotierende Erde als Zeitmesser.

9. Sterntag. Die Periode der Erdrotation wird ein Sterntag genannt, und zwar weil sie der Zeitraum ist zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen eines Fixsternes durch die Meridianebene eines Ortes; eine kleine Differenz, die hauptsächlich vom Vorrücken der Äquinoctien herrührt, kann außer Betracht bleiben, da sie unterhalb $^1/_{100}$ sec. bleibt. Die Meridianebene irgend eines Punktes auf der Erdoberfläche ist eine durch diesen Punkt und die Erdaxe gelegte Ebene. Sie dreht sich also mit der Erde, und man sagt, daß die Sonne oder ein Stern im Meridian steht in dem Augenblicke, wo die Meridianebene durch den Mittelpunkt der Sonne oder den Stern hindurchgeht. Für einen Beobachter an einem Teleskop, dessen Axe in der Meridianebene liegt, scheint sich der Himmelskörper durch das Gesichtsfeld durch zu bewegen, in welchem der Meridian durch eine Linie angegeben ist, und darum kreuzt der Himmelskörper sozusagen den Meridian. Natürlich kreuzt im Laufe einer Erdumdrehung ein Stern den Meridian eines Ortes zweimal, aber beide Male in entgegengesetzter Richtung. Also, in gegebener Richtung gibt es für jede vollständige Drehung der Erde um ihre Axe nur einen Durchgang eines Fixsterns, und der Zeitraum zwischen zwei solchen Durchgängen gibt das Maß eines Sterntages.

10. Sternzeit und Sonnenzeit. Aus Fig. 2 ersieht man, daß der Zeitraum zwischen zwei solchen aufeinander folgenden von der Sonne ausgeführten Meridiandurchgängen infolge der Bahnbewegung der Erde um die Sonne länger ist, als der zwischen zwei aufeinander folgenden Meridiandurchgängen eines Fixsterns. Die Erdbahn — in Wahrheit eine Ellipse von geringer Exzentrizität — möge der Einfachheit halber als Kreis betrachtet werden. Dieser Kreis hat einen

Radius von rund 150000000 km und wird beschrieben in 365 Tagen, 6 Stunden, 9 Minuten, 9 Sekunden, der Länge des sogenannten Sternjahres, d. h. des Zeitraumes zwischen zwei aufeinander folgenden Erscheinungen der Sonne in der gleichen relativen Stellung unter den Sternen. Also bewegt sich die Erde mit einer Bahngeschwindigkeit von ungefähr 29,8 km in der Sekunde und legt, während sie sich ein einziges Mal um ihre Axe dreht, eine Entfernung von 2580000 km zurück. Fig. 2 zeigt zwei Stellungen der Erde E_1 und E_2 am Anfang und am Ende einer Umdrehung; der Kreis mit der Sonne S als Mittelpunkt stellt die Erdbahn vor, und die Pfeile zeigen die Richtung der Bahn- und der Axenbewegung an, wie sie einem im Weltraume jenseits des Nordpols stationierten Beobachter erscheinen würden. Die Dimensionen der Figur sind natürlich ganz außer Verhältnis, der Erd-

Fig. 2.



durchmesser beträgt nur etwa 12900 km, die Entfernung SE der Erde von der Sonne das 11600fache. Auch ist die Figur so gezeichnet, als ob die Neigung der Erdaxe zur Bahnebene, in Wahrheit $66^0\,32'\,48''$, eine solche von 90^0 wäre.

Die beiden Stellungen $E_1 E_2$ liegen 2580000 km auseinander. Wenn die Erde sich in der ersten Stellung befindet, möge die Sonne und ein Fixstern S' gerade im Meridian stehen. Wenn die Erde gerade eine Umdrehung ausgeführt hat, liegt der Meridian parallel zu seiner ersten Lage, er geht nicht mehr durch den Mittelpunkt der Sonne, noch auch, genau genommen, durch den des Sterns. Von der Stellung E_2 muß der Meridian sich um einen weiteren Winkel gleich $E_1 S E_2$ drehen, um S zu treffen, und um einen kleineren Winkel $E_1 S' E_2$, um S' zu treffen.

Da indessen selbst der nächste Fixstern so weit entfernt ist, daß dieser letztere Unterschied zu klein ist, um beobachtet zu werden, geht der Meridian — soweit die Genauigkeit der Beobachtung zu bemerken zuläßt — in der Stellung E_2 wieder durch den Stern S'. Natürlich ist die Entfernung $S' E_1$ in der Zeichnung in viel zu kleinem Maßstabe gegeben. Die Entfernung vom nächsten Fixstern, dem α-Centauri, ist

nämlich nach den besten Beobachtungen seiner jährlichen Parallaxe ungefähr 274000 mal so groß wie die der Sonne. Also müßte in Fig. 2 die Entfernung $S'E_1$ 274000 mal SE_1 betragen, d. h. für $SE_1 = 1$ cm schon $S'E_1 = 2{,}74$ km! Die Entfernung des nächsten Fixsterns beträgt also 40 Billionen Kilometer, und der durch die Bewegung von E_1 nach E_2 nach dem Stern zurückgelegte Winkel kann nicht mehr als 0,0132 Winkelsekunden betragen. Die Erde würde diesen Winkel in ungefähr $^1/_{11000}$ Zeitsekunden zurücklegen; also ist es kein Wunder, daß die Abweichung der Länge des Sterntages von der Periode der Erdrotation nicht beobachtet wird.

11. Sonnentag. Mittlerer Sonnentag. Ganz anders verhält sich dies hinsichtlich der Sonne. Der Unterschied zwischen zwei in gleicher Richtung aufeinander folgenden Durchgängen des Zentrums der Sonne durch den Meridian heißt ein Sonnentag. Da die Entfernung der Sonne nur 150000000 km beträgt, so ist der Winkel E_1SE_2 sehr merklich, und es muß dieser Winkel (und noch ein klein wenig mehr, da die Erde während ihrer Drehung fortwährend auf ihrer Bahn fortschreitet) zurückgelegt sein, um den Mittelpunkt der Sonne in den Meridian zu bringen. Die erforderliche Zeit ist etwas weniger als vier Minuten, und um soviel ist der Sonnentag länger als der Sterntag. Allerdings ist dieser Unterschied nicht ganz unveränderlich und zwar aus zwei Gründen: 1. Die Erde bewegt sich in einer Ellipse um die Sonne und zwar am schnellsten, wenn sie in der Mitte des Winters der Sonne am nächsten ist, und am langsamsten im Hochsommer, wenn sie am weitesten von ihr entfernt ist; 2. die Rotationsaxe der Erde, wenngleich sich selbst immer nahezu parallel, steht nicht senkrecht auf ihrer Bahnebene. Auf welche Weise diese Ursachen Veränderungen in der Länge des Sonnentages hervorrufen, wird in den Lehrbüchern über astronomische Dynamik eingehend erörtert.

Wie dem auch sei, der sogenannte mittlere Sonnentag wird für bürgerliche Zwecke benutzt, während die Sternzeit in Observatorien gebräuchlich ist wegen ihrer offenbaren Vorteile für die Beobachtung der Sterne. Der mittlere Sonnentag ist die angemessene Durchschnittslänge der tatsächlichen Sonnentage aus einem genügend großen Zeitabschnitte, und da die Örter der Sterne oder der Sonne für jeden beliebigen Augenblick dieser Zeit berechnet worden sind, kann die mittlere Sonnenzeit jedes Momentes durch Beobachtung der Himmelskörper gefunden werden. So kann eine exakt gehende Uhr an einer Sternwarte, nachdem ihr Fehler durch tägliche Beobachtung festgestellt ist, so reguliert werden, daß sie so genau wie möglich mittlere Sonnenzeit angibt.

12. Ortszeit, Zonenzeit, Weltzeit. Zeitsignale. Nachdem auf diese Weise das Maß der Zeit festgelegt ist, kommt es noch auf die Wahl und Festlegung absoluter Zeitmomente an, von denen aus der

Tag gerechnet wird. Dieser Zeitpunkt ist im bürgerlichen Leben die Mitternacht, in der Astronomie dagegen der darauf folgende Mittag, d. h. der astronomische Tag beginnt 12 Stunden später.

Hiervon abgesehen besteht nun infolge der Axendrehung der Erde eine große Schwierigkeit darin, daß für jeden Meridian auf der Erde jene Zeitpunkte nicht gleichzeitig, sondern zu verschiedenen Zeiten, und zwar für je 15 Grad ostwärts 1 Stunde, für jeden Grad also vier Minuten früher eintreten. Diese für jeden Ort spezifische Zeit heißt Ortszeit; es ist das die einzig natürliche Art der Zeitrechnung. Da sie indes im Zeitalter des Verkehrs gewisse Übelstände hat, und da man nicht gut allen Erdorten eine gemeinsame Weltzeit, als welche in der Astronomie die der Sternwarte von Greenwich gilt, auferlegen kann, hat man einen Mittelweg eingeschlagen, indem man die Erdoberfläche in Blätter von je 15° Breite teilte und jeder dieser Zonen eine einheitliche Zeit, die Zonenzeit, gab. Für die Zone, durch deren Mitte der Greenwicher Meridian geht — „die westeuropäische Zone“ —, stimmt die Zeit mit der Weltzeit überein, dagegen ist die in Mitteleuropa gültige „mitteleuropäische Zeit“ um genau eine Stunde voraus u. s. w.

Der Moment des mitteleuropäischen (resp. des Greenwicher) Mittags wird in deutschen und anderen Häfen durch von hohen Masten herabfallende „Zeitbälle“ oder durch Kanonenschüsse signalisiert, deren Auslösung auf elektrischem Wege von einer Sternwarte aus, event. durch Vermittelung der Telegraphie, erfolgt. In größeren Städten gibt es überdies vielfach Systeme elektrisch verbundener und regulierter Uhren.

13. Zahlenmäßige Beziehungen zwischen Sonnenzeit und Sternzeit. Der mittlere Sonnentag ist 1,00273791 Sterntage. Eine Sternzeitsekunde wird definiert als der Zeitraum, in dem die Erde $^1/_{86\,400}$ einer ganzen Umdrehung zurücklegt, d. h. den Winkel 360°/86400 oder 1/240 von 1°, eine Sternminute als der Zeitraum, in dem sich die Erde um $^1/_4{}^0$ und eine Sternstunde als der Zeitraum, in dem sie sich um 15° dreht.

Also dauert der mittlere Sonnentag 24 Stunden 3 Minuten 56,556 Sekunden Sternzeit.

Ebenso wird der mittlere Sonnentag in 86400 mittlere Sonnensekunden eingeteilt, so daß eine mittlere Sonnensekunde die Zeit ist, die die Erde braucht, um sich um ihre Axe um $^1/_{86\,400}$ des Winkels, den sie in einem mittleren Sonnentage zurücklegt, zu drehen, und so fort für die anderen Zeitabschnitte, die Minute und die Stunde. Ein Sterntag währt 23 Stunden 56 Minuten 4,090 Sekunden mittlerer Sonnenzeit.

14. Problem der Verlangsamung der Erdrotation. Aus dem bisher Gesagten ist zu entnehmen, daß die gleiche Länge von Zeitabschnitten nichts endgültiges oder absolutes, sondern Sache der Defi-

nition ist. Als gleiche Zeitabschnitte werden hier solche definiert, in denen die Erde gleiche Winkel um ihre Axe zurücklegt. Wie schon bemerkt, wird später eine dynamische Methode zur Bestimmung gleicher Zeitabschnitte beschrieben werden, und es werden einige weitere Angaben über die mögliche Verschiedenheit so definierter Zeiträume und der durch die Erdrotation für sie gefundenen Maße gemacht werden. Infolge der Flutreibung sowie durch die fortwährenden Meteorfälle (welche die Masse der Erde vergrößern) muß die Drehung der Erde ganz allmählich langsamer werden; und diesem Einfluß wird nur höchst unbedeutend entgegengewirkt durch die infolge der Abkühlung eintretende Verringerung des Erdvolumens, ein Einfluß, der, wie wir sehen werden, die Rotationsgeschwindigkeit erhöht.

Es ist einleuchtend, daß jede Verlangsamung der Erdrotation durch ein Vordringen der Himmelskörper über ihre berechneten Örter hinaus sichtbar werden würde. Dies ist in der Tat beim Monde beobachtet worden, der gegen seinen berechneten Ort vorzugehen scheint um einen Betrag, der wie das Quadrat der Zeit wächst. Man hat guten Grund, einen Teil hiervon der allmählichen Abnahme der Exzentrizität der Erdbahn zuzuschreiben; aber es bleibt ein Rest übrig, der, der Flutreibung angerechnet, ergeben würde, daß die Erde hinter einer exakt gehenden, ursprünglich nach der Erdrotation regulierten Uhr um ungefähr 22 Sekunden in 100 Jahren zurückbleibt (s. unten, Kapitel 14 über die Gezeiten). In 1000 Jahren würde dies schon eine Differenz von 36 Minuten hervorrufen.

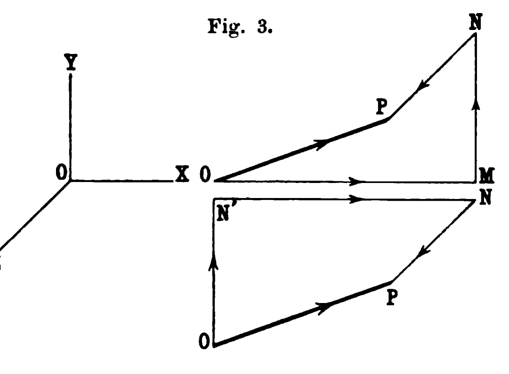
Zweites Kapitel.

Kinematik oder Geometrie der Bewegung.

15. Diejenigen physikalischen Erscheinungen, welche zuerst unsere Aufmerksamkeit erregen, sind die durch die Bewegungen der Körper dargebotenen. Aber diese Bewegungen sind nur relativ, d. h. es sind nur Lageänderungen mancher Körper bezogen auf andere, die wir als fest im Raume ansehen. Absolute oder nicht relative Bewegung scheint ein unmöglicher Gedanke zu sein [1]).

16. Lage eines Punktes. Strecken. Es ist daher notwendig zunächst anzunehmen, daß die Lage eines Punktes sich ausdrücken läßt in Beziehung auf ein als bekannt und fest im Raume vorausgesetztes geometrisches System. So könnten wir, wenn wir eine Ebene, in dieser Ebene eine Linie und in dieser Linie einen Punkt, alles gegeben, haben, die Lage eines außerhalb der Ebene gelegenen Punktes P folgendermaßen definieren: Die bei O beginnende und bei P endende Linie möge die Strecke OP heißen. Diese Strecke ist äquivalent oder gleichwertig mit drei anderen Strecken, die wir, auf die gegebene Ebene und Linie Bezug nehmend, in der folgenden Weise konstruieren. Zuerst wird eine Strecke OM, Fig. 3, der Linie OX entlang gezogen, dann eine Strecke MN in der gegebenen Ebene und senkrecht zu OX und endlich eine

Fig. 3.



[1]) Über die Frage der absoluten Bewegung liegt eine reiche Literatur vor; es würde aber zu weit führen, hier darauf einzugehen, zumal die betreffenden erkenntnistheoretisch höchst interessanten Untersuchungen ein für die Physik als solche greifbares Ergebnis bisher nicht gehabt haben.

Strecke NP senkrecht auf der Ebene. Diese Strecken sind völlig bestimmt nach Größe und Richtung, können aber in beliebiger Reihenfolge genommen werden. Man kann z. B. zuerst die Strecke ON' in gleicher Länge und parallel mit MN nehmen, dann $N'N$ gleich und parallel mit OM und schließlich NP wie vorher.

17. Addition und Gleichwertigkeit von Strecken. Es ist klar, daß die Strecke OP in eine beliebige Anzahl einander folgender Strecken OA, AB ... NP (Fig. 4) in beliebiger Reihenfolge und nur der einzigen Bedingung unterworfen, daß ihre Reihe bei O beginne und bei P endige, aufgelöst werden kann. So können wir schreiben, indem wir das Gleichheitszeichen benutzen, um Gleichwertigkeit anzudeuten,

$$\left.\begin{aligned} OP &= OA + AB + BC + \cdots + NP \\ \text{oder}\quad OA &+ AB + BC + \cdots + NP + PO = 0 \\ \text{oder}\quad OP &+ PN + \cdots + CB + BA + AO = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

da jede der beiden letzten Anordnungen der Strecken eine geschlossene Kette bildet, die bei O beginnt und wieder dahin zurückkehrt.

Daraus ersehen wir, daß jede Strecke OP als äquivalent mit der Strecke $-PO$ gelten muß:

$$OP + PO = 0 \quad (2)$$

Eine Strecke, die einer Reihe anderer gleichwertig ist, nennt man häufig auch ihre geometrische Summe.

Es muß bemerkt werden, daß hier alle Strecken als äquivalent gelten, die sich in zweierlei, in Größe und Richtung, gleichen, ohne

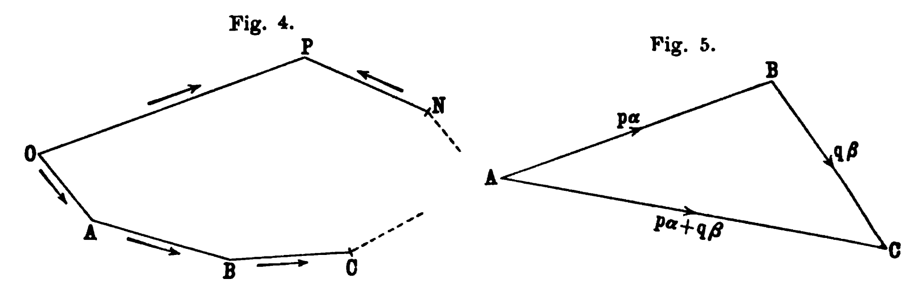


Fig. 4. Fig. 5.

Rücksicht auf die Lage der Punkte, die Anfang und Ende der Strecke bezeichnen. Später werden indessen Strecken vorkommen, die „lokalisiert" sind, d. h. nur in bestimmten Bahnen wirksam sind.

Betrachten wir nun die einzelne Strecke, die mit zwei Strecken $p\alpha$, $q\beta$ äquivalent oder, wie wir es nennen wollen, ihre Resultante ist, wo p, q beliebige reelle Zahlen und α, β Strecken von gegebener Länge in bestimmten Richtungen sind. Wenn AB (Fig. 5) $p\alpha$ vor-

stellt (α eine Strecke in der Richtung AB), und BC auf dieselbe Weise $q\beta$ vorstellt, so haben wir

$$AC = p\alpha + q\beta.$$

Wenn wir alsdann auch

$$AC = p'\alpha + q'\beta$$

haben, so erhalten wir

$$(p - p')\alpha + (q - q')\beta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Nun leuchtet es ein, daß nicht eine Strecke in der Richtung BC eine Strecke in der Richtung AB aufheben kann. Folglich ergibt (3) die beiden Gleichungen

$$p = p', \quad q = q' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wiederum, wenn $p\alpha$, $q\beta$, $r\gamma$ (Fig. 6) drei aufeinander folgende Strecken AB, BC, CD sind und die vier Punkte $ABCD$ nicht in einer Ebene liegen, ergibt die Äquivalenz

$$p\alpha + q\beta + r\gamma = p'\alpha + q'\beta + r'\gamma$$

drei Gleichungen, die diese Faktoren miteinander verknüpfen, nämlich:

$$p = p', \quad q = q', \quad r = r'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Denn die beiden Strecken $p\alpha$, $q\beta$ geben eine Resultante AC, und diese macht in Verbindung mit $r\gamma$ die Strecke AD aus, und keine andere Einzelstrecke in der Ebene ABC außer AC in Verbindung mit

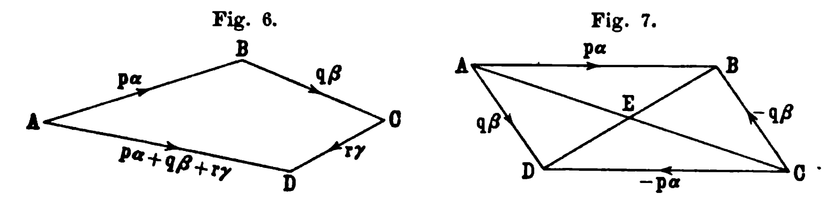


Fig. 6. Fig. 7.

einer Strecke längs CD (welche nicht in dieser Ebene liegt) würde die Resultante AD ergeben.

Die Zahlenfaktoren pqr, die positiv oder negativ, ganze Zahlen oder Brüche sein können, werden häufig skalare Größen oder, einfach, Skalare genannt.

Das soeben bewiesene Theorem ist von großer Wichtigkeit in der Algebra der Verrückungen. Sein erster einfacher, in Gleichung (3) festgestellter Fall ist in Fig. 7 dargestellt und ist ausgesprochen in dem Theorem, daß die gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms einander gleich sind.

18. Beispiele aus der Geometrie der Strecken. Die bereits erhaltenen Resultate bieten bequeme Beweise geometrischer Theoreme dar; wir werden uns aber hier hauptsächlich auf solche beschränken, die in der Dynamik direkt anwendbar sind.

Ziehen wir die Diagonale BD des Parallelogramms in Fig. 7 und lassen wir die beiden Diagonalen sich in E schneiden, dann haben wir für AE als einen Teil von AC:

$$AE = m\,(p\alpha + q\beta),$$

wo m ein zu bestimmender Faktor ist. [Natürlich auch $EC = (1 - m)\,(p\alpha + q\beta)$.] Aber auch

$$AE = AD + DE = q\beta + m'\,(p\alpha - q\beta),$$

wo m' ein anderer Faktor ist. Daher erhalten wir

$$m(p\alpha + q\beta) = q\beta + m'(p\alpha - q\beta)$$

und hieraus durch Trennung der Glieder:

$$m - m' = 0, \quad m + m' = 1,$$

d. h.

$$m = m' = \tfrac{1}{2}.$$

Dies beweist, daß

$$AE = \tfrac{1}{2}(AB + BC),\ DE = \tfrac{1}{2}(DC + CB)$$

ist oder daß die Diagonalen des Parallelogramms einander halbieren.

Fig. 8.

Ferner ziehen wir Strecken $\alpha\beta\gamma$ von einem Ausgangspunkte O nach den drei Punkten ABC (Fig. 8), die nicht notwendig in derselben Ebene mit O liegen. D sei der halbwegs zwischen B und C gelegene Punkt, dann ist

$$OD = OC + CD = \gamma + \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) \quad . \quad . \quad (6)$$

D heißt der Mittelpunkt von BC.

Wenn nun G ein Punkt von AD ist, so erhalten wir

$$OG = OD + DG = \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) + k[\alpha - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)],$$

wo k ein skalarer Faktor ist. Wenn G so gewählt wird, daß $DG/GA = \frac{1}{2}$ wird, so haben wir $k = \frac{1}{3}$ und

$$OG = \tfrac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

G wird der Mittelpunkt von ABC genannt.

19. Mittelpunkt eines Systems von Punkten. Betrachten wir nun eine beliebige Anzahl n von Punkten A_1, A_2 .., A_n, nicht notwendig, in einer Ebene gelegen, deren Strecken von O aus α_1, α_2, α_3 ... α_n betragen. Es kann ein Punkt G gefunden werden, dessen Strecke von O durch die Äquivalenz

$$OG = \frac{1}{n}\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ausgedrückt wird. G heißt der Mittelpunkt des Systems A_1, A_2..., A_n.

Der so gefundene Punkt G ist unabhängig von der Wahl des Punktes O, des Anfangspunktes, von dem aus die Strecken A_1, A_2 ..., A_n gemessen werden. Denn, wählen wir irgend einen anderen Punkt O' als Anfangspunkt und nennen wir die Strecke von ihm bis zu O hin ϱ, so haben wir $O'A_1 = \alpha'_1$ $(= \alpha_1 + \varrho)$, $O'A_2 = \alpha'_2$ $(= \alpha_2 + \varrho)$, ... Nennen wir den auf dieselbe Weise wie vorher gefundenen Mittelpunkt G'. Die Strecke von O' zu G' ist

$$O'G' = \frac{1}{n}(\alpha_1' + \alpha_2' + \cdots + \alpha'_n) = \frac{1}{n}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + \varrho,$$

welches augenscheinlich die Strecke von O' zu G ist; G und G' fallen also zusammen.

Wenn eine beliebige Anzahl h von den Punkten A_1, A_2... eine in A zusammenfallende Gruppe, k andere, eine in B zusammenfallende Gruppe bilden u. s. f., wenn ferner α, β, γ ... die Strecken von O zu den betreffenden Gruppen sind, so haben wir nach Gl. (8) offenbar

$$(h + k + \cdots)\, OG = n\,.\,OG = h\alpha + k\beta + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Die Strecke $n\,.\,OG$ ist die Resultante der Strecken α_1, α_2..., α_n, d. h. sie ist die der ganzen Reihenfolge von Strecken, jede in ihrer eigenen Richtung genommen, und jede mit ihrem Anfangspunkt in den Endpunkt der vorigen fallend, äquivalente Einzelstrecke. Die Strecke $n\,.\,OG$ ist auch die Resultante der Strecken $h\alpha + k\beta + \cdots$

Wir können die Zahlen h, k... vorläufig die Multiplizitäten der Strecken nach den Punkten A, B..., oder auch kurz die Multiplizitäten der Punkte A, B ... nennen.

20. Ersatz von Punktgruppen durch einzelne Punkte. Es ist erwähnenswert, daß wir, wenn wir z. B. m Punkte von beliebig gegebenen Multiplizitäten haben, diese in beliebiger Weise in Gruppen zerlegen, den Mittelpunkt jeder Gruppe finden, dann uns jede Gruppe durch ihren Mittelpunkt, dem wir eine der Summe der Multiplizitäten seiner Gruppe gleiche Multiplizität zuschreiben, ersetzt denken und den Mittelpunkt des schließlichen Systems finden können, der zugleich der des anfänglichen Systems sein wird. Denn wenn wir h_1, h_2 ... für die Multiplizitäten von Punkten einer Gruppe, deren Strecken vom Anfangspnnkte α_1, α_2... betragen, k_1, k_2... für die Multiplizitäten einer anderen Gruppe, deren Strecken β_1, β_2 ... betragen u. s. w., setzen, so ersehen wir aus Gl. (9), daß der Mittelpunkt des Systems durch

$$\begin{aligned}&(h_1 + h_2 + \cdots + k_1 + k_2 + \cdots + \cdots)\, OG \\ &= h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \cdots + k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + \cdots\end{aligned}$$

gegeben ist, oder, wie man auch schreiben kann, durch:

$$\left.\begin{aligned}(h_1 + h_2 + \cdots + k_1 + k_2 + \cdots + \cdots)\, OG \\ = (h_1 + h_2 + \cdots)\, \frac{h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \cdots}{h_1 + h_2 + \cdots} \\ + (k_1 + k_2 + \cdots)\, \frac{k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots}{k_1 + k_2 + \cdots}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (10)$$

Die rechte Seite ist die Summe der durch Multiplikation der Strecke von jedem Gruppenmittelpunkte mit der Summe der Multiplizitäten der Punkte der Gruppe erhaltenen Produkte. Also ist das oben aufgestellte Theorem bewiesen.

Dieses Theorem wird, wie wir später sehen werden, fortwährend angewandt bei dem gewöhnlichen Prozeß der Auffindung des Trägheitsmittelpunktes oder Massenmittelpunktes eines Systems von — gleichviel ob diskreten oder einen stetigen Körper bildenden — Teilchen.

Als Beispiel können wir mit Hilfe von Gl. (9) die Konstruktion der Resultante der Strecken OA, OB ermitteln, wo A, B die Multiplizitäten h bezw. k haben. OG (wo G auf A, B liegt) sei die Richtung der Resultante. G ist, wie wir gesehen haben, der Mittelpunkt von A, B. Folglich:

$$AG = -\alpha + \frac{h\alpha k\beta}{h+k} = \frac{k}{h+k}(\beta - \alpha)$$

und

$$GB = \beta - \frac{h\alpha + k\beta}{h+k} = \frac{h}{h+k}(\beta - \alpha);$$

oder

$$\frac{AG}{GB} = \frac{k}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Also teilt G demnach A, B in zwei Teile AG, GB, die sich umgekehrt wie die Multiplizitäten der Anfangs- und Endpunkte verhalten. Die Resultante der Strecken OA, OB wird durch $(h + k)\, OG$ dargestellt.

21. Eigenschaften des Mittelpunktes. Kehren wir zu dem Falle eines Systems von Teilchen in den Punkten A, B und von den Multiplizitäten $h, k \ldots$ zurück, nehmen wir den Mittelpunkt des Systems als Anfangspunkt und ziehen wir eine beliebige gerade Linie durch diesen Punkt. Die Strecke von G nach A kann aus zwei Strecken zusammengesetzt werden, einer Strecke ϱ_1 von G aus, längs jener geraden Linie verlaufend, und einer zweiten Strecke α', senkrecht zu dieser geraden Linie, vom Endpunkte von ϱ_1 nach A. Also $\alpha = \varrho_1 + \alpha'$. Ebenso kann die Strecke GB aus ϱ_2 und β' zusammengesetzt werden, erstere der geraden Linie durch G entlang, letztere senkrecht zu ihr. Also erhalten wir nach Gl. (9):

$$h(\varrho_1 + \alpha') + k(\varrho_2 + \beta') + \cdots = 0,$$

oder

$$h\varrho_1 + k\varrho_2 + \cdots + h\alpha' + k\beta' + \cdots = 0.$$

Es ist klar, daß $h\varrho_1 + k\varrho_2 + \cdots$ einer Strecke entlang der gegebenen Geraden entspricht, während $h\alpha'$, $k\beta' \cdots$ Strecken in der Richtung von α' bezw. β' sind. Natürlich ist die Bedeutung der eben gefundenen Gleichung, daß diese Strecken, der Reihe nach, in ihren eigenen Richtungen genommen, ein geschlossenes Polygon ergeben. Aber die so genommenen Strecken $h\alpha$, $k\beta'$ ... werden in einer zu der geraden Linie senkrechten Ebene liegen, und folglich müssen wir haben:

$$h\varrho_1 + k\varrho_2 + \cdots = 0.$$

Wenn wir also jeden der Punkte A, B ... an den Fuß des Lotes verlegen, das wir von der tatsächlichen Lage des Punktes auf eine beliebige gerade Linie durch den Mittelpunkt des Systems fällen, so wird dadurch der Mittelpunkt nicht verändert.

Betrachten wir nun eine beliebige Anzahl n von Strecken A_1B_1, A_2B_2 ..., die von einer Gruppe von Anfangspunkten A_1, A_2 ..., A_n nach einer Gruppe von Endpunkten B_1, B_2 ..., B_n gezogen sind. Die Strecken OB_1, OB_2 ..., OB_n nach den Punkten B_1, B_2 ..., B_n von einem beliebigen Anfangspunkt O haben eine Resultante $n . OG_B$, wo G_B der Mittelpunkt von B_1, B_2 ..., B_n ist. Nun ist aber

$$\begin{aligned} n . OG_B &= OB_1 + OB_2 + \cdots + OB_n \\ &= OA_1 + A_1B_1 + OA_2 + A_2B_2 + \cdots + OA_n + A_nB_n. \end{aligned}$$

Wenn O der Mittelpunkt von A_1, A_2 ..., A_n ist, haben wir ferner identisch

$$OA_1 + OA_2 + \cdots + OA_n = 0;$$

folglich ergibt sich:

$$n . OG_B = A_1B_1 + A_2B_2 + \cdots + A_nB_n.$$

Die Resultante der n gegebenen Strecken ist also das $n$fache der die Mittelpunkte der Gruppen der Anfangs- und Endpunkte verbindenden Strecke.

Jede Strecke OA kann in eine beliebige Anzahl von Strecken zerlegt werden, deren Resultante sie ist. Denn sie werden, der Reihe nach genommen, ein ungeschlossenes, nicht notwendig ebenes Polygon bilden, dessen Anfangspunkt O und dessen Endpunkt A ist.

22. Berechnung von Länge und Richtung der resultierenden Strecke. Es ist häufig notwendig, die zahlenmäßige Länge der Resultierenden zweier Strecken zu berechnen, wenn ihre Längen und der Winkel zwischen ihnen gegeben ist. Nehmen wir also die Anordnung von Fig. 5; die Längen AB, BC seien s_1, s_2; als Winkel zwischen diesen Strecken nehmen wir den Winkel zwischen BC und der Verlängerung von AB und bezeichnen ihn mit θ. Wenn dann s die Länge der Resultante AC ist, so haben wir nach einem elementaren Theorem der Trigonometrie

$$s^2 = s_1^2 + s_2^2 + 2 s_1 s_2 \cos \theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

woraus sich s ergibt.

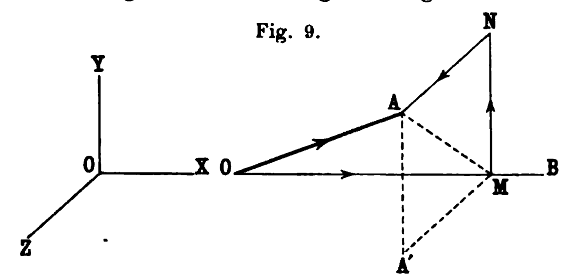
Der Winkel BAC, den s mit AB bildet, muß auch die Beziehung

$$\left.\begin{aligned} \cos BAC &= \frac{s_1 + s_2 \cos \theta}{s} \\ \text{erfüllen; ebenso haben wir} & \\ \cos BCA &= \frac{s_2 + s_1 \cos \theta}{s} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Wenn eine beliebige Anzahl von Strecken gegeben und Länge und Richtung ihrer Resultante zu ermitteln ist, können wir dieses Theorem benutzen, um zuerst Länge und Richtung der Resultante von zwei der gegebenen Strecken zu finden, die wir uns dann durch ihre Resultante ersetzt denken können. Dann kann die Resultante von dieser und einer dritten Strecke in derselben Weise berechnet werden, und so weiter, bis das ganze gegebene System erschöpft ist.

23. Rechtwinkelige Auflösung von Strecken. Auffindung des Mittelpunktes durch rechtwinkelige Strecken. Als besonderen Fall solcher Auflösung können wir OA in zwei zueinander rechtwinkelige Strecken oder in drei Strecken, die je aufeinander senkrecht stehen, auflösen. Die letztere Art der Auflösung wird sehr oft bei der Behandlung eines Systems von Strecken gute Dienste leisten, und wir werden für jede Strecke die gleichen Auflösungsrichtungen wählen. So denken

Fig. 9.



wir uns in Fig. 9 die drei Strecken OM, MN, NA in den Richtungen OX, OY, OZ, und ihre Summe ist OA äquivalent. Wir wollen Einheitsstrecken entlang OX, OY, OZ mit i, j, k bezeichnen und die in OM, MN, NA enthaltene Zahl solcher Einheiten mit x, y, z, so daß

$$OM = xi,\ MN = yj,\ NA = zk$$

ist. Es ist also:

$$OA = xi + yj + zk.$$

OX, OY, OZ heißen die Koordinatenaxen und zwar bezw. x-Axe, y-Axe, z-Axe.

Die Projektion einer Strecke OA auf eine andere OB ist die Strecke OM, die zwischen O und dem Fuße eines von A auf OB gefällten Lotes AM eingeschlossen ist; x, y, z sind die Längen der Projektionen von OA auf diese Koordinatenaxen.

Wir können für diese Art der Auflösung ein Beispiel geben, indem wir sie bei der Erörterung über den Mittelpunkt eines Systems von Teilchen (§ 19) anwenden.

Wählen wir drei aufeinander senkrechte Richtungen OX, OY, OZ, längs deren i, j, k Einheitsstrecken sind; x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 ... seien solche Größen, daß

$$\begin{aligned} OA &= x_1 i + y_1 j + z_1 k \\ OB &= x_2 i + y_2 j + z_2 k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

wird. Die Gleichung

$$(h_1 + h_2 + \cdots) OG = n . OG = h_1 \cdot OA + h_2 . OB + \cdots$$

ergibt, wenn $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die Längen der Strecken längs OX, OY, OZ sind, die zusammengenommen OG äquivalent sind:

$$\left.\begin{aligned} n\bar{x} &= h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 + \cdots \\ n\bar{y} &= h_1 y_1 + h_2 y_2 + h_3 y_3 + \cdots \\ n\bar{z} &= h_1 z_1 + h_2 z_2 + h_2 z_3 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

Wenn $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$ ist, d. h. wenn O der Mittelpunkt des Systems ist, sind die Größen auf den rechten Seiten von Gl. (14) jede 0. Die Gleichungen (14) werden von großem Nutzen sein bei der Bestimmung der Massenmittelpunkte von Systemen von Teilchen.

24. Beziehung zwischen Länge und Richtung einer Strecke und ihren rechtwinkeligen Komponenten. Wenn die Zahl der Einheiten in OA gleich l_1 ist, so ist es leicht zu beweisen, daß

$$l_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

ist. Denn betrachten wir Fig. 10 als Darstellung eines rechtwinkeligen Prismas, dessen bei O zusammentreffende Kanten längs den Axen OX, OY, OZ liegen, und das solcher Art ist, daß $OA_1 = x_1$, $OA_2 = y_1$, $OA = z_1$ und $OA = l_1$ ist; r_1 sei die Länge der Strecke $A_1 A$, dann haben wir, da $OA_1 A$ augenscheinlich ein rechter Winkel ist, $l_1^2 = x_1^2 + r_1^2$; und da $r_1^2 = y_1^2 + z_1^2$ ist, so erhalten wir die oben aufgestellte Beziehung.

Fig. 10.

Ferner ist, wenn $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ die Winkel zwischen der Strecke OA und den Axen sind, nach Fig. 10 leicht einzusehen, daß

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_1}{l_1}, \cos \beta_1 = \frac{y_1}{l_1}, \cos \gamma_1 = \frac{z_1}{l_1} \quad \ldots \quad (16)$$

ist.

Diese Kosinus (gewöhnlich die **Richtungskosinus** der Strecke genannt) sind verbunden durch die Beziehung

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

wie aus Gl. (15) klar ersichtlich ist. Ebenso sind die Richtungskosinus $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ von OB gleich $x_2/l_2, y_2/l_2, z_2/l_2$, wo l_2 die Länge von OB ist.

Die Summe der Projektionen einer beliebigen Zahl von Strecken, die bei O beginnen und bei B enden, auf eine Strecke OA ist, wenn

Fig. 11.

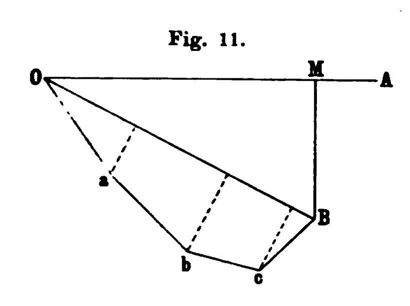
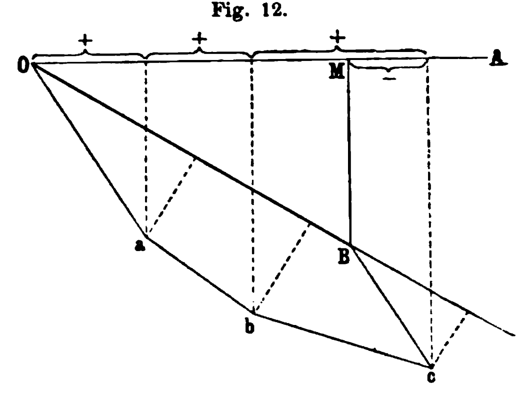


Fig. 12.



OM die Projektion von OB auf OA ist, ebenfalls OM. Dies erhellt aus Fig. 11, in der die Strecken Oa, ab ... als nicht in gleicher Ebene liegend betrachtet werden müssen. Wir haben aber

$$OB = x_2 i + y_2 j + z_2 k,$$

und die Längen der Projektionen von $x_2 i$, $y_2 j$, $z_2 k$ auf OA betragen $x_2 x_1/l_1$, $y_2 y_1/l_1$, $z_2 z_1/l_1$. Wenn also θ den Winkel AOB zwischen den beiden Strecken OA, OB bezeichnet, erhalten wir die Gleichung

$$\cos\theta = \frac{x_1 x_2}{l_1 l_2} + \frac{y_1 y_2}{l_1 l_2} + \frac{z_1 z_2}{l_1 l_2}$$

oder

$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \; . \; . \; . \quad (18)$$

Unter Umständen, wenn nämlich die Strecken zum Teil jenseits MB liegen, müssen die Projektionen mit Rücksicht auf ihr Richtungsvorzeichen addiert werden (Fig. 12).

25. Relative Verrückung. Wir werden jetzt Verrückungen eines Systems von Teilchen betrachten, bezogen auf ein Teilchen, das selbst eine Verrückung erfahren hat. Das System bestehe zunächst aus einem einzigen Teilchen B, und A sei dasjenige Teilchen, in Bezug auf welches die Verrückung bestimmt werden soll. α, β seien die Verrückungen, denen A bezw. B unterworfen worden sind. Wir definieren die Verrückung von B bezogen auf A als die gesamte von B zurückgelegte Strecke, wenn, nachdem die Verrückungen α, β ausgeführt worden sind, beide Teilchen eine Verrückung erfahren haben, die der von A gleich und entgegengesetzt ist, d. h. eine Verrückung $-\alpha$; also ist sie $\beta - \alpha$.

Die Verrückung von B in Rücksicht auf A ist die Verrückung, in die β dadurch verwandelt wird, daß A und B Verrückungen, die α gleich und entgegengesetzt sind, auferlegt werden. Durch diesen Prozeß wird A mit Rücksicht auf das geometrische Bezugssystem in seine ursprüngliche Lage zurückgebracht, während die Anordnung der Teilchen im Raume nicht geändert wird.

26. Relative Verrückung der Mittelpunkte zweier Gruppen. Betrachten wir jetzt zwei Gruppen von Punkten $A_1, A_2 \ldots, A_m, B_1, B_2 \ldots, B_n$, alle von derselben Multiplizität — sagen wir $= 1$ — und lassen wir sie Verrückungen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_n$ erfahren. Die Verrückung des Mittelpunktes G_A der ersten Gruppe ist $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)/m$, die von G_B, dem Mittelpunkte der zweiten Gruppe ist $(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n)/n$. Die Verrückung von G_B relativ zu G_A ist

$$(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n)/n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)/m,$$

und die von G_A relativ zu G_B ist dieselbe Größe mit dem entgegengesetzten Vorzeichen. Wenn diese Größe verschwindet, erfahren die Mittelpunkte der Gruppen keine relative Verrückung.

Wenn die Multiplizitäten der Punkte der Gruppen $g_1, g_2 \ldots, g_m, h_1, h_2 \ldots, h_n$ sind, müssen wir in den soeben erhaltenen Formeln statt $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m$ jetzt $g_1\alpha_1, g_2\alpha_2 \ldots, g_m\alpha_m$, statt $\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_n$, jetzt $h_1\beta_1, h_2\beta_2 \ldots, h_n\beta_n$ und statt m, n jetzt $g_1 + g_2 + \cdots g_m, h_1 + h_2 + \cdots + h_n$ setzen. Damit wird die Verrückung von G^B relativ zu G_A

$$\frac{1}{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}(h_1\beta_1 + h_2\beta_2 + \cdots + h_n\beta_n)$$
$$- \frac{1}{g_1 + g_2 + \cdots + g_m}(g_1\alpha_1 + g_2\alpha_2 + \cdots g_m\alpha_m).$$

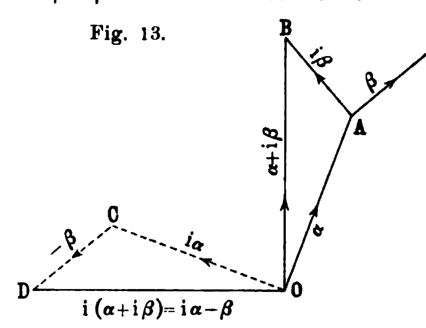
27. Rotation eines Systems von Teilchen um eine Axe. Wir betrachten jetzt die Verrückung eines Systems von n Teilchen durch einfache Drehung um eine Axe. Die Verrückung ist ausgesprochen in der Behauptung, daß sich die von den Teilchen des Systems auf die Axe gefällten Lote sämtlich (während sie senkrecht zur Axe verbleiben) um ihren Endpunkt an der Axe um den gleichen Winkel θ drehen. Es ist klar, daß, da die Teilchen nicht gegeneinander verrückt werden und die Lote die gleiche Länge wie vorher behalten, auch das vom Mittelpunkte des Systems auf die Axe gefällte Lot die gleiche Länge behält und sich um den gleichen Winkel dreht. Auch wird der Mittelpunkt des Systems dadurch, daß sich das Ganze ohne relative Verrückung der Teilchen um eine durch den Mittelpunkt in der anfänglichen Lage des Systems gelegte Axe dreht, nicht verändert.

28. Multiplikation von Strecken durch komplexe Zahlen. Wenn eine Strecke ρ um 180^0 gedreht wird, so wird sie $-\rho$. Somit können wir als Multiplikation mit -1 diejenige Operation bezeichnen, welche die Richtung einer Strecke umkehrt. Diese Umkehrung der

Richtung kann indessen als das Ergebnis zweier aufeinander folgender Drehungen der Strecke um einen rechten Winkel in irgend einer bestimmten Ebene betrachtet werden. Ist also $i^2 = -1$, so ist i ein Operator von der Eigenschaft, daß durch die Multiplikation mit ihm eine Strecke um 90° in jener Ebene gedreht wird. Der Operator kann positiv oder negativ sein, d. h. die Strecke kann um 90° in der positiven oder negativen Richtung gedreht werden. Die Drehungsrichtung ist positiv, wenn sie sich für den die Linie anblickenden Beobachter scheinbar entgegen dem Zeiger einer Uhr bewegt, deren Zifferblatt für den Beobachter in der Drehungsebene liegt. Wenn i der Operator ist, der eine Strecke um 90° in dieser Richtung dreht, so ist $-i$ der Operator, der eine Strecke um 90° in der umgekehrten Richtung dreht. Also ist Multiplikation mit $+i$ und darauf folgende Multiplikation mit $-i$, oder umgekehrt gleichwertig mit der Multiplikation mit $+1$, d. h. der Prozeß läßt die Strecke ungeändert. Dagegen verwandelt die zweimalige Multiplikation mit $+i$ (oder mit $-i$) die Strecke in die entgegengesetzte. Die viermalige Multiplikation mit $+i$ endlich (oder mit $-i$) oder die zweimalige mit -1 führt sie zum ursprünglichen Werte zurück, läßt sie also ungeändert.

Wenn α, β zwei beliebige Strecken sind, so ist nach dem Gesagten $\alpha + i\beta$ die Resultante der Strecke α und einer um einen rechten Winkel von der Richtung von β aus positiv gedrehten Strecke β. Die Strecke $i(\alpha + i\beta)$ oder $i\alpha - \beta$ ist ebenso lang wie $\alpha + i\beta$, aber um $+90°$ von der Richtung dieser Strecke aus gedreht. Dies kann leicht durch eine Zeichnung (Fig. 13) bewiesen werden: $i\alpha$ ist α um $+90°$ gedreht, und die Kombination davon mit β im entgegengesetzten Sinne muß eine auf $\alpha + i\beta$ senkrecht stehende Resultante ergeben.

Fig. 13.



Wenn a, b die Anzahl von Längeneinheiten in α, β ist, so ist die Anzahl von Längeneinheiten in jeder der Strecken $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ $i\alpha - \beta$, $i\alpha + \beta$ die gleiche, nämlich $\sqrt{a^2 + b^2}$. Die positiven Zahlen a, b können die Moduln von α, β genannt werden, und $\sqrt{a^2 + b^2}$ (immer positiv genommen) ist der Modul von jeder der vier angeführten Resultanten.

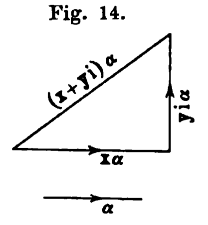
Durch Multiplikation einer Strecke mit einer positiven Zahl x multipliziert man einfach den Modul der Strecke mit x, d. h. man verändert dadurch die Länge der Strecke auf das $x$fache. Durch Multiplikation mit $-x$ ändert man die Länge der Strecke im selben Verhältnis und kehrt ihre Richtung um. Daher verändert die Multipli-

kation mit $x i$ die Strecke im Verhältnis von x zu 1 und dreht die Strecken um $+ 90^0$; Multiplikation mit $- x i$ bewirkt dieselbe „Streckung“, wie wir es nennen können, und eine Drehung um -90^0.

Eine Größe $x + y i$, wo x, y irgend welche positive oder negative reelle Zahlen sind und i der soeben definierte Operator $\sqrt{-1}$ ist, wird eine komplexe Zahl genannt. Die positive Zahl $\sqrt{x^2 + y^2} (= r)$ ist ihr Modul, und die Zahl $x^2 + y^2$ wird ihre Norm genannt. Wenn θ so gewählt wird, daß $\cos \theta = x/r$, $\sin \theta = y/r$ ist, so wird es das Argument der komplexen Zahl genannt.

Wenn eine Strecke α mit der komplexen Zahl $x + y i$ multipliziert wird, wo x und y positive reelle Zahlen sind, so ist das Resultat die Strecke $x\alpha + y i \alpha$. Das erste Glied ist die ursprüngliche Strecke α im Verhältnis von x zu 1 gestreckt; das zweite Glied ist α im Verhältnis von y zu 1 gestreckt und um $+ 90^0$ gedreht (Fig. 14). Ist die komplexe Zahl $x - y i$, so ist das Resultat dasselbe wie vorher, mit dem Unterschiede, daß der Drehungswinkel für das zweite Glied jetzt -90^0 beträgt. Ist die Zahl $-x + yi$, so wird das erste Glied in seiner Richtung umgekehrt, das zweite Glied bleibt $y i \alpha$; ist die Zahl $-x - yi$, so ist das Ergebnis $-(x\alpha + y i \alpha)$, d. h. die Umkehrung des ganzen Ausdruckes. Die Länge der neuen Strecke ist in jedem Falle das $\sqrt{x^2 + y^2}$ fache der Länge der Strecke α.

Fig. 14.



Multiplikation mit zwei komplexen Zahlen $x + y i$, $x' + y' i$ nacheinander, wo x, x', y, y' reelle Zahlen sind, ist der Multiplikation mit der komplexen Größe $xx' - yy' + (x'y + xy')i$, dem Produkte der komplexen Zahlen, äquivalent; durch Ausführung der Multiplikation sieht man dies leicht ein. Der Modul dieser komplexen Zahl ist $\sqrt{(xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2}$ oder $\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}$, d. h. gleich dem Produkte der Moduln der einzelnen Zahlen. Auf dieselbe Weise kann das Ergebnis der Multiplikation mit n komplexen Zahlen nacheinander gefunden werden. Es ist dasselbe, wie das der Multiplikation mit einer einzigen komplexen Zahl, die das Produkt der n komplexen Faktoren ist: ihr Modul ist das Produkt der Moduln der Faktoren; ihr Argument ist die Summe der Argumente der Faktoren.

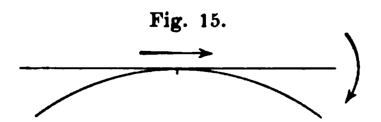
29. Stetige Verrückung. Erzeugung einer Kurve durch einen sich längs einer rotierenden Linie bewegenden Punkt. Geschwindigkeit. Wir kommen jetzt zur Betrachtung der mit der Zeit fortschreitenden Verrückung. Die metaphysische Idee der Zeit geht uns hier nichts an: wir müssen sie für bewiesen ansehen. Die Folge der Gedanken und des Geschehens gibt eine Vorstellung vom Fließen der Zeit, und wir werden sie hier als eine Größe betrachten, die sich in aufeinander folgende meßbare Abschnitte von beliebiger

äußerster Kleinheit teilen läßt. Die praktische Definition gleicher Zeitabschnitte ist oben Kap. 1 betrachtet worden und wird weiterhin in der ausführlicheren Besprechung von „Maßen und Instrumenten“ eingehender behandelt werden.

Denken wir uns eine geometrische Kurve erzeugt durch die Bewegung eines Punktes längs einer geraden Linie, die sich um den Punkt dreht, wie in Fig. 15. Liegt die Kurve in einer Ebene, ist sie, wie man sagt, eine ebene Kurve, so liegt auch die gerade Linie immer in einer Ebene. Die gerade Linie heißt in jeder ihrer Lagen die „Tangente“ an die Kurve in dem betreffenden Punkte.

Betrachten wir zuerst die Bewegung des Punktes, dann die der Linie. Nehmen wir an, daß der Punkt in einem Zeitraume t der Kurve entlang eine Weglänge gleich s beschreibt. Dann nennen wir das Verhältnis s/t die „mittlere Geschwindigkeit“ des Punktes während der Zeit t. Ist die Bewegung eine solche, daß bei einer Teilung von t in n beliebig große gleiche Teile die von dem Punkte zurückgelegte Strecke in jedem dieser Teile denselben Wert s/n behält, so nennen wir die Geschwindigkeit des Punktes während der Zeit t eine gleichförmige.

Fig. 15.



Die Geschwindigkeit kann aber auch veränderlich sein. Wenn sie sich ändert, so nehmen wir an, daß der Betrag der Änderung, die sich in einem noch so kleinen Zeitteilchen t/n vollzieht, immer in einem bestimmten Verhältnis zu dem Zeitteilchen steht, d. h. wir nehmen die Änderung der Geschwindigkeit als „stetig“ an.

30. Winkelgeschwindigkeit. Die Bewegung der Linie in einem beliebigen Zeitraume wird durch den Winkel gemessen, um den sich die Linie in dieser Zeit gedreht hat. Dieser Winkel wird gemessen, indem man von einem Punkte, z. B. A, aus zwei den Lagen der sich drehenden Linie am Anfang und Ende des Zeitraumes parallele Linien zieht. Wenn dann ein Kreis um A als Mittelpunkt beschrieben wird, so daß er die beiden Linien schneidet, so ist der Winkel das Verhältnis der Länge des zwischen den Linien eingeschlossenen Bogens zu der Länge des Radius; oder, wenn der Radius die Länge 1 hat, ist der Winkel einfach die Bogenlänge. Der Einheitswinkel ist demnach der Winkel, bei welchem der Bogen gleich dem Radius ist (im Gradmaß $57^0\ 17'\ 45''$).

Wenn der in der Zeit t zurückgelegte Winkel θ ist, dann heißt θ/t die „mittlere Winkelgeschwindigkeit“ der Linie während der Zeit t. Wenn bei der Teilung von t in beliebig viele, n Teile von gleicher Größe der zurückgelegte Winkel immer in derselben Ebene und vom Betrage θ/n verbleibt, so nennt man die Winkelgeschwindigkeit gleichförmig während der Zeit t.

Wie die Geschwindigkeit des Punktes, so kann auch die Winkelgeschwindigkeit der Linie **veränderlich** sein. Wenn sie sich ändert, so nehmen wir an, daß der Betrag der Änderung in einem noch so kleinen Zeitteilchen t/n in bestimmtem Verhältnis zu dem Zeitteilchen steht, d. h. wir nehmen die Änderung der Winkelgeschwindigkeit als stetig an.

Endlich kann man noch eine dritte Art von Geschwindigkeit feststellen, die nicht selten von Interesse ist: die **Flächengeschwindigkeit**. Sie wird gemessen durch die von der Linie, die sich um einen ihrer Endpunkte dreht, in der Zeiteinheit bestrichene Fläche, also wenn die der Zeit t entsprechende Fläche F ist, durch den Bruch F/t; auch sie kann natürlich konstant oder veränderlich sein.

31. Stetigkeit der Bewegung der Linie und des Punktes. Die in den aufeinanderfolgenden kleinen Zeitteilen t/n zurückgelegten Winkel sind im allgemeinen weder gleich noch in einer Ebene. Wir schließen hier nicht nur plötzliche Änderungen im Betrage der Winkelgeschwindigkeit aus, sondern auch plötzliche Änderungen der Drehungsebene, d. h. wenn $\varphi' - \varphi$ der Winkel zwischen den Ebenen ist, in denen die Linie sich am Anfang und am Ende des Zeitteilchens t/n dreht, so hat $(\varphi' - \varphi)/(t/n)$ immer einen endlichen und bestimmten Wert.

Die Frage der veränderlichen Geschwindigkeit — gleichviel ob Linien- oder Winkelgeschwindigkeit — wird späterhin, nach Anstellung einiger weiterer allgemeiner Betrachtungen, ausführlicher besprochen werden.

Wir stellen für die Bewegung von Linie und Punkt die Bedingung, daß die Linie nicht in einem Zeitraume, während dessen die Bewegung des Punktes betrachtet wird, eine unendlich große Zahl von endlichen Richtungsänderungen erfahre. Wenn also in einem noch so kurz gewählten Zeitteile τ der Punkt einen Weg CD (Fig. 16) auf der Kurve AB beschreibt, so schließen wir solche Fälle alle aus, wie den, wo das Kurvenelement CD bei genügender Vergrößerung von der Form $C'D'$ befunden werden würde.

Fig. 16.

32. Spezielle Fälle. Einige spezielle Fälle der oben erwähnten Art, Kurven zu erzeugen, mögen hier kurz angeführt werden. Wenn

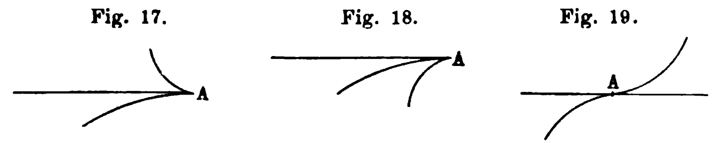


Fig. 17. Fig. 18. Fig. 19.

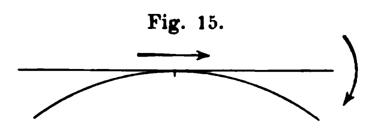
der Punkt auf der Linie bei einem Punkte A (Fig. 17) zur Ruhe kommt, und dann in entgegengesetzter Richtung wieder Geschwindigkeit annimmt, während die Linie sich in derselben Richtung wie vorher weiterdreht, so haben wir den in der Figur dargestellten Fall. Wenn die Linie ihre Winkelbewegung im selben Augenblick umkehrt, wo der

äußerster Kleinheit teilen läßt. Die praktische Definition gleicher Zeitabschnitte ist oben Kap. 1 betrachtet worden und wird weiterhin in der ausführlicheren Besprechung von „Maßen und Instrumenten“ eingehender behandelt werden.

Denken wir uns eine geometrische Kurve erzeugt durch die Bewegung eines Punktes längs einer geraden Linie, die sich um den Punkt dreht, wie in Fig. 15. Liegt die Kurve in einer Ebene, ist sie, wie man sagt, eine ebene Kurve, so liegt auch die gerade Linie immer in einer Ebene. Die gerade Linie heißt in jeder ihrer Lagen die „Tangente“ an die Kurve in dem betreffenden Punkte.

Betrachten wir zuerst die Bewegung des Punktes, dann die der Linie. Nehmen wir an, daß der Punkt in einem Zeitraume t der Kurve entlang eine Weglänge gleich s beschreibt. Dann nennen wir das Verhältnis s/t die „mittlere Geschwindigkeit“ des Punktes während der Zeit t. Ist die Bewegung eine solche, daß bei einer Teilung von t in n beliebig große gleiche Teile die von dem Punkte zurückgelegte Strecke in jedem dieser Teile denselben Wert s/n behält, so nennen wir die Geschwindigkeit des Punktes während der Zeit t eine gleichförmige.

Fig. 15.



Die Geschwindigkeit kann aber auch veränderlich sein. Wenn sie sich ändert, so nehmen wir an, daß der Betrag der Änderung, die sich in einem noch so kleinen Zeitteilchen t/n vollzieht, immer in einem bestimmten Verhältnis zu dem Zeitteilchen steht, d. h. wir nehmen die Änderung der Geschwindigkeit als „stetig“ an.

30. Winkelgeschwindigkeit. Die Bewegung der Linie in einem beliebigen Zeitraume wird durch den Winkel gemessen, um den sich die Linie in dieser Zeit gedreht hat. Dieser Winkel wird gemessen, indem man von einem Punkte, z. B. A, aus zwei den Lagen der sich drehenden Linie am Anfang und Ende des Zeitraumes parallele Linien zieht. Wenn dann ein Kreis um A als Mittelpunkt beschrieben wird, so daß er die beiden Linien schneidet, so ist der Winkel das Verhältnis der Länge des zwischen den Linien eingeschlossenen Bogens zu der Länge des Radius; oder, wenn der Radius die Länge 1 hat, ist der Winkel einfach die Bogenlänge. Der Einheitswinkel ist demnach der Winkel, bei welchem der Bogen gleich dem Radius ist (im Gradmaß $57^0\ 17'\ 45''$).

Wenn der in der Zeit t zurückgelegte Winkel θ ist, dann heißt θ/t die „mittlere Winkelgeschwindigkeit“ der Linie während der Zeit t. Wenn bei der Teilung von t in beliebig viele, n Teile von gleicher Größe der zurückgelegte Winkel immer in derselben Ebene und vom Betrage θ/n verbleibt, so nennt man die Winkelgeschwindigkeit gleichförmig während der Zeit t.

Wie die Geschwindigkeit des Punktes, so kann auch die Winkelgeschwindigkeit der Linie veränderlich sein. Wenn sie sich ändert, so nehmen wir an, daß der Betrag der Änderung in einem noch so kleinen Zeitteilchen t/n in bestimmtem Verhältnis zu dem Zeitteilchen steht, d. h. wir nehmen die Änderung der Winkelgeschwindigkeit als stetig an.

Endlich kann man noch eine dritte Art von Geschwindigkeit feststellen, die nicht selten von Interesse ist: die Flächengeschwindigkeit. Sie wird gemessen durch die von der Linie, die sich um einen ihrer Endpunkte dreht, in der Zeiteinheit bestrichene Fläche, also wenn die der Zeit t entsprechende Fläche F ist, durch den Bruch F/t; auch sie kann natürlich konstant oder veränderlich sein.

31. Stetigkeit der Bewegung der Linie und des Punktes. Die in den aufeinanderfolgenden kleinen Zeitteilen t/n zurückgelegten Winkel sind im allgemeinen weder gleich noch in einer Ebene. Wir schließen hier nicht nur plötzliche Änderungen im Betrage der Winkelgeschwindigkeit aus, sondern auch plötzliche Änderungen der Drehungsebene, d. h. wenn $\varphi' - \varphi$ der Winkel zwischen den Ebenen ist, in denen die Linie sich am Anfang und am Ende des Zeitteilchens t/n dreht, so hat $(\varphi' - \varphi)/(t/n)$ immer einen endlichen und bestimmten Wert.

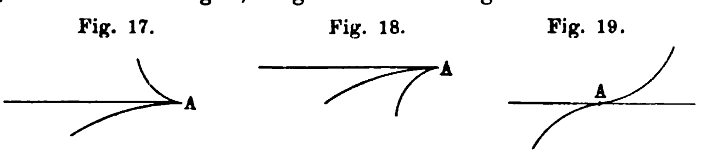
Die Frage der veränderlichen Geschwindigkeit — gleichviel ob Linien- oder Winkelgeschwindigkeit — wird späterhin, nach Anstellung einiger weiterer allgemeiner Betrachtungen, ausführlicher besprochen werden.

Wir stellen für die Bewegung von Linie und Punkt die Bedingung, daß die Linie nicht in einem Zeitraume, während dessen die Bewegung des Punktes betrachtet wird, eine unendlich große Zahl von endlichen Richtungsänderungen erfahre. Wenn also in einem noch so kurz gewählten Zeitteile τ der Punkt einen Weg CD (Fig. 16) auf der Kurve AB beschreibt, so schließen wir solche Fälle alle aus, wie den, wo das Kurvenelement CD bei genügender Vergrößerung von der Form $C'D'$ befunden werden würde.

Fig. 16.

32. Spezielle Fälle. Einige spezielle Fälle der oben erwähnten Art, Kurven zu erzeugen, mögen hier kurz angeführt werden. Wenn

Fig. 17. Fig. 18. Fig. 19.



der Punkt auf der Linie bei einem Punkte A (Fig. 17) zur Ruhe kommt, und dann in entgegengesetzter Richtung wieder Geschwindigkeit annimmt, während die Linie sich in derselben Richtung wie vorher weiterdreht, so haben wir den in der Figur dargestellten Fall. Wenn die Linie ihre Winkelbewegung im selben Augenblick umkehrt, wo der

Punkt seine lineare Bewegung beim Punkte A umkehrt, so hat die Kurve die in Fig. 18 (s. v. S.) dargestellte Form. Die Punkte A, A werden Spitzen genannt.

Wenn indessen der Punkt seine Bewegung weiter vollführt, während die Winkelbewegung der Linie bei A null wird und sich alsdann umkehrt, so haben wir den in Fig. 19 aufgezeichneten Fall, wo A ein sogenannter Inflexionspunkt ist.

33. Vektorgeschwindigkeit. Ehe wir die veränderliche Geschwindigkeit näher erörtern, wollen wir eine Vervollständigung des Begriffes Geschwindigkeit selbst vornehmen. Die Geschwindigkeit eines Punktes ist nämlich oben zunächst nur als Zahlengröße definiert worden. Wir betrachten jetzt die Geschwindigkeit eines sich bewegenden Punktes im vollständigeren oder Vektorsinne. Dieser Begriff ist weitergehend als der der einfachen Geschwindigkeit, insofern er nicht nur die Größe, sondern auch die Richtung der Bewegung einschließt. In dem oben Festgestellten haben wir den Fall eines plötzlichen Richtungswechsels der Bewegung ausgeschlossen, d. h. die Linie, längs deren der Punkt sich bewegt, soll nicht (ausgenommen einige spezielle Fälle, von denen die Rede sein wird, wenn sie sich darbieten werden) eine endliche Richtungsänderung in einer — für praktisch-dynamische Zwecke unendlich kurzen — Zeit erfahren.

Eine Vektorgeschwindigkeit hat also in jedem Augenblicke einen bestimmt gerichteten Wert; wie dieser Wert und seine Änderungen zu berechnen sind, das sind Fragen, zu deren Behandlung wir jetzt übergehen wollen. Unter dem Ausdrucke Geschwindigkeit soll im folgenden immer die Vektorgeschwindigkeit verstanden sein. Übrigens ist es einleuchtend, daß, wie die Strecken-, so auch die Winkelgeschwindigkeit vom Vektorcharakter ist; denn sie erfolgt um eine bestimmte Axe (Linie, die auf der von der rotierenden Linie überstrichenen Fläche senkrecht steht), und diese Axe hat eine bestimmte Richtung im Raume.

Gehen wir nun näher auf das Wesen der Geschwindigkeit ein! Bei veränderlicher Geschwindigkeit wird, ebenso wie bei der gleichförmigen, der Zahlenwert des Verrückungsverhältnisses nach der Zahl der in der Zeiteinheit zurückgelegten Entfernungseinheiten berechnet. Diese Zeiteinheit kann beliebig sein — ein Jahr, eine Stunde, eine Minute, eine Sekunde oder ein Bruchteil einer Sekunde. Man kann demnach die Geschwindigkeit eines Punktes ebenso gut durch die Angabe von 600 m in der Minute wie von 10 m in der Sekunde, wie von 1 m in $^1/_{10}$ Sekunde ausdrücken; und diese Geschwindigkeit eignet dem Punkte nur gerade in einem einzigen Augenblicke und kann von ihm für kein noch so kleines Zeitteilchen ungeändert festgehalten werden. So ist die Geschwindigkeit eines unter der Wirkung der Schwerkraft an einem bestimmten Orte aus der Ruhelage frei fallenden Körpers 9,81 m pro Sekunde in dem Augenblicke, wo die erste Fall-

sekunde endet und die zweite beginnt, 19,62 m pro Sekunde am Ende der zweiten und Anfang der dritten Fallsekunde u. s. w., während der Körper keine der nacheinander von ihm erreichten Geschwindigkeiten für irgend einen — noch so kurzen — Zeitraum beibehält.

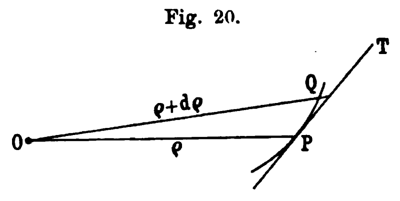
34. Definition des Maßes der ungleichförmigen Geschwindigkeit. Um eine gleichförmige Geschwindigkeit für einen bestimmten Augenblick festzustellen, gehen wir folgendermaßen vor: Es wird ein Zeitraum gewählt, der den in Frage stehenden Augenblick in sich schließt; die von dem Körper in diesem Zeitraume zurückgelegte Strecke wird als gemessen vorausgesetzt; sie sei durch s Längeneinheiten ausgedrückt. Wenn dann t der Zeitraum, in einer gewählten Einheit ausgedrückt, ist, so ist s/t der zahlenmäßige Ausdruck für die mittlere Geschwindigkeit während des Zeitraumes. Nun lassen wir den Zeitraum kleiner und kleiner werden, aber immer noch so, daß er den fraglichen Augenblick einschließt, dann wird, wenn die Geschwindigkeit sich stetig ändert, das Verhältnis s/t, wenn t kleiner und kleiner wird, sich einem Grenzwert $\frac{ds}{dt}$ nähern, den wir als den der Geschwindigkeit in diesem Augenblicke definieren. Die Bewegungsrichtung in diesem Grenzfalle ist diejenige der durch s ausgedrückten Strecke. Somit ist die Geschwindigkeit vollständig definiert.

Die Rechtfertigung dieses Vorgehens liegt darin, daß wir von vornherein die Vorstellung haben, es müsse, wenn die Bewegung stetig ist, in jedem Augenblicke ein wirkliches Verrückungsverhältnis vorhanden sein, und alles, was hier geschehen ist, hat nur den Sinn, diese Vorstellung zu präzisieren. Daß die Idee der Stetigkeit der Bewegung die Vorstellung eines wirklichen Verrückungsverhältnisses in jedem Augenblicke einschließt, kann man aus dem folgenden Beispiele ersehen. Zwei Eisenbahnzüge sollen auf parallelen Schienen in gleicher Richtung laufen, der eine mit gleich bleibender Geschwindigkeit, der andere von anfänglicher Ruhe aus mit wachsender Geschwindigkeit. Stellen wir uns die Züge so lang vor, daß ein Fahrgast im zweiten Zuge während der Dauer seiner Beobachtung den sich gleichförmig fortbewegenden Zug sich gegenüber hat. Wenn er seine Aufmerksamkeit auf den Wagen gegenüber richtet, so daß er die Wahrnehmung seiner eigenen Bewegung verliert, wird er zunächst nur dessen inne werden, daß der andere Wagen in der Richtung, in der beide Züge sich tatsächlich bewegen, an ihm vorbeifährt. In dem Maße indessen, wie sein eigener Zug an Geschwindigkeit zunimmt, wird diese relative Bewegung zunächst allmählich null werden, ja, bald danach werden sich für ihn die Wagen des sich gleichförmig fortbewegenden Zuges sogar scheinbar rückwärts bewegen. Es gab keine, noch so kurze Übergangs-„Zeit“, sondern in einem Augenblicke, dem Trennungspunkte zweier Zeiträume, waren die beiden Züge relativ in Ruhe. Die Geschwindigkeit des

Zuges mit zunehmender Bewegung war in diesem Augenblicke genau die gleiche wie die des Zuges mit gleichförmiger Bewegung; da die letztere vollständig bestimmt ist und beliebig sein kann, ist die Geschwindigkeit im anderen Falle vollständig definiert für jeden Augenblick, vorausgesetzt, daß die Bewegung stetig ist.

35. Zuwachsgrad einer Strecke. P (Fig. 20) sei die Lage eines Teilchens in irgend einem Augenblicke, und seine Bewegungsrichtung in diesem Augenblicke sei PT. In einer Zeit dt möge sich das Teilchen nach Maßgabe der Bewegung, die es bei P hat, nach Q bewegt haben, dann ist die Sehne PQ der Betrag, der zu der Strecke OP addiert werden muß, um (im Vektorsinne) OQ zu ergeben; wir nennen ihn $d\varrho$. In dem Maße, wie dt kleiner und kleiner wird, nähern sich Sehne, Bogen und Tangente mehr und mehr der Koinzidenz bei P. Wenn also dt unendlich klein gewählt wird, so stellt $d\varrho/dt$ die Geschwindigkeit in P nach Größe und Richtung dar. Sie ist der Grenzwert, dem sich das Verhältnis der geometrisch genommenen Strecke zur Zeit nähert, wenn diese Zeit kleiner und kleiner gewählt wird.

Fig. 20.



Der Unterschied zwischen $d\varrho/dt$ und ds/dt ist, daß das erstere das Zuwachsverhältnis der Strecke, d. h. Verrückung einschließlich Richtung, das letztere gewöhnlich nur die zahlenmäßige Geschwindigkeit bezeichnet.

Die Größe ds/dt bezw. $d\varrho/dt$ wollen wir die zeitlichen Änderungsgrade von s bezw. ϱ nennen und entsprechend auch bei anderen Größen verfahren. Um im Texte bequemer schreiben zu können, werden wir den zeitlichen Änderungsgrad einer Größe häufig durch einen Punkt darüber bezeichnen, d. h.:

$$\dot{s} \text{ statt } \frac{ds}{dt}, \quad \dot{\varrho} \text{ statt } \frac{d\varrho}{dt} \text{ u. s. w.}$$

schreiben.

36. Spezifikation der Geschwindigkeit. Es ist zu bemerken, daß, während wir behufs Definition der Geschwindigkeit eines Teilchens in einem bestimmten Augenblicke bis auf ein unendlich kleines Zeitteilchen zurückgehen müssen, wir deshalb noch keineswegs gezwungen sind, bei zahlenmäßigen Angaben die Geschwindigkeit gerade immer als das Verhältnis einer äußerst kleinen Strecke zu der äußerst kleinen Zeit, in der sie zurückgelegt wurde, zu messen; das bei einer solchen Spezifikation benutzte Zeitintervall kann vielmehr von beliebiger Größe sein. In dem Ausdrucke ds/dt für die Geschwindigkeit v kann z. B. der Nenner dt von beliebiger Größe gewählt werden, und es ist alsdann ds die durch die Gleichung $ds = v\,dt$ definierte Strecke. Der hiermit

verknüpfte Sinn ist einfach der, daß die Schnelligkeit der Ortsänderung derart ist, daß, wenn sie während des Zeitraumes dt unverändert fortbestände, in dieser Zeit die Strecke ds zurückgelegt werden würde.

37. Veränderliche Winkelgeschwindigkeit; Krümmung. Die obige Definition der ungleichförmigen oder veränderlichen Geschwindigkeit ist, mutatis mutandis, auch auf veränderliche Winkelgeschwindigkeit anwendbar. Die Drehbewegung der Linie, durch welche die Richtungsänderung der Bewegung eines Punktes in einer Kurve definiert ist, nehmen wir als stetig vor sich gehende Veränderung an, so daß das Verhältnis des zurückgelegten Winkels für jeden Augenblick vollständig definiert ist.

Entsprechend der früheren Festsetzung werden wir die Winkelgeschwindigkeit manchmal durch das Zeichen $\dot{\theta}$ ausdrücken, wo θ den im Augenblick in Betracht stehenden Winkel zwischen der Linie und einer festen Richtung in der Ebene, in welcher die Linie sich gerade dreht, bezeichnet.

Das Verhältnis $\dot{\theta}/\dot{s}$ des Wertes von $\dot{\theta}$, in irgend einem Augenblicke zu dem von $\dot{s}$ in demselben Augenblicke wird die Krümmung der Kurve an der Stelle des bewegten Punktes genannt. Dies ist offenbar der Grenzwert des Verhältnisses des Winkels zwischen den Tangenten an den Enden eines Elementes ds der Kurve (Fig. 21) zu der Länge dieses Elementes, wenn es unendlich verkleinert wird.

Fig. 21.

Das Reziproke $\dot{s}/\dot{\theta}$ dieses Verhältnisses wird der Krümmungsradius der Kurve in demselben Punkte genannt. Diesen Radius denken wir uns vom Berührungspunkte aus senkrecht zur Richtung der Tangente, in ihrer Drehungsebene und nach der konkaven Seite der Kurve gezogen. Alsdann ist in Fig. 21 C, der Schnittpunkt der von P und Q aus in der Ebene der Tangenten an diese Punkte und senkrecht zu ihnen gezogenen Linien annähernd der Mittelpunkt der Krümmung für P oder Q, wenn das mit ds bezeichnete Bogenelement PQ klein ist.

Für den Kreis ist $\dot{\theta}/\dot{s} = 1/r$, so daß der Kreismittelpunkt zugleich der Mittelpunkt der Krümmung für jedes Element ist. Dann können wir für ein Element ds einer beliebigen Kurve C als Mittelpunkt eines Kreises betrachten, von dem ein Element mit ds zusammenfällt und für den das Verhältnis des Drehungsgrades der Tangente zu dem Verrückungsgrade des Berührungspunktes längs des Kreises dasselbe ist, wie in der Kurve beim Elemente ds. Dieser Kreis heißt der Krümmungskreis der Kurve in dem betreffenden Punkte.

38. Beispiele veränderlicher Geschwindigkeit. Um das hier Gesagte näher zu erläutern, setzen wir den Fall, daß durch Beobach-

tung gefunden wird, die von einem bewegten Teilchen in einer beliebigen Zeit t beschriebene Strecke s sei durch die Gleichung

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

ausgedrückt, wo v_0 und a Konstanten sind. In dem unmittelbar nächsten Zeitraume τ sei die beschriebene Strecke, sagen wir σ, durch

$$\begin{aligned}\sigma &= v_0 (t + \tau) + \tfrac{1}{2} a (t + \tau)^2 - v_0 t - \tfrac{1}{2} a t^2 \\ &= v_0 \tau + \tfrac{1}{2} a (2 t \tau + \tau^2)\end{aligned}$$

gegeben, welches zwischen $(v_0 + at)\tau$ und $[v_0 + a(t + \tau)]\tau$ liegt. Wenn a positiv ist, wird σ größer sein als der erste dieser Werte und kleiner als der zweite und umgekehrt, wenn a negativ ist. Wenn nun τ kleiner und kleiner wird, so wird die Differenz dieser Werte, $a\tau^2$, kleiner und kleiner im Vergleich mit beiden, d. h. die Verhältnisse

$$\frac{\tfrac{1}{2} a \tau^2}{(v_0 + at)\tau} \quad \text{und} \quad \frac{\tfrac{1}{2} a \tau^2}{[v_0 + a(t + \tau)\tau]}$$

nähern sich mehr und mehr demselben Grenzwert, so daß

$$Limes\ \frac{\sigma}{\tau} = v_0 + at$$

die Geschwindigkeit zur Zeit t ist und im Verhältnis von a gleichförmig wächst.

Für irgend einen wirklichen Zeitraum τ stellt die Länge $\frac{1}{2} a \tau^2$ die infolge der Geschwindigkeitsänderung während dieses Zeitraumes zurückgelegte Entfernung vor. Wenn sich das Teilchen während des ganzen Zeitraumes τ 1. mit seiner Anfangsgeschwindigkeit, nämlich $v_0 + at$, 2. mit seiner Endgeschwindigkeit, nämlich $v_0 + a(t + \tau)$ fortbewegte, so wären die zurückgelegten Strecken $(v_0 + at)\tau$ bezw. $[v_0 + a(t + \tau)]\tau$. Der wahre Wert liegt zwischen diesen Grenzen, und im Vergleich mit ihm wird die Differenz $a\tau^2$ (welche das Doppelte der eben betrachteten Einzelstrecke vorstellt) mit abnehmendem τ kleiner und kleiner.

39. Berechnung von Geschwindigkeiten. Im allgemeinen möge die von einem irgendwie gewählten Zeitpunkte als Rechnungsanfang aus in der Zeit t zurückgelegte Strecke durch $f(t)$:

$$s = f(t)$$

bezeichnet werden, d. h. durch einen gewissen algebraischen Ausdruck, der t und konstante Größen einschließt. Dann wird die in der Zeit τ beschriebenene Strecke σ genau ausgedrückt sein durch die Gleichung

$$\sigma = f(t + \tau) - f(t),$$

da aus t nach dem weiteren Verlaufe von τ jetzt $t + \tau$ geworden ist, und die vom Rechnungsanfang aus beschriebene Strecke $f(t + \tau)$ geworden ist.

Dies sei nun ausdrückbar durch die Gleichung

$$\sigma = [f'(t) + \varepsilon]\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

wo $f'(t)$ eine andere Funktion von t ist. Dann wird, wenn mit kleiner und kleiner werdendem τ auch ε kleiner und kleiner wird und schließlich verschwindet, wenn τ Null wird,

$$L\frac{\sigma}{\tau} = f'(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

wo $L\frac{\sigma}{\tau}$ den Grenzwert (*Limes*) bezeichnet, dem σ/τ sich nähert, wenn τ stetig kleiner wird.

Wenn wir beliebige Werte ds, dt von σ und τ nehmen, die die Gleichung

$$\frac{ds}{dt} = f'(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

erfüllen, dann ist der Zahlenwert des Verhältnisses ds/dt der der Geschwindigkeit zur Zeit t. Wie oben gesagt wurde, ist es tunlich, sich den Zeitraum dt von beliebiger Größe — gleichviel ob eine endliche oder eine als infinitesimal betrachtete — zu denken, wenn nur ds den entsprechenden, in der Gleichung $ds = f'(t)\,dt$ gegebenen Wert hat, wo $f'(t)$ der Grenzwert des Verhältnisses $\delta s/\delta t$ ist, wenn δt zum Verschwinden gebracht wird. Im allgemeinen werden indessen ds und dt, wenn sie als wirkliche Größen betrachtet werden, z. B. bei der Integration, als unendlich kleine Größen gedacht, die die soeben aufgestellte Beziehung erfüllen.

Es sei hier bemerkt, daß, wenn die Beziehung zwischen der in einer gegebenen Zeit zurückgelegten Entfernung und der Zeit bekannt ist, die Geschwindigkeit in jedem Augenblick sofort berechnet werden kann mit Hilfe der für die algebraischen Funktionen festgestellten Regeln. Diese Regeln sind tatsächlich die der sogenannten Differentiation der Funktionen; Theorie und Anwendung der Differentiationsprozesse bilden die sogenannte Differentialrechnung. Der Grundbegriff dieser Rechnung ist indessen ganz einfach der der verhältnismäßigen Änderung, den wir in Verbindung mit dem Begriff der Geschwindigkeit zu erklären uns bemüht haben; $f'(t)$ heißt bekanntlich die Ableitung oder der Differentialquotient von $f(t)$. Der Leser mag sich mit Nutzen üben, den Wert der Geschwindigkeit aufzufinden, wenn s als einfache Funktion von t gegeben ist.

Der einfachste Fall ist derjenige, in welchem die Beziehung $s = vt + c$ gilt, wo v und c Konstanten sind. In diesem Falle ist die Geschwindigkeit $f'(t)$ die Konstante v, und die Entfernung s wächst im einfachen Verhältnis zur Zeit. Aber im allgemeinen Falle, wenn $s = f(t)$ ist, ist der Wert, den $f'(t)$ für irgend einen bestimmten Wert von t hat, die Geschwindigkeit für diesen Augenblick in genau demselben Sinne, in welchem v hier die Geschwindigkeit für jeden Augenblick ist.

Ein sehr wichtiger Fall ist der eines sich geradlinig derart fortbewegenden Teilchens, daß seine Entfernung s von einem festen Punkte a in der Linie durch die Gleichung

$$s = a \cos nt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

gegeben ist, wo a und n Konstanten sind. Lassen wir t irgend einen Zuwachs, z. B. δt, erfahren und nehmen wir δs als den entsprechenden Zuwachs von s an, so haben wir

$$s + \delta s = a \cos n(t + \delta t);$$

und folglich:

$$\delta s = a \cos n(t + \delta t) - a \cos nt = -2a \sin n(t + \tfrac{1}{2}\delta t) \sin \tfrac{1}{2} n \delta t.$$

Daher ist:

$$\frac{\delta s}{\delta t} = -2a \sin n(t + \tfrac{1}{2}\delta t) \sin(\tfrac{1}{2} n \delta t) \frac{1}{\delta t}.$$

Wenn aber δt sich mehr und mehr null nähert, so nähert sich $\sin(\frac{1}{2} n \delta t)/\delta t$ mehr und mehr dem Grenzwerte $\frac{1}{2} n$, so daß der Grenzwert des Verhältnisses $\delta s/\delta t$, den wir wie bisher mit ds/dt bezeichnen, durch die Gleichung

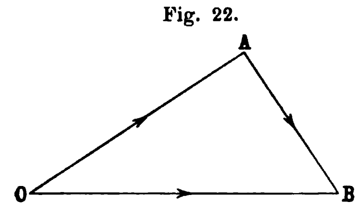
$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = -an \sin nt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

gegeben ist.

40. Graphische Darstellung der Geschwindigkeit. Es ist einleuchtend, daß eine Geschwindigkeit, da sie eine in der Zeiteinheit ausgeführte Verrückung ist, durch eine in der Bewegungsrichtung gezogene, aus so vielen Längeneinheiten, als Geschwindigkeitseinheiten vorhanden sind, bestehende gerade Linie dargestellt werden kann. Die Längeneinheit kann natürlich beliebig gewählt werden; das wesentliche ist nur, daß, wenn in einer Zeichnung verschiedene Geschwindigkeiten dargestellt werden, dieselbe Einheit für alle zur Anwendung kommen muß. Die oben gegebene Erläuterung der Zusammensetzung und Auflösung der Strecken ist in allen ihren Prozessen und Ergebnissen direkt anwendbar auf die Geschwindigkeit.

OA (Fig. 22) möge die Geschwindigkeit eines Teilchens in einem bestimmten Augenblicke darstellen. Es ist so zu verstehen, daß die Bewegung in einer zur Richtung OA parallelen Richtung erfolgt, und daß ihre Größe gleich der Anzahl von Malen ist, die die gewählte Längeneinheit in der Länge OA enthalten ist. Im nächsten Augenblick möge die Geschwindigkeit durch OB dargestellt sein, wo im allgemeinen Falle OB nicht nur in der Richtung, sondern auch in der Länge von OA verschieden ist. Die Geschwindigkeit OB ist offenbar den beiden

Fig. 22.

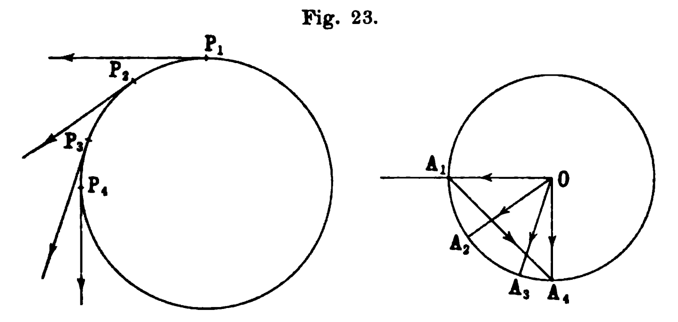


Geschwindigkeiten OA und AB äquivalent. Von diesen ist OA die zuerst vorhanden gewesene Geschwindigkeit, AB ist, wie auch immer die Art der Veränderung sein möge, die Resultante der Änderungen in der Zeit. So ist also AB, da es mit OA verbunden OB ergibt, im ganz eigentlichen Sinne die in dem Zeitraume stattgehabte Geschwindigkeitsänderung.

Der Leser möge einen Fall betrachten, in dem OA und OB von gleicher Länge sind, und Richtung und Betrag von AB in solchem Falle verzeichnen. Offenbar wird, wenn die Richtungsänderung θ ist, die Länge von AB jetzt $2v \sin \theta/2$, wenn v die Länge von OA bezeichnet. Demnach ist die Änderung der Geschwindigkeit v in derjenigen Zeit, in welcher sich die Bewegungsrichtung um den Winkel θ dreht, eine Geschwindigkeit $2v \sin\theta/2$, um einen Winkel $\pi/2 + \theta/2$ (den Supplementwinkel von OAB) zu der positiven Richtung der Anfangsgeschwindigkeit geneigt. Die resultierende Geschwindigkeit OB ist unverändert im Betrage, aber trotzdem eine von OA sehr verschiedene Geschwindigkeit.

41. Beispiel: Auf kreisförmiger Bahn fortschreitendes Teilchen. Nehmen wir jetzt den Fall eines mit gleichförmiger Ge-

Fig. 23.



schwindigkeit in einem Kreise fortschreitenden Teilchens; ziehen wir von einem beliebigen Punkte O Linien OA_1, OA_2, $OA_3 \ldots$ in der Richtung der Geschwindigkeiten in den aufeinanderfolgenden Punkten $P_1, P_2, P_3 \ldots$ des Kreises, alle von derselben, die Geschwindigkeit des Teilchens ausdrückenden Länge. Die Endpunkte A_1, A_2, A_3 liegen in einer Kreislinie. Die Sehnen A_1A_2, $A_2A_3 \ldots$ stellen die Änderungen der Geschwindigkeit in der Folge der Zeitteile der Reihe nach dar.

Für den Zeitraum einer viertel Periode der Umdrehung des Punktes um die Kreisbahn, wie von P_1 zu P_4, ändert die Geschwindigkeit ihre Richtung um ein Viertel des Umlaufs von OA_1 auf OA_4. Die Anfangsgeschwindigkeit OA_1 hat einen Zuwachs A_1A_4 erhalten vom Betrage $2v \sin 45^0$, in einem Winkel von 135^0 gegen die positiven Richtungen der Anfangs- und Endgeschwindigkeiten geneigt, wie es aus der rechtsseitigen Zeichnung der Fig. 23 ersichtlich ist.

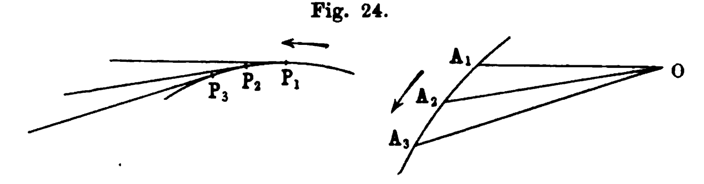
Nach dem Verlaufe einer halben Umdrehungsperiode hat die Geschwindigkeit ihre Richtung umgekehrt, d. h. in dieser Zeit ist eine Geschwindigkeit $2v$ in der der Anfangsgeschwindigkeit entgegengesetzten Richtung erzeugt worden.

Ist t irgend ein Zeitintervall und T die Umdrehungsdauer, so ist der von der Bewegungsrichtung beschriebene Winkel $2\pi t/T$, und die Geschwindigkeitsänderung gleich $v \cdot 2 \sin(\pi t/T)$, oder für sehr kleines t gleich $v . 2\pi t/T$, also, da $2\pi/T = v/r$ ist, gleich $v^2 t/r$. Der zeitliche Änderungsgrad ist also v^2/r, und zwar in der Richtung nach dem Mittelpunkte der Kreisbahn.

Diese Beispiele mögen dazu beitragen, die übliche Vorstellung des Anfängers in der Dynamik zu korrigieren, nämlich daß die Vektorgeschwindigkeit eines Teilchens, das in gleichförmiger Bewegung auf einem Kreise fortschreitet, keine Veränderung erleide.

42. Hodograph. Wenn ein Teilchen sich auf irgend einer Bahn — ebener Kurve oder Raumkurve — bewegt, und $P_1, P_2 \ldots$ (Fig. 24) auf-

Fig. 24.



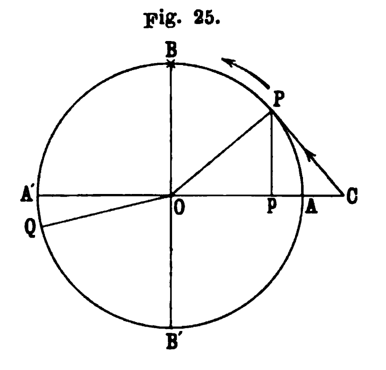
einanderfolgende Lagen des Teilchens sind, und Linien OA_1, $OA_2 \ldots$ von einem gewählten Punkte O aus, in geeigneter Richtung und von geeigneter Länge, um die Geschwindigkeiten bei P_1, $P_2 \ldots$ darzustellen, gezogen werden, so werden die Punkte A_1, $A_2 \ldots$, wenn die Bewegung sich stetig ändert, auf einer Kurve von stetiger Krümmung liegen, die vollkommen charakterisiert ist, wenn die Bewegung auf der Bahn bekannt ist. Diese Kurve wird der Hodograph der Bewegung des Teilchens genannt und ist von großer Wichtigkeit in der Lehre von der Kinematik eines Teilchens[1]). Beispiele für seinen Gebrauch werden später, nach Einführung des Begriffs der Beschleunigung, gegeben werden.

43. Einfache harmonische Bewegung. Wenn wir jetzt zu dem Beispiele von § 39 zurückkehren, für welches Gl. (23) die Verrückung ergibt, so mögen AA', BB' zueinander senkrechte Durchmesser eines Kreises vom Radius a und Mittelpunkte O sein; P sei ein Punkt auf der Peripherie, der sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der

[1]) Der Name stammt von Sir William Rowan Hamilton, der den Hodograph besonders in der Lehre von der elliptischen Bewegung mit großem Nutzen verwandt hat. Er war aber schon vorher von Möbius (Mechanik des Himmels, § 22, 1843) erfunden und angewandt worden.

Richtung des Pfeiles auf dem Kreise herumbewegt; p sei der Fußpunkt des vom Punkte P auf den Durchmesser AA' gefällten Lotes. Wenn nun P von A nach B fortschreitet, bewegt sich p von A nach O; wenn P von B durch A' nach B' fortschreitet, bewegt sich p längs dem Durchmesser nach A' und zurück nach O; und wenn P von B' nach A zurückkehrt, bewegt sich p von O nach A. Es muß auch beachtet werden, daß die Geschwindigkeit von P als aus zwei verschiedenartigen Geschwindigkeiten zusammengesetzt angesehen werden kann, einer dem Radius OA parallelen und einer zu OA senkrechten. Die erstere hiervon ist diejenige Geschwindigkeit, mit welcher die Linie pP senkrecht zu ihrer eigenen Lage fortschreitet, die zweite diejenige, bei welcher pP kürzer oder länger wird. So ist z. B. für die in Fig. 25 dargestellte Lage von P eine der Geschwindigkeiten von A nach O, die andere von p nach P gerichtet. Die erstere ist die Geschwindigkeit der Linie pP von A nach O, die andere ist der Geschwindigkeitsgrad, in dem pP sich verlängert, d. h. in dem P sich von der Linie AA' entfernt.

Fig. 25.



Es möge nun in Fig. 25 CP, welches, wenn der Punkt bei P ist, in seiner Bewegungsrichtung auf dem Kreise liegt, die Geschwindigkeit von P, nämlich v, in einem bestimmten Maße darstellen, dann wird Cp in demselben Maße die Geschwindigkeit von p darstellen. Nun haben wir aber (wobei es sich im folgenden nur um Zahlengrößen handelt) $Cp = CP \sin pPC = CP \sin pOP$. Wenn a die Länge des Kreisradius ist und ω die Winkelgeschwindigkeit des Radius OP (welches auch, wie zu bemerken ist, die Winkelgeschwindigkeit der sich drehenden Linie CP, längs deren der Punkt P fortschreitet, ist), so ist die Länge von CP, d. h. die Größe von v, $a\omega$. Auch ist der Winkel pOP der seit dem Augenblicke, in dem P bei A lag, zurückgelegte Winkel. Wenn wir diesen Augenblick als Nullpunkt der Rechnung für t nehmen, dann ist $\angle\, pOP = \omega t$.

$$\frac{ds}{dt} = -a\omega \sin \omega t.$$

Dies ist genau dasselbe, wie der in Gl. (24) (§ 39) gegebene Ausdruck, wenn wir $\omega = n$ setzen. Somit haben wir die Erklärung von n als der Winkelgeschwindigkeit derjenigen Kreisbewegung, durch welche die Bewegung von p definiert wird. Der in Gl. (23) gegebene Wert von s ist die Linie Op der Fig. 25, die offenbar $a \cos pOP$ ist. Man hat hiernach die Formeln für Ort und Geschwindigkeit von p

$$\left.\begin{aligned} s &= a \cos nt \\ \frac{ds}{dt} &= -\, an \sin nt \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Die hiermit definierte Bewegung von p ist von großer Wichtigkeit und wird einfache harmonische Bewegung, einfache Schwingung, pendelartige Schwingung oder Kosinusschwingung genannt. Die Zeit, die der Punkt P braucht, um sich einmal um den Hilfskreis herum zu bewegen, wird die Periode der Bewegung genannt; offenbar ist ihr Wert $2\pi/n$; er wird gewöhnlich mit T bezeichnet. Das reziproke $1/T$ der Periode, also die Zahl der Perioden in der Sekunde, wird die Frequenz oder Schwingungszahl f in der Bewegung genannt. Es ist also:

$$T = \frac{2\pi}{n}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{n}{2\pi}.$$

Wenn wir als Nullpunkt der Zeitrechnung statt des Augenblickes, in dem P bei A ist (Fig. 25), den Augenblick wählen, in dem P an einem anderen Punkte, z. B. bei Q ist, dann ist der Winkel POQ jetzt ωt. Wenn wir AOQ durch ε bezeichnen, so haben wir $pOP = \omega t - \varepsilon$, und die Gleichungen für s und $\dot{s}$ werden jetzt, wenn wieder ω durch n ersetzt wird:

und

$$\left.\begin{aligned} s &= a \cos (nt - \varepsilon) \\ \frac{ds}{dt} &= -\, na \sin (nt - \varepsilon) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

Der Winkel ε heißt die Epoche oder Phase der Bewegung; in Zeit gemessen ist sie gleich ε/ω. Der Abstand OA, d. h. a, endlich heißt die Amplitude der Schwingung.

Statt des $\cos$ kann man für s natürlich auch den $\sin$ wählen, was offenbar nur eine Phasendifferenz von $\pi/2$ ausmacht.

Formeln:

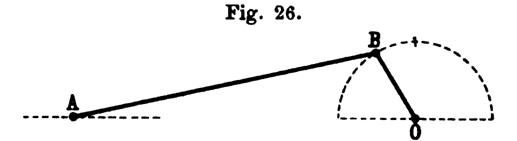
$$\left.\begin{aligned} s &= a \sin (nt - \varepsilon) \\ \frac{ds}{dt} &= na \cos (nt - \varepsilon) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Es ist dies sogar das übliche, und man nennt daher diese Bewegungen allgemein Sinusschwingungen.

44. Erzeugungsarten einfacher harmonischer Bewegung. Man kann die einfache harmonische Bewegung auf verschiedene Weise hervorrufen. Die Hin- und Herbewegung des Schraubenkopfes an der Verbindung der Kolbenstange einer Dampfmaschine mit der Verbindungsstange ist annähernd einfach harmonisch, wenn sich die Kurbel mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit dreht; dies ist annähernd der Fall, wenn die Geschwindigkeit der Maschine während des Hubes durch ein Schwungrad reguliert wird. Die Bewegung würde genau einfach harmonisch sein, wenn der Verbindungsstab unendlich lang wäre. Die

Anordnung kann man aus Fig. 26 ersehen, worin der Radius OB als mit gleichförmiger Geschwindigkeit rotierend angenommen wird, während das Ende A der Stange AB sich geradlinig bewegt. Der Punkt A

Fig. 26.



würde genaue Sinusschwingungen ausführen, wenn AB unendlich lang wäre; in Wahrheit kommt die veränderliche Neigung von AB zu der Linie, in der A sich bewegt, in Betracht. Ist nämlich $AB = l$, $OB = a$, die veränderliche Länge von AO gleich x und der ebenfalls veränderliche Winkel $AOB = \theta$, so ist $l^2 = x^2 + a^2 - 2xa\cos\theta$, also:

$$x\frac{dx}{dt} - a\cos\theta\frac{dx}{dt} + ax\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

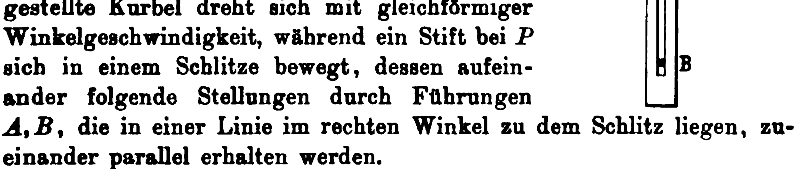
Hieraus ergibt sich:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-a\sin\theta}{1 - \frac{a}{x}\cos\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt};$$

und dieses liefert, wenn $d\theta/dt$ konstant ist, für A nur dann eine genaue Sinusschwingung, wenn a gegen x zu vernachlässigen ist; denn dann wird

$$\frac{dx}{dt} = -a\frac{d\theta}{dt}\cdot\sin\theta.$$

Fig. 27.



Eine Anordnung, die genau eine einfache harmonische Bewegung gibt, ist aus Fig. 27 ersichtlich. Eine durch den Radius OP dargestellte Kurbel dreht sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit, während ein Stift bei P sich in einem Schlitze bewegt, dessen aufeinander folgende Stellungen durch Führungen A, B, die in einer Linie im rechten Winkel zu dem Schlitz liegen, zueinander parallel erhalten werden.

Die Auf- und Abbewegung eines an einer Spiralfeder, die über ihre Gleichgewichtslage hinaus gedehnt und dann sich selbst überlassen wurde, aufgehängten Gewichtes ist sehr annähernd, wenn nicht vollkommen einfache harmonische Bewegung; ebenso die Vor- und Rückwärtsbewegung der Zinken einer vibrierenden Stimmgabel.

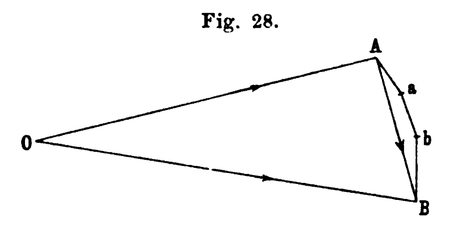
45. Auflösung einer beliebigen periodischen Bewegung in einfache Schwingungen. Es wird später gezeigt werden, daß jede

periodische Bewegung in einfache harmonische Bewegungen von verschiedenen, aber miteinander gesetzmäßig verknüpften Perioden, Phasen und Amplituden aufgelöst werden kann. Auf dieser Tatsache beruht u. a. die Theorie der musikalischen Töne und ihre Analyse durch das Ohr und durch Resonatoren und die Zurückführung der wechselnden Fluthöhe auf die Rollen, die die verschiedenen fluterzeugenden Elemente der Wirkung von Sonne und Mond dabei spielen.

46. Beschleunigung. Wir kommen jetzt zur näheren Betrachtung der Geschwindigkeitsänderung und Beschleunigung. Zunächst ist es notwendig, zu unterscheiden zwischen der Änderung, die die Geschwindigkeit in einer gegebenen Zeit erleidet, und dem Maße, nach dem sie sich in einem gegebenen Augenblicke ändert. Diese Unterscheidung ist wichtig und muß von Anfang an genau verstanden werden.

Wenn die Geschwindigkeit eines Teilchens in einem gegebenen Augenblicke durch OA und nach Verlauf einer gewissen Zeit durch OB dargestellt wird, dann wird, wie wir oben erklärt haben, die in dieser Zeit stattgehabte Änderung der Geschwindigkeit durch AB dargestellt. Die Änderung kann offenbar in irgend einer Reihe von Strecken, Aa, ab, bB (Fig. 28) vor sich gegangen sein, die Resultante oder Gesamtänderung ist immer AB. Wenn τ die Zeit ist, in der AB sich gebildet hat, so definieren wir das Verhältnis AB/τ als mittlere Beschleunigung während der betreffenden Zeit.

Fig. 28.



Es muß bemerkt werden, daß dieses Verhältnis ebenso wie dasjenige, durch welches oben die Vektorgeschwindigkeit definiert wurde, über die gewöhnliche arithmetische Bedeutung eines Verhältnisses hinausgeht, insofern die durch es bezeichnete Größe eine Richtung, nämlich die Richtung AB hat; mit anderen Worten: auch die Beschleunigung ist eine Vektorgröße.

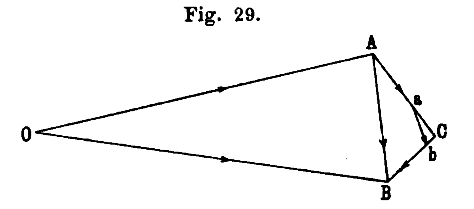
Wir wollen jetzt annehmen, daß die Geschwindigkeit sich stetig ändert, daß sie weder hinsichtlich der Richtung noch des Betrages einen plötzlichen Wechsel erleidet. Die in irgend einem Zeitraume stattgehabte Änderung ist alsdann vollkommen bestimmt. Damit ist angenommen, daß in jedem Zeitmoment das Maß der Drehung der oben (§ 29) spezifizierten Linie, längs deren das Teilchen immerwährend fortschreitend gedacht wird, sowie das Maß der Bewegung des Teilchens längs ihr, beide ganz bestimmt sind und sich stetig ändern.

47. Definition des Maßes der Beschleunigung. Um alsdann die Beschleunigung in einem gegebenen Augenblicke zu definieren, wählen

wir eine diesen Augenblick einschließende Zeit τ, und nehmen an, wir könnten AB/τ für diese Zeit beliebig nahe an eine bestimmte Grenze bringen, indem wir τ genügend dem Werte null nähern; dieser Grenzwert ist die Beschleunigung in diesem Augenblicke.

Diese Definition geht von der Annahme aus, daß ein solcher Grenzwert existiert, und es ist wesentlich, diese Annahme zu erwähnen. Denn denken wir uns während eines gewissen Zeitraumes die Geschwindigkeit stetig in der Richtung AC (Fig. 29) erzeugt, dann plötzlich die Änderung der Richtung nach CB umspringend und so einen weiteren Zeitraum andauernd. Haben wir dann einen kurzen Zeitmoment genommen, den der Augenblick des Richtungswechsels von AC nach CB in zwei Teile teilt, so würden wir ab als Richtung der Beschleunigung im Augenblicke des Wechsels erhalten, und diese Richtung würde gänzlich abhängen von dem Werte, den das Verhältnis der beiden Teile des Zeitintervalls annimmt in dem Grenzfalle, daß dieses unendlich klein wird; es würde also überhaupt nicht definiert sein. Wir könnten natürlich die Beschleunigung für einen Augenblick unendlich nahe dem Moment der plötzlichen Änderung, unmittelbar vorher oder nachher, definieren; für den ersten Fall würde sie in der Richtung AC, für den zweiten in CB liegen.

Fig. 29.



Die Beschleunigung im Augenblick der Änderung selbst aber würde keinen Sinn haben, wenn die Änderung der Geschwindigkeitsrichtung bei C vollkommen plötzlich wäre.

Man muß entweder das Vorkommen von Fällen dieser Art ausschließen oder man muß den ganzen Zeitraum in Teile teilen, auf deren beliebige einzelne Elemente die Definition angewandt werden kann, und die plötzlichen Änderungen dort, wo sie sich ereignen, in Rechnung ziehen.

48. Beschleunigung in der Bahn als Geschwindigkeit im Hodographen. Es ist jetzt möglich, die elegante graphische Methode darzulegen, die der Hodograph bietet, um die Beschleunigung zu diskutieren. Eine Linie OA möge sich um das Ende O derart drehen, daß sie immer der Bewegungsrichtung des Teilchens auf seiner Bahn parallel bleibt und ihre Länge derart ändern, daß diese immer den Betrag der Geschwindigkeit darstellt. Dann wird der Punkt A den Hodographen der Bewegung des Teilchens zeichnen, der, wie oben dargelegt wurde, entweder eine Kurve von stetiger Krümmung oder eine aus Teilen, deren jeder stetige Krümmung besitzt, zusammengesetzte Kurve sein wird.

Nun geht aus der oben gegebenen Definition der Beschleunigung

klar hervor, daß das Maß der Bewegung von A im Hodographen nach Größe und Richtung genau die Beschleunigung in der Bahn ist, oder, wie es manchmal ausgedrückt wird: „Die Geschwindigkeit im Hodographen ist die Beschleunigung in der Bahn." Denn der Grad der Bewegung von A muß am letzten Ende als eine Beschleunigung gedeutet werden. Er stellt die Stärke der Änderung von OA dar, und OA, obgleich in der Zeichnung eine Strecke, stellt eine in der Zeiteinheit zurückgelegte Strecke dar, d. h. eine Geschwindigkeit. Die Stärke der Änderung von OA, die sogenannte Geschwindigkeit im Hodographen, ist also die Stärke der Geschwindigkeitsänderung. Diese Bemerkung scheint notwendig, um den Schwierigkeiten zu begegnen, die Anfänger augenscheinlich oft haben, zu begreifen, wie das, was in einer Kurve Geschwindigkeit genannt wird, in einer anderen Beschleunigung sein kann.

49. Beispiele des Hodographen. Wir betrachten jetzt einige einfache Fälle des Hodographen.

1. Ein auf einer geraden Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitendes Teilchen. Der Hodograph ist einfach ein Punkt, das äußerste Ende der die Geschwindigkeit darstellenden geraden Linie; die Beschleunigung ist Null.

2. Ein auf einer geraden Linie mit veränderlicher Geschwindigkeit fortschreitendes Teilchen. Der Hodograph ist eine gerade Linie in derselben Richtung.

3. Ein sich irgendwie nur unter der Wirkung der Schwerkraft bewegendes Teilchen. In diesem Falle ist, wie wir später sehen werden, die Richtung der Beschleunigung immer vertikal. Dann ist also (außer wenn das Teilchen wie ein Meteor eine sehr ausgedehnte Bahn beschreibt), der Hodograph eine in vertikaler Richtung gezogene gerade Linie.

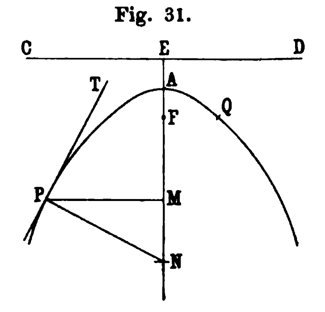
Fig. 30.

Die Bildung des Hodographen für den Fall eines eine parabolische Bahn beschreibenden Fußballes oder Geschosses ist aus Fig. 30 zu ersehen. In ihr sind die Geschwindigkeiten nach gleichen aufeinander folgenden Zeiträumen durch OA, OB, OC ... angegeben, für welche die vertikalen Strecken AB, BC... alle gleich lang sind und die gleichen Änderungen der vertikalen Geschwindigkeit darstellen, die die Schwerkraft in diesen Zeiträumen bewirkt.

50. Bahn eines Körpers unter beständiger Beschleunigung. Theorie der widerstandslosen Bewegung eines Geschosses. Daß die Bahn eines sich mit gleichförmiger Beschleunigung bewegenden Körpers eine Parabel ist, ergibt sich leicht aus der Tatsache, daß die zur Beschleunigung senkrechte Geschwindigkeit nach Größe und Rich-

tung konstant bleibt, während ein in der Richtung der Beschleunigung gleicher Zuwachs der Geschwindigkeit in gleichen aufeinanderfolgenden Zeiträumen erzeugt wird. Nehmen wir, um diese Vorstellungen zu fixieren, den Fall eines freien Geschosses ohne Luftwiderstand, unter der Wirkung der Schwerkraft, von der wir annehmen, daß sie eine konstante, nach unten gerichtete Beschleunigung erteilt. Die Linien OA, OB ... in Fig. 30 stellen die Bewegungsrichtungen in diesem Falle dar, d. h. die Tangenten an die Bahn nach aufeinanderfolgenden gleichen Zeitabschnitten; mit anderen Worten, die Tangenten an die Enden derjenigen vertikalen Ordinaten, welche in gleichen horizontalen Abständen aufeinander folgen. Wenn also p der Tangens des Winkels θ (MPT, Fig. 31) ist, den die Bewegungsrichtung in irgend einem Augenblicke mit der Horizontalen einschließt, und p_0 der Wert dieses Tangens in dem Punkte P_0 der Kurve, wo wir die Zeitrechnung beginnen lassen, dann ist

Fig. 31.



$$p = p_0 - at.$$

Wenn aber u die Horizontalgeschwindigkeit und v die Vertikalgeschwindigkeit des Teilchens bei dem Punkte P ist, wo der Tangens der Inklination der Bewegungsrichtung zur Horizontalen p ist, so haben wir

$$p = \frac{v}{u} = \frac{v_0}{u} - \frac{v_0 - v}{u}.$$

$v_0 - v$ ist aber die in der Zeit t erfolgte Änderung der Vertikalgeschwindigkeit, und diese ist gt, wenn g die nach unten gerichtete Beschleunigung durch die Schwere ist. Demnach ist $a = g/u$. Wenn x die horizontale Entfernung zwischen P_0 und P ist, so haben wir $x = ut$ und $t = x/u$. Somit erhalten wir

$$p = p_0 - \frac{g}{u^2}x.$$

D. h. die Änderung von $tg\,\theta$ ist direkt proportional der Änderung der Kurvenabszisse; das ist bekanntlich eine Eigenschaft der Parabel.

Die Gleichung der Kurve kann folgendermaßen gefunden werden. In einer beliebigen Zeit t vom Augenblick des Wurfes an (mit Geschwindigkeiten u, v) hat das Teilchen eine Strecke $x = ut$ in horizontaler Richtung und eine Strecke $vt - \frac{1}{2}gt^2$ vertikal nach oben zurückgelegt (§§ 38, 90). Diese letzteren wollen wir mit $-y$ bezeichnen, so daß y bei der Richtung nach unten positiv wird. Wenn wir t in diesem Ausdruck durch x/u ersetzen, so erhalten wir

$$y = \frac{g}{2}\frac{x^2}{u^2} - \frac{vx}{u} \quad \dots \dots \dots \quad (28)$$

und das ist die Gleichung der Kurve, bezogen auf horizontale und vertikale Axen durch den Wurfpunkt.

Wenn der Wurfpunkt der höchste Punkt ist, so muß die Wurfgeschwindigkeit gleich u, $v = o$ sein. Somit wird die Gleichung der Kurve

$$y = \frac{g}{2u^2}x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28\,a)$$

Die Gleichung der Kurve kann auch gefunden werden aus der Erwägung, daß $p = - dy/dx$ ist, und durch die Integration der Gleichung

$$-p = \frac{dy}{dx} = \frac{g}{u^2}x - p_0;$$

das Integral ist

$$y = \frac{g}{2u^2}x^2 - p_0 x + C,$$

wo C eine Konstante ist, die Null sein muß, wenn x und y von einem Punkte der Kurve aus gerechnet wird. Wird ihr höchster Punkt als Anfangspunkt genommen, so wird $p_0 = 0$, und man erhält Gl. (28 a).

Da Gleichung (28 a) für jeden möglichen Wert von y zwei Werte von x gibt, die von gleichem Zahlenwerte, aber entgegengesetzten Vorzeichen sind, so leuchtet es ein, daß die Kurve symmetrisch zu der Linie AB (Fig. 31) liegt, die senkrecht zu der (horizontalen) Tangente an A gezogen ist. Diese Linie heißt die Axe der Kurve.

Die resultierende Geschwindigkeit in einer beliebigen Entfernung y unter dem höchsten Punkte ist $\sqrt{(u^2 + g^2t^2)}$, da gt die im Fallen von diesem Punkte aus erlangte vertikale Geschwindigkeit ist. Daher haben wir, wenn wir die resultierende Geschwindigkeit mit V bezeichnen und $y = \frac{1}{2}gt^2$ setzen:

$$V^2 = 2g\left(y + \frac{u^2}{2g}\right).$$

Somit ist V die Geschwindigkeit, die ein Teilchen annehmen würde, wenn es mit gleichförmiger Beschleunigung eine Strecke $y + u^2/2g$ herabfiele, d. h. wenn es nach dem Punkte xy der Kurve herabfiele von einer horizontalen Linie CD, die in ihrer Ebene und um $u^2/2g$ über ihrem höchsten Punkte liegt.

Der Leser kann sich leicht davon überzeugen, daß, wenn ein Punkt F auf der Kurvenaxe in der Entfernung $u^2/2g$ unter dem höchsten Punkte genommen wird, die vertikale Entfernung irgend eines Punktes P auf der Kurve von der geraden Linie CD gleich der Strecke PF ist, und daß, wenn V die resultierende Geschwindigkeit bei P ist,

$$PF = V^2/2g$$

ist. CD heißt die Direktrix der Kurve und F ihr Brennpunkt.

Wir haben ferner offenbar

$$u = V\cos\theta, \quad v = V\sin\theta;$$

und da das Teilchen sich frei unter der Wirkung der Schwere bewegt, ändern sich V und θ derart, daß $V \cos \theta$ konstant bleibt. Dies mag der Tatsache, auf die wir später wieder zurückkommen werden, gegenübergestellt werden, daß, wenn ein Teilchen auf einer Kurve so geführt wird, daß es unter Wirkung der Schwerkraft den Weg von einem gegebenen Punkte zu einem anderen auf tieferem Niveau in der kürzesten Zeit zurücklegt, die Kurve (die vollständig in der durch die beiden Punkte gelegten vertikalen Ebene verläuft) die Bedingung $(\cos \theta)/V = const$ erfüllt.

Ferner sei t die Flugzeit eines Teilchens, d. h. die Zeit zwischen dem Verlassen irgend eines Niveaus und seiner Rückkehr zu demselben Niveau, und V die Wurfgeschwindigkeit, dann ist $t = (2\, V \sin \theta)/g$; die Wurfweite R auf einer horizontalen Ebene durch den Wurfpunkt wird durch

$$R = \frac{2\, V^2}{g} \sin \theta \cos \theta = \frac{V^2}{g} \sin 2\, \theta$$

gegeben. Dies ist offenbar dann ein Maximum, wenn $2\, \theta = \pi/2$ oder $\theta = \pi/4$ ist: Die Wurfweite ist am größten, wenn der „Elevationswinkel" gleich 45^0 ist.

Für eine gegebene Wurfweite R, die nicht gerade das Maximum sein darf, sind durch diese Gleichung offenbar zwei Werte von θ gegeben. Denn wenn $\pi/4 - \alpha$ ein Wert von θ ist, der die Gleichung befriedigt, so muß notwendig $\pi/4 + \alpha$ ein eben solcher Wert sein, da diese beiden Werte zusammen $\pi/2$ ausmachen; man unterscheidet diese Fälle als Flachwurf und Steilwurf.

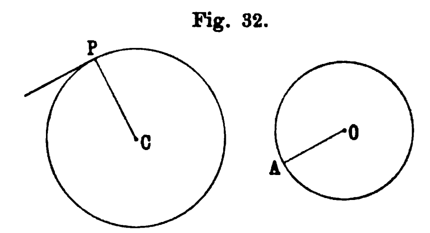
Um die Richtung zu finden, in der ein Geschoß von einem gegebenen Punkte P mit einer gegebenen Geschwindigkeit V geworfen werden muß, um durch einen anderen gegebenen Punkt Q (der nicht notwendig auf demselben Niveau zu liegen braucht) hindurchzugehen, ist erstens zu beachten, daß die Bahn in der durch die beiden Punkte gelegten vertikalen Ebene verlaufen muß, und ferner, daß PF und QF den bezw. Entfernungen von P und Q von der Direktrix gleich sein müssen. Die Entfernung PF ist aber durch den Wert von V fest bestimmt und ist $V^2/2\, g$. Wenn die Ordinaten von P und Q gleich y bezw. y' sind, so beträgt die Entfernung zwischen Q und der Direktrix $V^2/2\, g - (y - y')$. Die Entfernung QF ist also fest bestimmt und hat diesen Wert.

Wenn nun die Neigung θ der Richtung V zur Horizontalen sich ändert, so bewegt sich F auf einem Kreise mit dem Radius $V^2/2\, g$ um P als Mittelpunkt. Denken wir uns diesen Kreis und außerdem einen Kreis mit dem Radius QF. Diese beiden Kreise werden sich, wenn es eine Lösung gibt, in zwei Punkten, die natürlich auch zusammenfallen können, schneiden. Diese Punkte sind die Brennpunkte zweier parabolischer Bahnen, auf denen das von P ausgeworfene Teilchen den

Punkt Q erreicht. Wenn die beiden Punkte zusammenfallen, gibt es nur eine mögliche Bahn; wenn sich die Kreise nicht schneiden, gibt es überhaupt keine Lösung.

51. Beschleunigung eines auf einer Kreisbahn fortschreitenden Teilchens. Für ein Teilchen, das mit gleichförmiger Geschwindigkeit einen Kreis beschreibt, ist offenbar der Hodograph ebenfalls ein Kreis, von dem jeder Radius die Geschwindigkeit des Teilchens in einem einzelnen Augenblicke darstellt. Der Kreis mit dem Mittelpunkte C und Radius r (Fig. 32) möge die Bahn, der mit dem Mittelpunkte O den Hodographen darstellen, dessen Radius die Bahngeschwindigkeit ist; der Radius OA des Hodographen möge die Geschwindigkeit v des Teilchens in der Lage P darstellen und α die Geschwindigkeit des Punktes A bezeichnen. Die beiden Punkte P und A müssen die Kreise in der gleichen Zeit beschreiben, da OA immer parallel der Tangente an P, d. h. senkrecht zu CP bleiben muß. Da aber der Umfang des Kreises $2\pi r$ ist, so ist die von P zu seiner Umschreibung gebrauchte Zeit $2\pi r/v$ und ebenso die von dem Hodographen zur Umschreibung gebrauchte Zeit $2\pi v/\alpha$, woraus sich die Gleichung $2\pi r/v = 2\pi v/\alpha$ oder

Fig. 32.



$$\alpha = \frac{v^2}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

ergibt. Dieses liefert den Betrag von α. Was seine Richtung betrifft, so ist es die der Tangente an den Hodographen bei A, d. h. die Beschleunigung von P ist von P nach C, dem Mittelpunkte der Bahn, gerichtet. Auf anderem Wege haben wir dieses Resultat schon früher (§ 41) erhalten.

Die Gleichung (29) kann in andere passende Form gebracht werden durch Benutzung der Winkelgeschwindigkeit des Radius CP und die Periode der Umdrehung. So haben wir, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit und T die Periode ist, $v = \omega r$ und $T = 2\pi/\omega$. Folglich wird aus Gl. (29)

$$\alpha = r\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} r \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29\,\mathrm{a})$$

Die Tatsache, daß die Beschleunigung in diesem Falle einen endlichen Wert v^2/r hat, und nach dem Mittelpunkte der Kreisbahn zu gerichtet ist, wird eine Quelle der Verwirrung für diejenigen Lernenden, welche bis dahin die Beschleunigung als etwas begriffen hatten, was nur Körper betreffen kann, die sich stetig in gerader Linie fortbewegen, z. B. einen unter der Wirkung der Schwere fallenden Körper, und da ihre Vorstellungen infolge dieser unvollkommenen Behandlung der

Frage unter einem Vorurteil stehen, so fragen sie, wie denn ein Körper stetige Beschleunigung nach dem Bahnmittelpunkte zu erfahren kann, wenn doch seine Geschwindigkeit unverändert bleibt. Der Fehlschluß liegt in der Annahme der unveränderten Geschwindigkeit; in Wahrheit ändert sich die Geschwindigkeit, nämlich als Vektorgröße, fortwährend. Beim Beschreiben jedes Teiles der Kreisbahn ändert das Teilchen die Richtung seiner Geschwindigkeit um den Winkel zwischen den Radien nach den Endpunkten des betreffenden Kreisteiles. Wenn der Teil z. B. den halben Kreis beträgt, so ist die Geschwindigkeitsrichtung, weit davon, dieselbe geblieben zu sein, sogar tatsächlich die entgegengesetzte geworden. Die Änderung in jedem Zeitraume ist das Integral der Wirkung der Beschleunigung nach dem Mittelpunkte in diesem selben Zeitraume.

Wir werden alsbald (§ 55) sehen, daß ein auf beliebig gekrümmter Bahn fortschreitendes Teilchen im allgemeinen bei jedem Punkte eine Beschleunigung in der Linie der Bewegung und eine Beschleunigung vom Betrage v^2/R nach dem Mittelpunkte der Krümmung für diesen Punkt hat, wo v die Geschwindigkeit des Teilchens an dem Punkte und R die Länge des Krümmungsradius ist.

52. Elliptische Bewegung. Wir wollen später (§ 528) den Hodographen eines Teilchens betrachten, das sich auf einer elliptischen Bahn mit einer immer nach einem der Brennpunkte der Ellipse gerichteten und im umgekehrten Quadrat der Länge des von dem Brennpunkte nach dem Teilchen gezogenen Radius sich ändernden Beschleunigung bewegt. Dies ist der Fall der nicht gestörten Bewegung eines kleinen Satelliten um seinen Hauptkörper, der ihn nach dem bekannten Gravitationsgesetz anzieht. Man wird sehen, daß in diesem Falle der Hodograph ebenfalls ein Kreis ist, und daß der Anfangspunkt O, von dem aus die die Geschwindigkeiten darstellenden Linien gezogen werden, ein exzentrischer Punkt ist.

53. Beschleunigung bei der einfachen Schwingung; analytische Formeln für dieselbe. Wir können nun die Betrachtung des die Sinusschwingung ausführenden Teilchens wieder aufnehmen und seine Beschleunigung erforschen. Wie der Punkt p (Fig. 25, § 43) in jedem Augenblick die Geschwindigkeit von P längs dem Durchmesser AA' hat, so hat er auch die Beschleunigung von P in derselben Richtung. Aber die gesamte Beschleunigung von P ist von P nach O gerichtet und vom Betrage $\omega^2 r$. Die Komponente davon längs AO ist vom Betrage $\omega^2 r \cos POp$, und das ist die Beschleunigung von p, die folglich nach O gerichtet ist. Aber $r \cos POp$ ist die Verrückung Op, und die Beschleunigung von p ist demnach das Produkt von ω^2 in die Verrückung und ist nach dem festen Punkt O zu gerichtet. Die Beschleunigung hat also ein festes Verhältnis zur Verrückung, das (ohne

Rücksicht auf Vorzeichen) zahlenmäßig ausgedrückt werden kann durch die Gleichung:

$$\frac{\text{Beschleunigung}}{\text{Verrückung}} = \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Der Lernende sollte sich diese Beziehung gut einprägen.

Um die Verweisung bequemer zu haben, können wir hier die oben aufgestellten Formeln für ein einfache Schwingungen ausführendes Teilchen zusammenstellen. Zu s als Verrückung und $\frac{ds}{dt}$ als Geschwindigkeit werden wir $\frac{d^2s}{dt^2}$ für die Beschleunigung oder das Verhältnis der Änderung von $\frac{ds}{dt}$ zur Zeitänderung einführen. Wie wir $\dot{s}$ an Stelle von ds/dt setzen, so werden wir in Fällen, wo es die Bequemlichkeit erfordert, d^2s/dt^2 durch das Symbol $\ddot{s}$ ersetzen. Wir haben also:

$$\left.\begin{aligned} s &= a \cos(nt - \varepsilon) \\ \dot{s} = \frac{ds}{dt} &= -na \sin(nt - \varepsilon) \\ \ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2} &= -n^2a \cos(nt - \varepsilon) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

Das Minuszeichen auf der rechten Seite der zweiten und dritten Gleichung ist offenbar durch Fig. 25 ohne weiteres gegeben; die Geschwindigkeitskomponente AA' des Punktes ist von A nach O — also im Sinne einer Verminderung der Verrückung — gerichtet, wohingegen in der ersten Gleichung die Verrückung positiv genommen wird; auch hat die Beschleunigung von P, da sie von P nach O gerichtet ist, eine Komponente von p nach O, welche die Geschwindigkeit in derselben Richtung zahlenmäßig erhöht, d. h. die Beschleunigung sowohl als die Geschwindigkeit muß das negative Vorzeichen haben.

Der Leser wird gut tun, sich die Vorzeichen für jeden möglichen Wert von t klar zu machen, d. h. für die Lage von P in jedem der vier Quadranten des Kreises.

54. Trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktionen. Man wird bemerkt haben, daß die dritte Gleichung von (31) von der zweiten genau durch den gleichen analytischen Prozeß abgeleitet werden kann, durch den in § 39 die zweite der Gleichungen (31) aus der ersten abgeleitet worden war. Es wird von Nutzen sein, zu beachten, daß die successive Differentiation der Funktion $a \cos(nt - \varepsilon)$ nach t ausgeführt wird, indem man die Funktion abwechselnd von *cos* zu *sin* und von *sin* zu *cos* ändert, jedesmal mit n multipliziert und das Vorzeichen wechselt, wenn die Funktion sich von *cos* zu *sin* ändert. Folglich ist, wenn wir den Differentialquotienten von ds/dt mit d^2s/dt^2

bezeichnen, den von d^2s/dt^2 mit d^3s/dt^3 u. s. w., und wenn $s = a \cos(nt - \varepsilon)$ ist,

$$\frac{ds}{dt} = -na \sin(nt - \varepsilon), \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -n^2a \cos(nt - \varepsilon),$$

$$\frac{d^3s}{dt^3} = n^3a \sin(nt - \varepsilon)$$

u. s. w.

Wir haben hier nicht Platz, diese Frage ausführlich zu behandeln; aber es wird für später gut sein, sich zu merken, daß die Ergebnisse mit einem anderen leicht zu erhaltenden in Beziehung stehen. Die Funktion e^{mt} sei durch die Gleichung

$$e^{mt} = 1 + mt + \frac{m^2t^2}{1.2} + \frac{m^3t^3}{1.2.3} + \cdots \qquad (32)$$

gegeben, wo die rechte Seite eine unendliche Reihe darstellt; das Gesetz, nach dem ihre Glieder gebildet werden, ist durch die gegebenen Glieder bezeichnet.

Wenn wir jetzt t auf beiden Seiten in $t + \tau$ ändern und die Grenze nehmen, der sich die Größe auf der rechten Seite nähert, wenn τ unendlich nahe an Null gebracht und mit dt bezeichnet wird, so sehen wir sofort, daß

$$\frac{d(e^{mt})}{dt} = m\left(1 + \frac{mt}{1} + \frac{m^2t^2}{1.2} + \frac{m^3t^3}{1.2.3} + \cdots\right),$$

d. h.

$$\frac{d(e^{mt})}{dt} = me^{mt} \qquad (33)$$

ist. Auf dieselbe Weise haben wir

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \cdots \qquad (34)$$

und

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x \qquad (35)$$

Folglich ist der verhältnismäßige Zuwachs, den e^x erfährt, wenn x wächst, gerade e^x. x heißt der Logarithmus von e^x mit der Basis e. Der Wert von e ist, wie der Leser sich überzeugen kann, 2,71828... Es ist eine irrationale Zahl und die Basis des von Napier erfundenen Logarithmensystems.

Dieses Ergebnis, obgleich wir uns nicht damit aufhalten können, es zu beweisen, bewährt sich durchaus, gleichviel ob m positiv oder negativ, ganzzahlig oder gebrochen, reell, imaginär oder komplex ist. Nun wird in der Trigonometrie gezeigt, daß, wenn e^{mt} den bezeichneten Wert hat und i den Ausdruck $\sqrt{-1}$ bedeutet,

$$\cos nt = \tfrac{1}{2}(e^{int} + e^{-int}), \quad \sin nt = \tfrac{1}{2i}(e^{int} - e^{-int}) \qquad (36)$$

ist.

Die Differentiation trigonometrischer Funktionen wird somit auf die der Exponentialfunktionen zurückgeführt, und der Leser mag sich nach diesen Formeln überzeugen, daß $d\,(\cos nt)/dt = -n \sin nt$ ist und $d\,(\sin nt)/dt = n \cos nt$. Auf die Beziehungen zwischen beiden Arten von Funktionen werden wir im Zusammenhange mit der Frage der durch Reibung oder sonstige hemmende Kräfte gedämpften Schwingungen zurückkommen.

55. Beschleunigung auf beliebiger Bahn. Wir betrachten jetzt die Beschleunigung eines auf beliebiger Bahn fortschreitenden Teilchens. Es möge s wie bisher die Länge der Kurve von einem als Nullpunkt gewählten festen Punkte bis zur Lage P, Fig. 33, des fortschreitenden Punktes bezeichnen und ϱ die Strecke vom Ausgangspunkte O nach P. Q sei ein benachbarter Punkt auf der Kurve, um ds von P entfernt, den P nach einem ganz kurzen Zeitraume dt erreicht haben wird, und $d\varrho$ sei die Strecke von P nach Q (die Sehne PQ), so daß die Strecke OQ gleich $\varrho + d\varrho$ ist. $d\omega$ sei eine andere Strecke, ebenfalls von der Länge ds, längs der Tangente an P. Dann nähern sich, wenn dt unbegrenzt kleiner und kleiner wird, $d\varrho$ und $d\omega$ unbegrenzt der Koinzidenz mit dem Bahnelement, dessen Länge ds ist. Daher ist jede beliebige sehr kurze Strecke, gleichviel ob längs PQ oder längs der Tangente, von beliebiger Länge δs, nach Größe und Richtung durch das Produkt $d\varrho/ds . \delta s$ gegeben; d. h. $d\varrho/ds$ stellt eine Einheitsstrecke längs der Tangente an P dar.

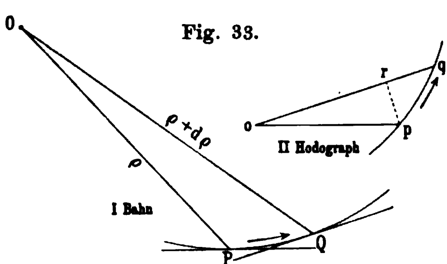


Fig. 33.

Alsdann ist das Maß, nach dem das Teilchen längs der Kurve fortschreitet, d. h. nach dem die Strecke ϱ wächst, offenbar das Verhältnis $d\varrho/ds$ mit $\dot{s}$ multipliziert. Somit haben wir (s. o. § 35):

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varrho}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

Zeichnen wir nun den Hodographen der Bewegung des Teilchens (Fig. 33); die Strecke op möge $\dot{\varrho}$ für den Bahnpunkt P darstellen. Dann wird oq die Geschwindigkeit für den nächsten Bahnpunkt Q darstellen, also $\dot{\varrho} + d\dot{\varrho}$. pq muß daher $d\dot{\varrho}$ darstellen, und, wie wir eben gesehen haben, ist:

$$d\,\frac{d\varrho}{dt} = d\left(\frac{d\varrho}{ds}\frac{ds}{dt}\right).$$

Nun besteht aber pq aus zwei Teilen, einem rq längs oq und einem anderen, pr im rechten Winkel zu oq. Wenn jetzt das Zeit-

element dt, in dem das Teilchen von P nach Q kommt, unbegrenzt kleiner und kleiner wird, so nähert sich oq unbegrenzt op, und rp nähert sich unbegrenzt der senkrechten Lage gegen op. Bei der Annäherung an die Grenze können wir also rq als in die Richtung der Tangente in P und pr als senkrecht zu dieser Richtung ansehen; einer Richtung, die, wie aus der Zeichnung zu ersehen ist, nach dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn weist.

Der letzte Teil von $d\dot{\varrho}$ veranlaßt keine Änderung in der Länge von op, also von $\dot{s}$, und bedingt nur die durch die Richtungsänderung poq verursachte Änderung der Einheitsstrecke $d\varrho/ds$ längs der Tangente an P. Daher ist für ein Zeitelement dt annähernd

$$pr = \frac{ds}{dt}\, d\, \frac{d\varrho}{ds} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

wo $d(d\varrho/ds)$ die Änderung von $d\varrho/ds$ ist.

Der andere Teil rq, der im Grenzfalle längs Op liegt, bedingt keine Änderung von $d\varrho/ds$, entsteht aber aus der Änderung von $\dot{s}$. Folglich ist wiederum für ein Zeitelement dt annähernd

$$rq = \frac{d\varrho}{ds}\, d\, \frac{ds}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Somit haben wir für die Gesamtänderung $d\dot{\varrho}$ der Geschwindigkeit in der Zeit dt, bei unbegrenzter Annäherung mit kleiner werdendem dt

$$d\,\frac{d\varrho}{dt} = \frac{ds}{dt}\, d\, \frac{d\varrho}{ds} + \frac{d\varrho}{ds}\, d\, \frac{ds}{dt}.$$

Ebenso haben wir

$$dt = \frac{ds}{\frac{ds}{dt}}\,.$$

Somit ist:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d}{ds}\frac{d\varrho}{ds} + \frac{d\varrho}{ds}\,\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt},$$

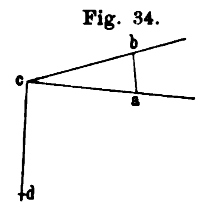
oder in der in § 53 erklärten Bezeichnung:

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \frac{d^2\varrho}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\varrho}{ds}\,\frac{d^2 s}{dt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Um dieses Ergebnis richtig zu deuten, erinnern wir uns, daß $d^2\varrho/ds^2$ die Geschwindigkeitsänderung von $d\varrho/ds$ mit der Änderung von s ist, und das erstere ist, wie wir wissen, eine Einheitsstrecke längs der Tangente in dem Anfangspunkte P von ds. Sie ist für den Punkt Q gleich $d\varrho/ds + d\,(d\varrho/ds)$ geworden, ist aber immer noch eine Einheitsstrecke längs der Tangente. Folglich ist, wenn ca, cb (Fig. 34, a. f. S) diese Einheitsstrecken darstellen, $d(d\varrho/ds)$ gleich ab. Da aber ca und cb beides Einheiten sind, so ist die Länge von ab der Winkel acb zwischen den beiden Tangenten in den Endpunkten P, Q von ds

in Fig. 33, und das Verhältnis dieser Länge zu ds ist die Krümmung der Bahn, § 37. Somit ist $d^2\varrho/ds^2$, das zwischen a und b, also senkrecht zur Tangente und dem Mittelpunkte der Krümmung zugekehrt, liegt, das Verhältnis einer senkrecht zu $d\varrho$ gelegenen Einheitsstrecke zur Länge des Krümmungsradius. Wenn σ eine von P nach dem Krümmungsmittelpunkte gerichtete Einheitsstrecke bedeutet, und R die Länge des Krümmungsradius ist, haben wir

Fig. 34.



$$\frac{d^2\varrho}{ds^2} = \frac{\sigma}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (41)$$

und folglich

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \sigma \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{R} + \omega \frac{d^2s}{dt^2} \quad \ldots \ldots \quad (42)$$

wo ω wie bisher eine Einheitsstrecke längs der Tangente in P bezeichnet.

Die Gesamtbeschleunigung besteht also aus zwei Teilen, einem numerisch gleich $\dot{s}^2/R$, nach dem Krümmungsmittelpunkte zu und einem zweiten numerisch gleich $\ddot{s}$, in der Bewegungsrichtung. Man nennt die letztere Komponente Tangentialbeschleunigung, die erstere Normal- oder Zentripetalbeschleunigung.

56. Raumkurven. Oskulationsebene. Windungsgrad. Der Fall der Bewegung längs einer Kurve im Raume (oder sogenannten gewundenen Kurve) erfordert etwas nähere Erläuterung. Wir haben die Bewegung längs einer Kurve definiert als gegeben durch die Bewegung eines Punktes längs einer geraden Linie, die sich ihrerseits um den Punkt dreht. Nun ist zwar natürlich die Ebene, in der die Linie sich dreht, jederzeit vollständig bestimmt, aber diese Ebene kann ihre Richtung wechseln, indem sie sich um die Linie dreht. Diese Ebene heißt für jede Lage des Punktes die Oskulationsebene oder Schwingungsebene.

Wenn wir jetzt zu Fig. 34 zurückkehren, so haben wir dort die Oskulationsebene mit der Papierebene zusammenfallend. Ziehen wir eine Linie cd von der Länge 1 in der Oskulationsebene von dem festen Punkte c aus und senkrecht zu ca. Das Ende d liegt, wenn P fortschreitet, immer auf einem Kreise vom Radius 1, von c als Mittelpunkt aus beschrieben. Die Geschwindigkeit, mit der sich cd um ca pro Streckeneinheit längs der Kurve dreht, ist ein Maß des Windungsgrades der Kurve.

57. Bewegung auf einer gleichwinkeligen Spirale mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit. Der Fall eines auf einer gleichwinkeligen Spirale mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um den

Pol fortschreitenden Teilchens ist von großem Interesse wegen seiner Anwendung auf gedämpfte Schwingungsbewegungen und wird eine vortreffliche Illustration der oben aufgestellten Theoreme ergeben. Wir werden das Problem mit Hilfe des Theorems von der Zerlegung der Beschleunigung in Tangential- und Normalbeschleunigung behandeln und dann zeigen, wie dasselbe Ergebnis sehr leicht mit Hilfe des Hodographen gewonnen werden kann.

Eine gleichwinkelige oder, wie man auch sagt, logarithmische Spirale ist eine ebene Kurve solcher Art, daß die Tangente in jedem ihrer Punkte, z. B. P, in einem konstanten Winkel zu der von einem festen Punkte, dem Pol, nach P gezogenen Linie geneigt ist. So ist in Fig. 35 O der Pol, und die Winkel OBC, OPT sind gleich, nämlich jeder ungefähr 82°. In diesem Sinne gerechnet muß der Spiralwinkel offenbar

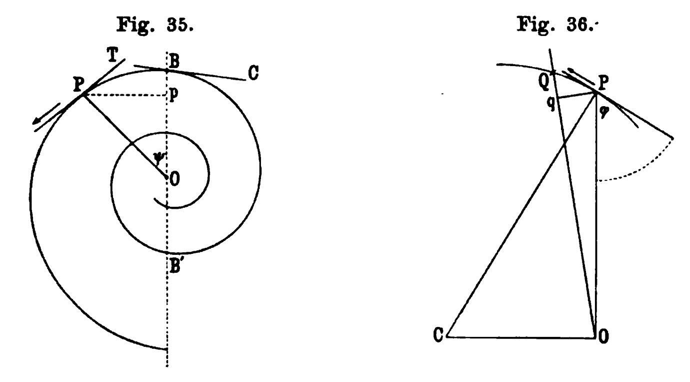


Fig. 35. Fig. 36.

stets kleiner als $\pi/2$ sein (man könnte aber ebensogut auch den Winkel nach der anderen Seite nehmen, der dann entsprechend größer als $\pi/2$ wäre).

Die Beziehung zwischen der Länge r des vom Pol nach irgend einem Punkte gezogenen Radiusvektors und dem Winkel θ, den der Radius mit einer festen Linie in der Ebene der Kurve bildet, ist

$$r = a^{\theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

wo a eine Konstante der Kurve ist. Die feste Linie ist also der Radiusvektor von der Länge 1.

Es ist leicht zu beweisen, daß die durch diese Gleichung gegebene Kurve die aufgestellte Bedingung erfüllt. Denn, setzen wir P, Q als benachbarte Punkte auf der Kurve, O als Pol, dann ist $OP = r = a^{\theta}$, und, da θ als wachsend angenommen wird, je weiter P vom Pol entfernt genommen wird, so ist $OQ = r + dr = a^{\theta + d\theta}$. Folglich ist

$$dr = r\,(a^{d\theta} - 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Für gleichen Zuwachs $d\theta$ von θ ändert sich daher der Zuwachs von r direkt mit r. Wenn aber q (Fig. 36) der Fußpunkt des von P

klar hervor, daß das Maß der Bewegung von A im Hodographen nach Größe und Richtung genau die Beschleunigung in der Bahn ist, oder, wie es manchmal ausgedrückt wird: „Die Geschwindigkeit im Hodographen ist die Beschleunigung in der Bahn.“ Denn der Grad der Bewegung von A muß am letzten Ende als eine Beschleunigung gedeutet werden. Er stellt die Stärke der Änderung von OA dar, und OA, obgleich in der Zeichnung eine Strecke, stellt eine in der Zeiteinheit zurückgelegte Strecke dar, d. h. eine Geschwindigkeit. Die Stärke der Änderung von OA, die sogenannte Geschwindigkeit im Hodographen, ist also die Stärke der Geschwindigkeitsänderung. Diese Bemerkung scheint notwendig, um den Schwierigkeiten zu begegnen, die Anfänger augenscheinlich oft haben, zu begreifen, wie das, was in einer Kurve Geschwindigkeit genannt wird, in einer anderen Beschleunigung sein kann.

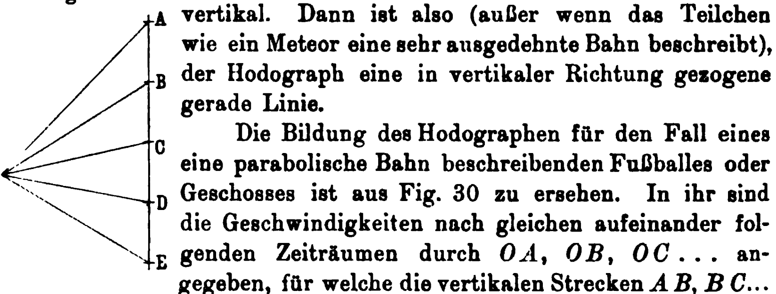
49. Beispiele des Hodographen. Wir betrachten jetzt einige einfache Fälle des Hodographen.

1. Ein auf einer geraden Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitendes Teilchen. Der Hodograph ist einfach ein Punkt, das äußerste Ende der die Geschwindigkeit darstellenden geraden Linie; die Beschleunigung ist Null.

2. Ein auf einer geraden Linie mit veränderlicher Geschwindigkeit fortschreitendes Teilchen. Der Hodograph ist eine gerade Linie in derselben Richtung.

3. Ein sich irgendwie nur unter der Wirkung der Schwerkraft bewegendes Teilchen. In diesem Falle ist, wie wir später sehen werden, die Richtung der Beschleunigung immer vertikal. Dann ist also (außer wenn das Teilchen wie ein Meteor eine sehr ausgedehnte Bahn beschreibt), der Hodograph eine in vertikaler Richtung gezogene gerade Linie.

Fig. 30.

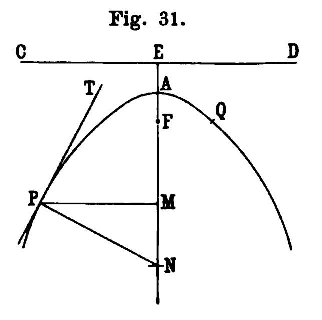


Die Bildung des Hodographen für den Fall eines eine parabolische Bahn beschreibenden Fußballes oder Geschosses ist aus Fig. 30 zu ersehen. In ihr sind die Geschwindigkeiten nach gleichen aufeinander folgenden Zeiträumen durch OA, OB, OC ... angegeben, für welche die vertikalen Strecken AB, BC... alle gleich lang sind und die gleichen Änderungen der vertikalen Geschwindigkeit darstellen, die die Schwerkraft in diesen Zeiträumen bewirkt.

50. Bahn eines Körpers unter beständiger Beschleunigung. Theorie der widerstandslosen Bewegung eines Geschosses. Daß die Bahn eines sich mit gleichförmiger Beschleunigung bewegenden Körpers eine Parabel ist, ergibt sich leicht aus der Tatsache, daß die zur Beschleunigung senkrechte Geschwindigkeit nach Größe und Rich-

tung konstant bleibt, während ein in der Richtung der Beschleunigung gleicher Zuwachs der Geschwindigkeit in gleichen aufeinanderfolgenden Zeiträumen erzeugt wird. Nehmen wir, um diese Vorstellungen zu fixieren, den Fall eines freien Geschosses ohne Luftwiderstand, unter der Wirkung der Schwerkraft, von der wir annehmen, daß sie eine konstante, nach unten gerichtete Beschleunigung erteilt. Die Linien OA, OB . . . in Fig. 30 stellen die Bewegungsrichtungen in diesem Falle dar, d. h. die Tangenten an die Bahn nach aufeinanderfolgenden gleichen Zeitabschnitten; mit anderen Worten, die Tangenten an die Enden derjenigen vertikalen Ordinaten, welche in gleichen horizontalen Abständen aufeinander folgen. Wenn also p der Tangens des Winkels θ (MPT, Fig. 31) ist, den die Bewegungsrichtung in irgend einem Augenblicke mit der Horizontalen einschließt, und p_0 der Wert dieses Tangens in dem Punkte P_0 der Kurve, wo wir die Zeitrechnung beginnen lassen, dann ist

Fig. 31.



$$p = p_0 - at.$$

Wenn aber u die Horizontalgeschwindigkeit und v die Vertikalgeschwindigkeit des Teilchens bei dem Punkte P ist, wo der Tangens der Inklination der Bewegungsrichtung zur Horizontalen p ist, so haben wir

$$p = \frac{v}{u} = \frac{v_0}{u} - \frac{v_0 - v}{u}.$$

$v_0 - v$ ist aber die in der Zeit t erfolgte Änderung der Vertikalgeschwindigkeit, und diese ist gt, wenn g die nach unten gerichtete Beschleunigung durch die Schwere ist. Demnach ist $a = g/u$. Wenn x die horizontale Entfernung zwischen P_0 und P ist, so haben wir $x = ut$ und $t = x/u$. Somit erhalten wir

$$p = p_0 - \frac{g}{u^2}x.$$

D. h. die Änderung von $tg\,\theta$ ist direkt proportional der Änderung der Kurvenabszisse; das ist bekanntlich eine Eigenschaft der **Parabel**.

Die Gleichung der Kurve kann folgendermaßen gefunden werden. In einer beliebigen Zeit t vom Augenblick des Wurfes an (mit Geschwindigkeiten u, v) hat das Teilchen eine Strecke $x = ut$ in horizontaler Richtung und eine Strecke $vt - \frac{1}{2}gt^2$ vertikal nach oben zurückgelegt (§§ 38, 90). Diese letzteren wollen wir mit $-y$ bezeichnen, so daß y bei der Richtung nach unten positiv wird. Wenn wir t in diesem Ausdruck durch x/u ersetzen, so erhalten wir

$$y = \frac{g}{2}\frac{x^2}{u^2} - \frac{vx}{u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Wenn wir

$$n^2 = \frac{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{\sin^2 \varphi}, \quad k = \frac{d\theta}{dt} ctg\, \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

und $-\ddot{s}'$ für die Gesamtbeschleunigung von p setzen, so haben wir die Gleichung

$$\frac{d^2 s'}{dt^2} + 2k\frac{ds'}{dt} + n^2 s' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

d. h. die Differentialgleichung der Schwingungsbewegung eines Teilchens, das einer mit seiner Geschwindigkeit proportionalen Dämpfung unterworfen ist.

Wenn α der Winkel zwischen BB' und der Linie, von der aus θ gemessen wird, ist, so haben wir $\theta = \alpha + \psi$ und daher $\dot{\theta} = \dot{\psi}$.

Somit erhalten wir

$$s' = r \cos \psi = a^{\theta} \cos(\alpha - \theta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Die Verrückung s' hat als Zahlenwert ein Maximum, wenn $\dot{s}'$ null ist, d. h. jedesmal, wenn $\cos(\varphi + \psi)$ null ist; wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, wird dieses Maximum mit jedem Male, wo der Radiusvektor eine halbe Umdrehung ausführt, kleiner. Um die Abnahmegeschwindigkeit zu finden, beachten wir, daß, wenn ψ sich von π bis 0 ändert, θ sich von $\alpha + \pi$ bis α ändert, und s' von $a^{\alpha + \pi} \cos \pi$ bis $a^{\alpha} \cos 0$, d. h. von $a^{\pi} a^{\alpha}$ bis a^{α}. Also nimmt die Amplitude in jeder halben Umdrehung im Verhältnis von $a^{\pi} : 1$ ab. Die aufeinander folgenden Amplituden sind in Fig. 35 angedeutet.

Die Abnahmegeschwindigkeit von r für jede halbe Umdrehung ist genau dieselbe. Der Betrag der Abnahme pro Zeiteinheit ist nach Gl. (46) $r\dot{\theta}\, ctg\, \varphi$ oder kr, so daß das Abnahmeverhältnis von r pro Zeit- und Längeneinheit k ist.

59. Berechnung der Beschleunigung durch den Hodographen. Die Methode des Hodographen führt viel kürzer und eleganter zu dem oben gefundenen Werte für die Beschleunigung des auf der Spirale fortschreitenden Teilchens. Da die Geschwindigkeit mit r proportional ist, so ist der Hodograph eine gleichwinkelige Spirale von demselben Winkel wie die Bahn. AS, Fig. 37, möge die Geschwindigkeit bei P darstellen, dann fällt die Beschleunigung in die Richtung der Tangente ST an den Hodographen. Ferner, wenn ST die Größe sowohl als die Richtung der Beschleunigung darstellt, muß es sich von AS durch genau dieselbe Operation ableiten lassen, die AS aus OP ergeben hatte. Die Größe von AS ist aber $r\dot{\theta}/\sin \varphi$, und daher die Größe von ST gleich $r\dot{\theta}^2/\sin^2 \varphi$. Also ist die Beschleunigung vollkommen bestimmt.

Wenn wir ST in zwei Komponenten auflösen, die durch UT in der Bewegungsrichtung und SU in der Richtung PO (Fig. 37) dar-

gestellt sind, so erhalten wir leicht (da offenbar $\angle\ UTS = \angle\ SUT = \varphi$ und $UT/ST = \sin 2\varphi/\sin\varphi = 2\cos\varphi$ ist) für den Wert der ersteren $2r\dot{\theta}^2 \cos\varphi/\sin^3\varphi$ und für den der letzteren $r\dot{\theta}^2/\sin^2\varphi$; Werte, die mit den durch die Anwendung des ersten Prozesses erhaltenen identisch sind.

60. Resultante aus zwei einfachen Schwingungen in einer Linie. Wir betrachten jetzt diejenige Bewegung, welche die resultierende aus zwei oder mehr gleichzeitig bestehenden einfachen Schwingungen ist. Zunächst seien die Bewegungen von gleicher Periode und in einer Linie, und die konzentrischen Kreise AA', BB' (Fig. 38) seien die zur Definition der einfachen Schwingungen (der Punkte p, q längs dem Diameter AA'), die zusammengesetzt werden sollen, benutzten

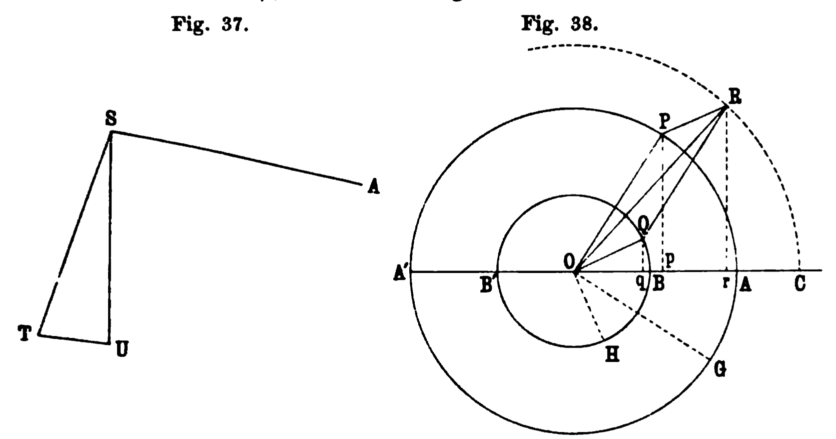


Fig. 37. Fig. 38.

Hilfskreise. P, Q seien die Lagen der Punkte in der Kreisbewegung zur Zeit t, von dem Augenblick an gerechnet, wo P sich bei G befand. Die Epoche der Bewegung von P ist als Winkel COG, und offenbar muß Q, wenn $GOH = POQ$ ist, im Nullpunkt der Zeitrechnung bei H gewesen sein. Also ist die Epoche von Q gleich COH, und die Differenz der Epochen ist GOH oder POQ.

Vervollständigen wir das Parallelogramm $POQR$ und ziehen wir die Diagonale OR; dann muß, da OP und OQ sich mit gleicher Geschwindigkeit drehen, OR durchaus von ungeänderter Länge und in denselben Winkeln zu OP und OQ geneigt verbleiben. Die Verrückung des die resultierende Bewegung beschreibenden Teilchens ist die Summe der Verrückungen Op, Oq, welche Summe, da sie die Summe der Projektionen von OP, OQ, d. h. von OQ, QR auf OC ist, der Projektion von OR auf OC, also Or gleich ist. Offenbar beschreibt r eine einfache Schwingung, und die resultierende Bewegung ist eine Schwingung von der Amplitude gleich OR, von derselben Periode wie die Einzelschwingungen und von einer Phase, die gegen die Bewegung

von P um den $\angle\, ROP$ zurück und gegen die Bewegung von Q um den $\angle\, QOR$ voraus ist.

Wenn a, b, c die Längen von OP, OQ, OR, wenn ferner θ die Phasendifferenz der zusammenzusetzenden Bewegungen, α, β die Winkel POR, ROQ sind, so haben wir:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

$$\alpha = arc\cos\frac{a + b\cos\theta}{c}, \quad \beta = arc\cos\frac{b + a\cos\theta}{c} \quad . \quad . \quad (53)$$

Dieses Ergebnis erhält man ohne Mühe auf analytischem Wege. ε möge den Winkel AOG bezeichnen, u, v die Verrückungen von p, q. Dann ist:

$$u = a\cos(nt - \varepsilon), \quad v = b\cos(nt - \varepsilon - \theta)$$

$$u + v = a\cos(nt - \varepsilon) + b\cos(nt - \varepsilon - \theta)$$

$$= (a + b\cos\theta)\cos(nt - \varepsilon) + b\sin\theta\sin(nt - \varepsilon).$$

Wenn wir $a + b\cos\theta = c\cos\varphi$ und $b\sin\theta = c\sin\varphi$ setzen, so kann dies auch in der Form $u + v = c\cos(nt - \varepsilon - \varphi)$ geschrieben werden, wo

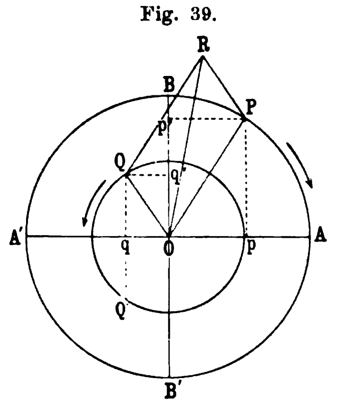
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}, \quad \varphi = arc\,tang\frac{b\sin\theta}{a + b\cos\theta}$$

ist, was, da φ offenbar der oben mit α bezeichnete Winkel ist, mit dem bereits erhaltenen Ergebnis übereinstimmt.

In derselben Weise kann eine dritte einfache Schwingung von derselben Periode und in derselben Linie mit der eben gefundenen zusammengesetzt werden u. s. w. bis zu der Resultante beliebig vieler einfacher Schwingungen von gleicher Periode und in derselben Linie.

61. Resultante zweier entgegengesetzter Kreisbewegungen von gleichen Perioden. Ein anderer wichtiger Fall ist der, in welchem zwei konzentrische Kreisbewegungen von gleicher Periode, aber von verschiedener Amplitude und entgegengesetzten Richtungen zusammengesetzt werden. Es seien in Fig. 39 OP, OQ die Radien nach den die Kreisbahnen beschreibenden Punkten P, Q; alsdann werden, wenn die Radien in OB zusammenfallen, die Winkel BOP, BOQ gleich; wenn wir dann das Parallelogramm $POQR$ beschreiben, ist OR die resultierende Verrückung, und die Bewegung von R ist die resultierende Bewegung. Aber die Verrückung von R ist zusammengesetzt aus den zwei Verrückungen Op, Oq längs der Linie OA und den beiden anderen Op', Oq' längs

Fig. 39.



der Linie OB. Die Bewegungen von p und q sind einfache Schwingungen im Diameter AA'; und wenn Q' der Punkt ist, in dem die Verlängerung von Qq den kleineren Kreis schneidet, so kann man diese Bewegungen als die Projektionen (auf die Diameter) der Bewegungen der Punkte P und Q' betrachten, die die Kreise in derselben Richtung durchlaufen. Infolgedessen setzen sich die Bewegungen nach dem vorausgeschickten Theorem zu einer einzigen einfachen Schwingung zusammen. Ebenso ergeben die Bewegungen von p' und q' eine einfache Schwingung im Diameter BB'. Also setzt sich die Bewegung von R aus zwei einfachen Schwingungen in aufeinander senkrechten Linien zusammen.

Es seien x, y die Verrückungen von R längs OA, OB. Dann ist, wenn $OP = a$, $OQ = b$, $\angle BOP = \angle BOQ = nt$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sin nt - b \sin nt = (a - b) \sin nt \\ y &= a \cos nt + b \cos nt = (a + b) \cos nt \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (54)$$

Die Amplituden längs OA, OB sind $a - b$ bezw. $a + b$.

Die Beziehung zwischen dem x und y eines beliebigen Bahnpunktes von R kann durch Elimination von nt zwischen den beiden eben hingeschriebenen Formeln gefunden werden. So erhalten wir durch Quadrieren und Addieren:

$$\frac{x^2}{(a-b)^2} + \frac{y^2}{(a+b)^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

womit eine Ellipse dargestellt ist, deren Halbaxen $a - b$, $a + b$ sind (s. §§ 69, 75).

Wenn b gleich Null wäre, so würden wir eine einzelne gleichförmige Kreisbewegung haben, die demnach zwei gleichen einfachen Schwingungen in aufeinander senkrechten Linien und von einer Phasendifferenz von 90° äquivalent ist (vergl. § 72).

62. Elliptische Bewegung, erzeugt durch einen Kreis, der in einem anderen herumrollt. Es ist von Interesse, diesen Fall von Bewegung in der durch Fig. 40 (a. f. S.) angedeuteten Art zu betrachten. Denken wir uns einen Kreis vom Durchmesser OS in innerer Berührung mit einem Kreise vom doppelten Radius in diesem herumrollend in der durch den Pfeil angezeigten Richtung, d. h. in Kontakt bleibend, während sein Mittelpunkt P mit der Winkelgeschwindigkeit n um O rotiert und jeder seiner Radien mit derselben Winkelgeschwindigkeit in der entgegengesetzten Richtung um P rotiert. Es möge PS_0 ein Radius sein, der in der Richtung OA lag, als OP in derselben Richtung war, und R ein Punkt auf diesem Radius oder auf seiner Verlängerung. Der Winkel SPS_0 ist offenbar $2 \cdot \angle SOA$. Daher ist der Bogen SS_0 des kleineren Kreises gleich dem Bogen SA des größeren, und daher sind die aufeinander folgenden Punkte von SS_0 mit denen von SA ohne relative Bewegung längs der Tangente, so-

genanntes Gleiten, in Berührung gekommen, d. h. die Bewegung ist eine ausschließlich rollende. Augenscheinlich ist die Bewegung von R genau die des Punktes R in Fig. 39, die eben behandelt worden ist. Daher beschreibt, wenn ein Kreis in einem anderen vom doppelten Radius rollt, irgend ein fester Punkt in dem rollenden Kreise eine Ellipse; und wenn die Bewegung mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit vor sich geht, setzt sie sich aus zwei zueinander rechtwinkeligen einfachen Schwingungen zusammen.

Die Ellipse wird zur geraden Linie, nämlich zu einem Durchmesser des größeren Kreises in dem Falle, wo der Punkt R auf der Peripherie

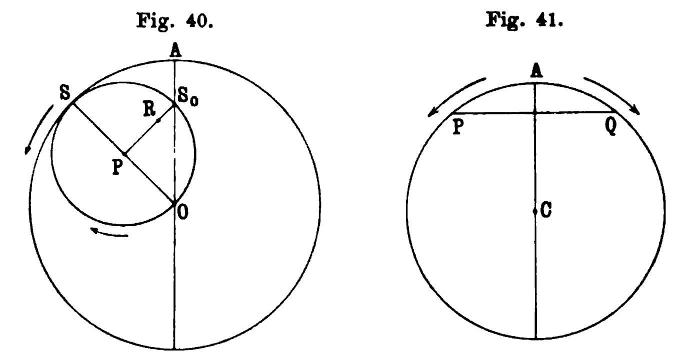


Fig. 40. Fig. 41.

des rollenden Kreises liegt; der entgegengesetzte Endpunkt des Durchmessers durch R beschreibt den zu dem durch R beschriebenen senkrechten Durchmesser. Diese Fälle können leicht als Spezialfälle der eben gefundenen dargestellt werden.

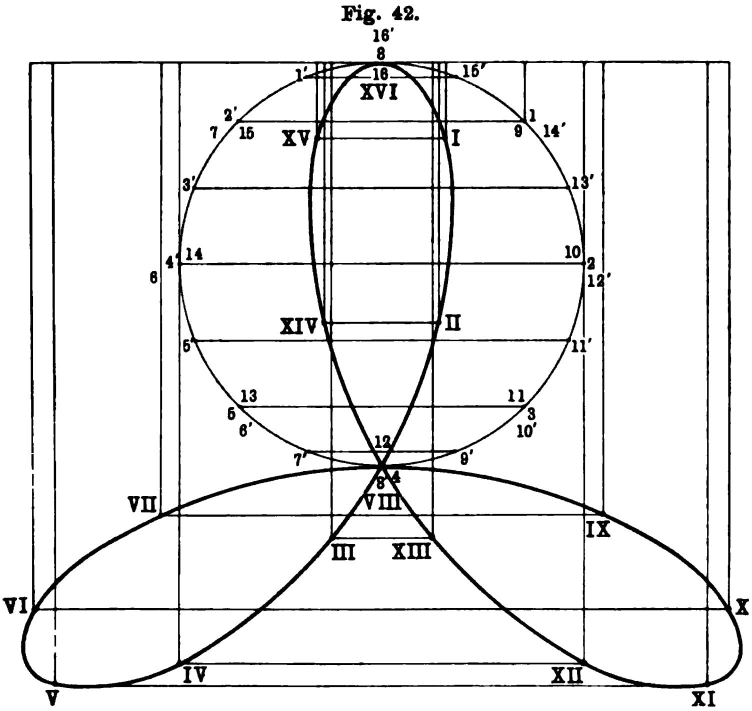
63. Resultante aus zwei gleichen und entgegengesetzten Kreisbewegungen. Es folgt aus dem Obigen, daß die Zusammensetzung von zwei gleichen und entgegengesetzten Kreisbewegungen eine einfache Schwingung ergibt von derselben Periode und von einer Amplitude gleich dem doppelten Radius des Kreises, und zwar in derjenigen Linie, welche den Winkel zwischen den nach den gleichzeitigen Stellungen der Teilchen gezogenen Radien halbiert. Es seien also in Fig. 41 P, Q die Lagen der Teilchen, deren Bewegungen auf dem Kreise APQ zusammengesetzt werden sollen, und es sei CA senkrecht zu PQ gezogen. Die zu CA senkrechten Komponenten der beiden Bewegungen heben einander auf, so daß die Resultante eine Bewegung auf dem Radius AC gleich der Summe der gleichen Komponenten der Kreisbewegungen längs dieser Linie ist. Wie man sieht, ist die Richtung von AC immer dieselbe.

64. Resultante entgegengesetzter Kreisbewegungen von ungleichen Perioden. Wenn indessen die Geschwindigkeiten von P und Q ungleich sind, wird die Linie CA ihre Richtung ändern mit einer

Winkelgeschwindigkeit, die der Hälfte der Differenz der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Radien gleich ist, und wird sich in derselben Richtung wie der schneller fortschreitende Radius um C drehen.

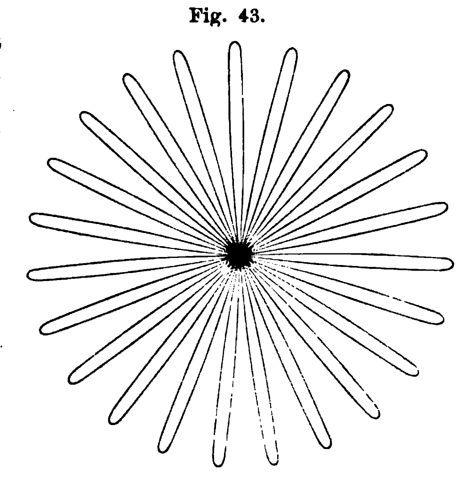
Nun sind, wenn T die Periode von P, T' die von Q bezeichnet, die Winkelgeschwindigkeiten n, n' gleich $2\pi/T$, $2\pi/T'$, und die

Fig. 42.



halbe Differenz, die Winkelgeschwindigkeit von CA, ist $\pi(1/T-1/T')$ in der durch den linken Pfeil in Fig. 41 angegebenen Richtung (tatsächlich also nach links, wenn $T < T'$, nach rechts, wenn $T > T'$ ist). Die Bahn des Teilchens, das die resultierende Bewegung ausführt, ist eine sternförmige Kurve von der Form der Fig. 42 und 43. In dem in Fig. 42 dargestellten besonderen Falle ist die Winkelgeschwindigkeit rechts doppelt so groß wie

Fig. 43.



links; die 16 typischen Lagen während einer Periode sind durch Ziffern angegeben, und zwar für die rechte Komponente durch 1 bis 16, für die linke durch 1′ bis 16′, für die Resultante durch I bis XVI. Letztere ist, wie man sieht, in diesem Falle kleeblattartig. Einen anderen Fall stellt Fig. 43 dar; hier weichen die beiden Komponenten nur wenig voneinander ab, und infolgedessen ist die Umdrehungsperiode der resultierenden Bewegung ungefähr das $12^1/_2$fache von der von jeder der Komponenten.

Diese Fälle von Bewegung sind von großer Wichtigkeit in der Theorie des polarisierten Lichtes und der Drehung der Polarisationsebene in Medien wie Quarz, Zuckerlösungen, Weinsteinsäure u. s. w., sowie in der magneto-optischen Theorie im allgemeinen.

65. Resultante zweier gleich oder entgegengesetzt gerichteter Kreisbewegungen von ungleicher Periode und ungleichem Radius. Ein wichtiger und interessanter Fall ist der eines Teilchens, dessen Bewegung die Resultante aus zwei konzentrischen Kreisbewegungen ist, die von ungleicher Periode und ungleichem Radius sind. Die Verrückung des Teilchens ändert sich augenscheinlich von einem Minimum, das der Differenz der Radien gleich ist, bis zu einem Maximum, das ihrer Summe gleich ist, abwechselnd hin und her.

Der Betrag der Verrückung ist durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sin nt + b \sin n't \\ y &= a \cos nt + b \cos n't \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

gegeben, die aus Gl. (54) entstehen, wenn die Periode von P gleich $2\pi/n$ und die von Q gleich $2\pi/n'$ wird und die Kreisbewegungen im gleichen Sinne erfolgen.

Um die Gleichungen für diesen Fall zu deuten, wählen wir als Nullpunkt der Zeitrechnung einen von denjenigen Momenten, in welchen die Verrückungen in den Kreisbewegungen gleiche Richtung haben. Dann wird offenbar in irgend einem darauf folgenden Moment $\theta = (n - n')t$, vorausgesetzt, daß $n > n'$ ist. Also haben wir für die Amplitude c der resultierenden Bewegung und den Phasenwinkel φ ($= \angle\, POR$, Fig. 38)

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos (n - n')t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

und

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b \sin (n - n')t}{a + b \cos (n - n')t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57')$$

Wenn $(n - n')t = m\pi$ ist, wo m eine ganze Zahl ist, so haben wir $c = a + b$ oder $c = a - b$, je nachdem m gerade oder ungerade ist, und wenn $(n - n')t = (2m + 1)\pi/2$ ist, so haben wir $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Der Wert von φ ist immer ein solcher, daß die resultierende Verrückung zwischen den beiden fortschreitenden Radien liegt in demjenigen Winkel, welcher kleiner als π ist, ausgenommen in den kri-

tischen Lagen, wo sie, beim Hindurchgehen durch Null, von der einen Seite des schneller fortschreitenden Radius zur anderen übergeht.

Der Leser mag, von den Grundprinzipien ausgehend (indem er t eine kleine Änderung dt erteilt, die entsprechende Änderung $d\theta$ von θ berechnet und den Grenzwert von $d\theta/dt$, wenn dt unendlich klein wird, findet), die Winkelgeschwindigkeit der resultierenden Verrückung in jedem Augenblicke berechnen.

Die Ergebnisse für den Fall zweier ungleicher Bewegungen von verschiedener Periode und entgegengesetzter Richtung erhält man natürlich aus den Ergebnissen in dem soeben behandelten Falle durch Änderung des Vorzeichens von n'.

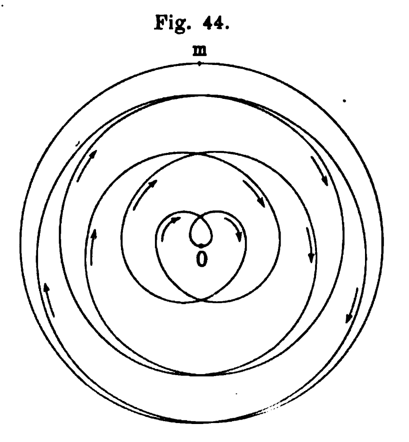
Haben die beiden entgegengesetzten Kreisbewegungen gleichen Radius, so variiert c zwischen $2a$ und 0. Setzt man nun

$$n = \frac{2\pi}{T}, \quad n' = \frac{2\pi}{T'},$$

wo $T < T'$ sei, so ist die Zeit von einem Strahl zum nächsten $TT'/(T + T')$ und der zugehörige Zentriwinkel von rechts nach links $2\pi T'/(T + T')$.

66. Fall zweier ähnlicher Kreisbewegungen von gleichem Radius und ungleicher Periode. In dem besonderen Falle der gleichgerichteten Bewegung, in welchem die Verrückungskomponenten gleich sind, ist es klar, daß die resultierende Verrückung alsdann $2a \cos \frac{1}{2}(n - n')t$ ist, und daß ihre Richtung immer den Winkel (der kleiner ist als π) zwischen den beiden fortschreitenden Radien halbiert. Die Winkelgeschwindigkeit dieser Halbierungslinie ist offenbar $\frac{1}{2}(n + n')$ oder $\pi(1/T + 1/T')$. In der unendlich kurzen Zeit, worin die sich drehenden Radien durch eine Oppositionsstellung hindurchgehen, geht die den Winkel zwischen ihnen halbierende Linie durch einen Winkel π von einer Seite der beiden Linien auf die andere (während gleichzeitig ihre Länge durch Null hindurchgeht) und bewegt sich dann weiter mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{1}{2}(n + n')$, bis wieder die Opposition erreicht ist u. s. f.

Fig. 44.



Die resultierende Bewegung kann als einfache Schwingung mit variierender Phase betrachtet werden, deren Amplitude zwischen Null und der doppelten Amplitude jeder einzelnen Kreisbewegung hin und her wechselt, wie sich die Richtung ändert (Fig. 44). Wenn $2\pi t/T = 2\pi t/T' + n\pi$ ist, so haben wir $\pi t(1/T + 1/T')$

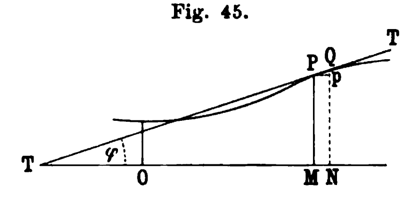
$= 2\pi t/T' + n\pi/2$. Also sind, wenn wir bei Koinzidenz beginnen, die Richtungen der Komponenten zusammenfallend oder entgegengesetzt, und die Amplitude ist nach Gl. (57) die Summe der Radien oder Null, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Die Änderung der Amplitude kann in Fig. 44 verfolgt werden, indem man nach der dort ersichtlichen Kurve Radien von dem Punkte O, wo die Amplitude Null ist, zieht. Wenn man den Pfeilen folgt, wird man sehen, daß die Kurve eine Art von Spirale ist, die aus zwei Zweigen, einem äußeren und einem inneren, besteht, die bei m ineinander übergehen. Der äußere wird von dem Teilchen beschrieben, wenn es sich von O fortbewegt, bis es m erreicht, von wo es auf dem inneren Zweige nach O zurückkehrt, um von neuem die äußere Bahn zu beschreiben u. s. f.

Fig. 43 und 44 können auch als Beispiele für die Cykloiden- und Trochoidenkurve betrachtet werden; wir werden ihnen im Zusammenhange mit der Schwingungsbewegung wieder begegnen.

67. Verrückungskurve. Die veränderliche Verrückung eines Punktes wird häufig so wie in Fig. 45 dargestellt, wo die Strecke OM längs der Linie OX der Zeit vom gewählten Nullpunkte der Rechnung proportional ist, und die Entfernung MP des Punktes P von OX die Verrückung oder eine ihr proportionale Größe ist. Die Verrückung kann natürlich von beliebiger Art sein, z. B. Entfernung des beweglichen Punktes von einem festen Punkte, einer festen Linie oder einer festen Ebene, oder längs einer beliebigen Kurve von einem festen Punkte nach der beweglichen gemessene Entfernung.

Fig. 45.



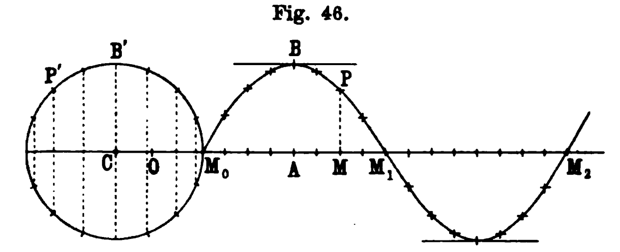
Wenn, wie wir annehmen, die so erhaltene Verrückungskurve stetig ist, kann eine bestimmte Tangente PT an die Kurve in einem beliebigen Punkt P gezogen werden, und dieser wird im Grenzfalle mit einem unendlich kleinen Kurvenelement PQ zusammenfallen. Das Verhältnis, in dem MP sich pro Einheit des Zuwachses von OM ändert, also Qp/MN, ist also genau $tang\,\varphi$, wo φ die Neigung von PT gegen OX ist. Folglich ist $tang\,\varphi$ der dem Punkte P, entsprechend der durch MP dargestellten Verrückung, eigentümlichen Geschwindigkeit proportional.

68. Einfache Schwingung, dargestellt durch die Sinuskurve. Eine wichtige Anwendung dieses graphischen Verfahrens ist die auf die einfache Schwingung. Hier (Fig. 46) stellt OM die Zeit seit dem Nullpunkte der Rechnung und MP die Verrückung $s = a\cos(nt - \varepsilon)$ dar. Also stellt OA die Phase der Bewegung im Zeitmaß dar, AB das Maximum der positiven Verrückung und M_0M_1, M_1M_2 die halbe Periode.

Die Strecken M_0A, M_0M ... sind den entsprechenden Winkeln $B'CM_0$, $P'CM_0$, die in dem Kreise vom Mittelpunkte C und Radius gleich AB ersichtlich sind, proportional; und daher sind die Ordinaten den Sinus dieser Winkel proportional. Aus diesem Grunde wird die von P ausgezogene Kurve, wie schon früher angeführt wurde, gewöhnlich Sinuskurve genannt.

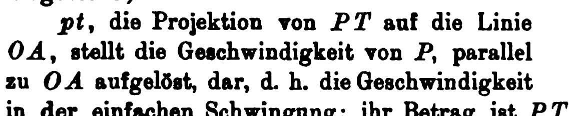
Man kann ohne weiteres aus der Figur ersehen, daß die Geschwindigkeit des Punktes ein numerisches Maximum in der Mittellage hat,

Fig. 46.



d. h. wenn P auf der Axe OM_1 ist. Die Geschwindigkeiten an den verschiedenen Punkten der Kurve können ebenfalls durch eine Sinuskurve graphisch dargestellt werden. Zeichnen wir einen neuen Kreis (Fig. 47) mit O als Mittelpunkt und dem Radius gleich dem des Kreises in Fig. 46; der Punkt P soll das Teilchen in der umschreibenden Kreisbewegung darstellen, und die von dem sich drehenden Radius OP mitgeführte Linie PT die konstante Geschwindigkeit des Teilchens in dem Kreise. (Wenn a der Radius des Kreises und n die Winkelgeschwindigkeit $2\pi/T$ ist, so wird na durch PT dargestellt.)

Fig. 47.



pt, die Projektion von PT auf die Linie OA, stellt die Geschwindigkeit von P, parallel zu OA aufgelöst, dar, d. h. die Geschwindigkeit in der einfachen Schwingung; ihr Betrag ist $PT \sin POp$, oder $na \sin(nt - \varepsilon)$.



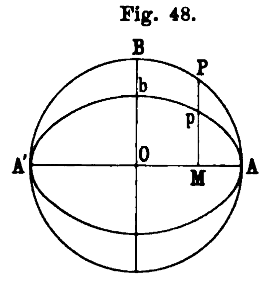
Folglich ist, wenn Op, d. h. $OP \cos POp$ oder $a \cos(nt - \varepsilon)$ die Verrückung darstellt, die zugehörige Geschwindigkeit $-na \sin(nt - \varepsilon)$, und ihre successiven Werte ergeben ebenfalls eine Sinuskurve. Diese Kurve wird manchmal die erste abgeleitete von der ersten Kurve genannt. Tatsächlich ist es die frühere Kurve, deren sämtliche Ordinaten mit n multipliziert sind, und die längs OX durch eine Strecke, die drei Viertel einer Periode darstellt, nach links verschoben ist.

Auf dieselbe Weise kann die erste Abgeleitete dieser Kurve, also die zweite Abgeleitete der ursprünglichen, entworfen werden; und da die Ordinaten der so erhaltenen Kurve den Veränderungen derer der zweiten Kurve proportinal sind, stellen sie in der in der Zeichnung an-

gewandten Skala die Beschleunigungen in der ersten Kurve dar. Wir kehren tatsächlich zu der ursprünglich entworfenen Kurve zurück mit dem Unterschiede, daß jede von ihren Ordinaten mit n^2 multipliziert und in die entgegengesetzte Richtung verkehrt ist.

69. Entstehung der Sinuskurve aus dem Kreiszylinder. Die Sinuskurve ist diejenige Kurve, welche entsteht, wenn man auf ein Blatt Papier, das um einen Kreiszylinder herumgelegt ist, den Umriß eines ebenen Schnittes durch den Zylinder schräg zur Axe aufzeichnet und dann das Papier wieder als ebenes Blatt aufrollt. Eine zur Axe senkrechte Fläche, die durch den Mittelpunkt des schrägen Schnittes hindurchgeht, schneidet das Papier in einer Linie, welche auf dem ebenen Blatte die Axe der Kurve ist. Die Konstruktion ist klar, da die Ordinaten der Kurve Projektionen der Ordinaten des Kreises aus Fig. 46 sind, die in einen Kreisschnitt des Zylinders gezeichnet und durch die Erzeuger des Zylinders auf den schiefen Schnitt projiziert sind.

Fig. 48.



Die Schnittkurve des Zylinders, Ellipse genannt, ist von großer Wichtigkeit in der Astronomie, der Elastizitätstheorie und anderen Zweigen der Physik. Es möge, obgleich die Kurve in § 74 bis 80, und zwar im Zusammenhange mit ihren Anwendungen, behandelt werden wird, gleich hier bemerkt werden, daß eine Ellipse dadurch von einem Kreise abgeleitet werden kann, daß man alle Ordinaten senkrecht zu einem vertikalen Durchmesser in gleichem Verhältnis kürzt (oder verlängert), wie in Fig. 48; dort ist die Ellipse AbA' vom Kreise ABA' abgeleitet durch Verkürzung sämtlicher Ordinaten (wie MP auf Mp) im Verhältnis von OB zu Ob. Dies geht klar aus der soeben erläuterten Art der Ableitung hervor.

70. Zusammensetzung einfacher Schwingungen mit Hilfe ihrer Sinuskurven. Zwei oder mehr einfache Schwingungen von verschiedenen Perioden und Phasen, aber auf derselben Linie, werden zusammengesetzt, indem man einfach die Verrückungen in den verschiedenen Bewegungen für jeden Augenblick addiert. Die resultierende Verrückung ist die Verrückung in diesem Augenblicke in der resultierenden Bewegung. Dies kann durch graphische Darstellung geschehen, indem man die die verschiedenen Bewegungen darstellenden Sinuslinien mit einer gemeinsamen Axe OX

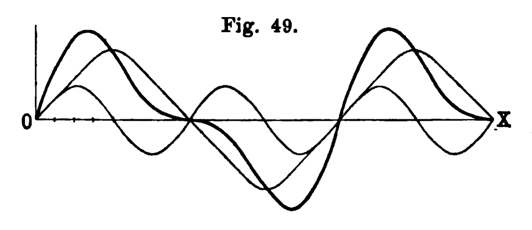


Fig. 49.

Fig. 50.

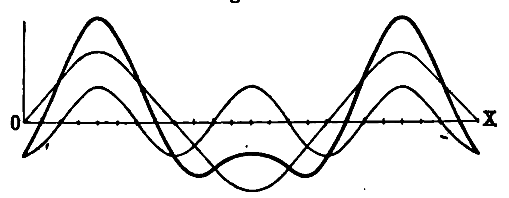


Fig. 51.

zeichnet, und dann diejenige Kurve ermittelt, von deren Ordinaten jede die Summe der entsprechenden Ordinaten der die Teilbewegungen darstellenden Kurven ist. So stellt Fig. 49 (s. S. 66) die Resultante der zwei Bewegungen

$$s_1 = a_1 \sin nt, \quad s_2 = \frac{a_1}{2} \sin 2nt,$$

Fig. 50 (s. v. S.) die Zusammensetzung der Bewegungen

$$s_1 = a_1 \sin nt, \quad s_2 = \frac{a_1}{2} \sin\left(2nt - \frac{\pi}{2}\right)$$

dar; bei beiden hat also die zweite Komponente die halbe Periode und die halbe Amplitude der ersten, dagegen ist die Phasendifferenz bei jener null, bei dieser $\pi/2$. Endlich veranschaulicht Fig. 51 (s. v. S.) die Art und Weise, wie sich die Form der Resultante ändert, wenn *ceteris paribus* die Phasendifferenz in 16 Stufen von 0 bis auf 2π anwächst (die letzte Form ist weggelassen, da sie gleich der ersten ist); das Amplitudenverhältnis der Komponenten ist beidemal 1, dagegen ist ihr Periodenverhältnis links 1 : 2, rechts 2 · 3 (d. h. links wie bei einer Oktave, rechts wie bei einer Quinte).

71. Mechanische Zusammensetzung einfacher Schwingungen. Flutmesser und Flutvorhersager. Die Resultante einer Reihe einfacher Schwingungen in einer Linie kann graphisch verzeichnet werden, indem man mit Hilfe eines geeigneten Mechanismus die resultierende Verrückung in jedem Augenblicke auf eine Feder oder einen Stift überträgt, der die resultierende Kurve auf ein Blatt Papier hinschreibt, das durch ein Uhrwerk gleichmäßig und in senkrechter Richtung zu der Linie, in der die schreibende Spitze sich frei bewegt, an dieser vorbeigezogen wird. So verzeichnet in einem Flutmesser eine durch eine Welle auf der Oberfläche des Wassers in einem Hafen oder Dock bewegte Feder die wechselnde Höhe der Flut in einer geeigneten Skala auf ein Blatt Papier, das fortwährend durch eine daraufhin regulierte Uhr, die ebenso die Zeit in gleichen Zwischenräumen durch eine leichte Bewegung der Feder vermerkt, an der Feder vorbeigezogen wird. Auf diese Weise werden die Grundlagen für die Anwendung einer anderen Maschine gewonnen, die ebenfalls einfache Schwingungen zusammensetzt und Kurven zeichnet, deren Ordinaten die Fluthöhen in aufeinanderfolgenden Augenblicken einer beträchtlich entfernten Zukunft darstellen.

Bei dieser von Lord Kelvin erfundenen Flutankündigungsmaschine (vgl. § 582) läuft eine feine Kette zur Hälfte um jede einzelne von einer Anzahl von Rollen, die, alle gleich groß, in zwei Reihen oben und unten an einer vertikalen Platte angebracht sind, und zwar derart, daß die Kette von einer Reihe zur anderen übergeht, wenn sie von einer Rolle zur anderen übergeht, und daß alle nicht auf den Rollen liegenden

Teile der Kette parallel sind. Die Zentren der Rollen liegen auf Stiften, deren jeder durch einen, einen Kreis durchquerenden und in einem Querspalt (wie oben, § 44 beschrieben wurde) wirkenden Zapfen gezwungen ist, einfache Schwingungen in Linien, parallel den freien Kettenteilen, zu beschreiben. Diese Zapfen werden, nachdem sie auf die geeigneten Amplituden und Epochen eingestellt worden sind, durch ein Uhrwerk in den geeigneten relativen Perioden mittels einer einzigen, von dem Arbeitenden gedrehten Kurbel getrieben. Die Bewegung jedes Zapfens entspricht einer Flutkomponente, und je nachdem sich die Rollen bewegen, wird das freie Ende der Kette, an welchem der Schreibstift befestigt ist, um eine Strecke steigen oder fallen, welche die Resultante der Verrückungen aller Rollen in der entsprechenden Zeit ist; auf einem durch den treibenden Mechanismus vorbeigeführten Papierstreifen wird auf diese Weise die veränderliche Höhe des Wassers registriert. Schwankungen in der Geschwindigkeit der Bewegung können das Ergebnis nicht beeinträchtigen, da die verschiedenen einfachen Schwingungen und das Vorbeigleiten des Streifens in gleichem Maße beeinflußt werden.

72. Gleichförmige Kreisbewegung, abgeleitet aus zwei einfachen Schwingungen. Wie schon in § 61 festgestellt wurde, ist eine gleichförmige Kreisbewegung mit zwei einfachen Schwingungen in aufeinander senkrechten Durchmessern des Kreises äquivalent. Diese Bewegungen stehen in dem Verhältnis zueinander, daß, wenn die Verrückung bei einer von ihnen null ist, sie bei der anderen ein Maximum ist; in der Tat, wenn die gleichzeitigen Verrückungen bei ihnen mit x und y bezeichnet werden, so ist:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos(nt - \varepsilon) \\ y &= a \sin(nt - \varepsilon) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (58)$$

Diese Gleichungen können in die übereinstimmende Form

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos(nt - \varepsilon) \\ y &= a \cos(nt - \eta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (59)$$

gebracht werden, wo $\eta = \varepsilon + \pi/2$ ist; die Phasen ε und η der beiden Bewegungen differieren also um $\pi/2$.

Umgekehrt ist es einleuchtend, daß zwei einfache Schwingungen in aufeinander senkrechten Linien, von gleicher Periode und der Phasendifferenz $\pi/2$ durch Zusammensetzung eine gleichförmige Kreisbewegung liefern. Quadriert und addiert man die Gleichungen (58), so erhält man

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

woraus hervorgeht, daß der Punkt P auf einem Kreise vom Radius a liegt.

73. Projektion des Kreises auf die Ellipse. Nun wollen wir die Projektion eines Kreises auf eine unter irgend einem Winkel gegen seine Ebene geneigte Ebene mittels paralleler Linien betrachten. Die

Projektion ist eine geschlossene Kurve und heißt Ellipse; einige ihrer Eigenschaften wollen wir jetzt untersuchen.

Es ist klar, daß gerade Linien in der Kreisebene sich als gerade Linien, und daß parallele Linien sich als parallele Linien projizieren. Auch leuchtet ein, daß die Länge aller paralleler Linien durch die Projektion in demselben Verhältnis geändert wird, und daß somit das Längenverhältnis irgend zweier Parallellinien gleich dem ihrer Projektionen ist.

Dagegen ist der Winkel zwischen den Projektionen zweier Linien im allgemeinen verschieden von dem Winkel zwischen den Linien selbst; so werden z. B. zwei zueinander senkrechte Sehnen des Kreises zu zwei sich schief schneidenden Sehnen der Ellipse; und insbesondere werden die Durchmesser AA', BB' des Kreises in Fig. 52 zu den Durchmessern aa', bb' der Ellipse.

Fig. 52.

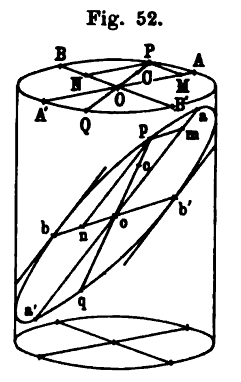
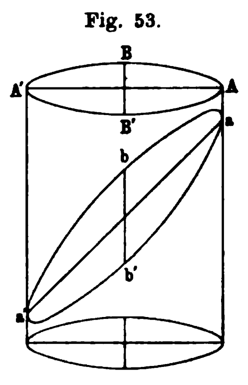


Fig. 53.



74. Eigenschaften der Ellipse. Wenn PQ eine Sehne des Kreises ist, die durch einen Punkt C in einem gewissen Verhältnis geteilt wird, so wird die Projektion pq der Sehne durch den Punkt c, die Projektion von C, in demselben Verhältnis geteilt. Ein Kreisdurchmesser halbiert alle Sehnen, die auf ihm senkrecht stehen, und projiziert sich in eine Linie, die ihrerseits die Projektionen dieser Sehnen halbiert. Irgend zwei Durchmesser des Kreises projizieren sich in zwei Sehnen der Ellipse, die sich halbieren, und der Schnittpunkt ist die Projektion des Kreismittelpunktes. Alle durch diesen Punkt gehenden Sehnen werden daselbst halbiert; er heißt deshalb der Mittelpunkt der Ellipse, und jede durch ihn beiderseits bis zur Kurve gezogene Linie heißt ein Durchmesser.

Eine den Kreis schneidende Linie liefert eine die Ellipse schneidende Linie, eine den Kreis berührende Linie liefert eine die Ellipse berührende Linie. Denn wenn eine den Kreis schneidende Linie um einen der Schnittpunkte so lange gedreht wird, bis der andere mit ihm zusammenfällt, so wird sich die Projektion des beweglichen Punktes

längs der Ellipse bis zur Koinzidenz mit dem festen Punkte bewegen; die Linie und ihre Projektion werden also gleichzeitig zu Tangenten.

Da ein Kreisdurchmesser alle Sehnen halbiert, die zu den Tangenten in seinen Endpunkten parallel sind, und da sich parallele Linien in parallele projizieren, so ist eine Tangente an eine Ellipse parallel zu den Sehnen, die durch den nach dem Berührungspunkte gezogenen Durchmesser halbiert werden; die Tangenten in den entgegengesetzten Endpunkten eines Durchmessers sind demnach parallel. Ist z. B. bb' in Fig. 52 ein Durchmesser der Ellipse, der bei o, im Zentrum, halbiert wird, so sind die Tangenten in b und b' untereinander und zu allen durch bb' halbierten Sehnen parallel. Der Durchmesser aa', der zu den Tangenten in b und b' parallel ist, und der Durchmesser bb' heißen konjugiert; die Tangenten in a und a' sind parallel zu bb', und jeder der beiden Durchmesser halbiert alle mit den anderen parallelen Sehnen.

Es sei AA' (Fig. 53) ein Durchmesser des Kreises und aa' der entsprechende Durchmesser einer durch Projektion senkrecht zur Kreisebene erhaltenen Ellipse. Wenn sich die Ebene, auf welche sich der Kreis projiziert, um die Verbindungslinie der Mittelpunkte dreht, ändert sich die Länge aa' des Durchmessers und ist offenbar dann ein Maximum, wenn die Linien Aa, $A'a'$ ihre größte Längenverschiedenheit haben, und ein Minimum, wenn sie von gleicher Länge sind. Eine Linie von gegebener Länge AA' muß aber, um ihre größte Projektion auf die schiefe Ebene zu haben, senkrecht zur gemeinsamen Halbierungslinie der beiden Ebenen gezogen werden, d. h. senkrecht zu den in beiden Ebenen parallelen Linien; darum ist ihre Projektion senkrecht zu diesen Linien; folglich ist der größte Durchmesser der Ellipse senkrecht zum kleinsten.

Diese Durchmesser sind zugleich konjugierte Durchmesser. Denn nehmen wir BB' (Fig. 53) als denjenigen Durchmesser des Kreises, welcher sich in den kleinsten Durchmesser bb' der Ellipse projiziert, so projiziert sich die Tangente an den Kreis in B in die Tangente an die Ellipse in b; und da bb' mit BB' parallel ist, so ist es senkrecht zu der durch Bb und die Tangente in B definierten Ebene. Folglich ist es senkrecht zu der in dieser Ebene gelegenen Tangente in b; ebenso ist bb' senkrecht zu der Tangente in b'. Der konjungierte Durchmesser aa' schneidet demnach bb' rechtwinkelig, und die Tangenten in ihren Endpunkten sind mit bb' parallel; er fällt mit dem größten Durchmesser zusammen.

75. Gleichung der Ellipse. Die mit kleinen Buchstaben bezeichneten Punkte in Fig. 52 sollen die Projektionen der mit großen Buchstaben bezeichneten Punkte des oberen Kreises darstellen; dann sind, wenn AA', BB' zueinander senkrechte Durchmesser des Kreises sind, aa', bb', ihre Projektionen, konjugierte Durchmesser der Ellipse. P sei ein Punkt auf dem Kreise, OM, ON $(= MP)$ die Koordinaten

von P, auf OA, OB als Axen bezogen, om, on ($= np$) ihre Projektionen. Da nun die Verhältnisse der parallelen Linien durch die Projektion nicht verändert werden, so haben wir

$$\frac{OM}{OA} = \frac{om}{oa}, \quad \frac{ON}{OB} = \frac{on}{ob};$$

nun ist aber

$$\frac{OM^2}{OA^2} + \frac{ON^2}{OB^2} = 1;$$

folglich ergeben die obigen Beziehungen:

$$\frac{om^2}{oa^2} + \frac{on^2}{ob^2} = 1.$$

Wenn wir a, b für die Längen der konjugierten Halbaxen oa, ob und x, y für die Längen von om, mp schreiben, wird aus der letzten Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (60)$$

Dies ist die durch die Koordinaten eines Punktes auf einer Ellipse, bezogen auf ein Paar konjugierter Axen als Koordinatenaxen, erfüllte Beziehung.

Die soeben gefundene Beziehung kann man in der Form

$$\frac{on^2}{ob^2} = 1 - \frac{om^2}{oa^2} = \frac{(oa + om)\,(oa - om)}{oa^2} = \frac{a'm \, . \, ma}{oa^2}$$

oder

$$a'm \, . \, ma = \frac{oa^2}{ob^2} mp^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (61)$$

schreiben, im Gegensatz mit der durch Punkte auf dem Kreise erfüllten Beziehung

$$A'M \, . \, MA = \frac{OA^2}{OB^2} MP^2 \; (= MP^2).$$

Aus der Tatsache, daß Verhältnisse paralleler Linien gleich bleiben, folgt auch, daß die Rechtecke über den Segmenten einander schneidender Sehnen den Quadraten über den parallelen Durchmessern proportional sind. Wenn also pcq, $p'cq'$ zwei in c sich schneidende Sehnen und oa', ob' die Längen der parallelen Halbaxen sind, so ist

$$pc \, . \, cq = \frac{oa'^2}{ob'^2} p'c \, . \, cq' \quad \ldots \ldots \quad (62)$$

76. Hauptdurchmesser der Ellipse. Polare Gleichung der Ellipse. Ziehen wir eine Tangente nach einem Punkte p der Ellipse, lassen wir sie die konjugierten Durchmesser aa', bb' (Fig. 54) in s und t treffen und ziehen wir den halben Durchmesser oq parallel mit st. In dem Kreise, von dem aus diese Linien projiziert sind, liegen die

Durchmesser AA', BB' senkrecht zueinander, OQ ist der mit der Tangente parallele Radius, und wir haben:

$$SP.PT = OQ^2$$

Da die Verhältnisse paralleler Linien durch die Projektion nicht verändert werden, so haben wir auch in der Ellipse: $sp.pt = oq^2$.

Diese Beziehung ermöglicht die Bestimmung der Hauptaxen der Ellipse, wenn ein Paar konjugierte Axen nach Lage und Größe gegeben sind.

Denn nehmen wir in Fig. 55 einen Punkt r auf der Verlängerung von oa, derart, daß $oa.ar = ob^2$ wird, und schlagen wir von einem

Fig. 54.

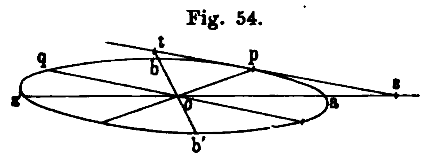
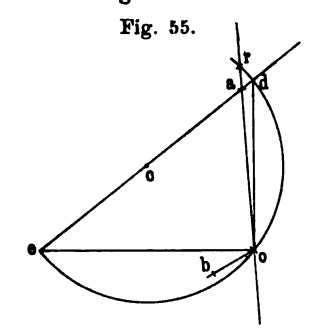


Fig. 55.



Mittelpunkte c in der Tangente in a einen Kreis durch o, r, der die Tangente ac in den Punkten d und e schneidet. Dann müssen, da $ea.ad = oa.ar = ob^2$ ist, oe, od längs konjugierten Halbaxen liegen, und diese sind senkrecht zueinander, da der Winkel eod in einem Halbkreise liegt. Die längere Hauptaxe heißt die große Axe, die andere die kleine Axe. Wir werden die Längen der Haupthalbaxen mit a, b bezeichnen.

Wenn wir jetzt ϱ für die Länge des Radiusvektors vom Mittelpunkte nach einem beliebigen Punkte auf der Ellipse, θ für den Winkel, den der Radiusvektor mit einer in der Ellipsenebene festen Linie, α für den Winkel, den die positive große Halbaxe mit der festen Linie bildet, setzen, so haben wir $\angle\, oap = \theta - \alpha$; ferner ist:

$$x = \varrho \cos(\theta - \alpha), \quad y = \varrho \sin(\theta - \alpha);$$

folglich wird aus der Gleichung (60):

$$\varrho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 (\theta - \alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

wo $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ ist. Daraus ergibt sich ϱ für jeden Wert von θ. Man sieht, daß die Gleichung zwei gleiche und entgegengesetzte Werte von ϱ für einen gegebenen Wert von θ ergibt.

φ sei der Winkel zwischen dem Lot vom Mittelpunkte auf eine Tangente einerseits und dem Radiusvektor nach dem Berührungspunkte andererseits; dann kann der Leser, indem er

$$\varrho \cos \varphi = \frac{\varrho^2 d\theta}{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\theta^2}}$$

ausrechnet, sich überzeugen, daß die Länge p des Lotes vom Mittel-

punkte nach einer in dem Endpunkte eines Radiusvektors ϱ berührenden Tangente (wenn $\alpha = 0$ ist) durch die Gleichung

$$p = \frac{b\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}{\sqrt{e^2 \cos^2 \theta\, (e^2 - 2) + 1}} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (64)$$

gegeben wird.

77. Flächeninhalt einer Ellipse. Wenn A der Flächeninhalt irgend einer ebenen Figur ist, so ist der Flächeninhalt ihrer Projektion durch Linien, die senkrecht zu ihrer Ebene liegen, auf eine um einen Winkel θ zu der ersten geneigten Ebene (d. h. für die der Winkel zwischen zwei in den Ebenen und senkrecht zu ihrer Schnittlinie gezogenen Linien θ ist) gleich $A/\cos\theta$. Denken wir uns nämlich die Fläche in sehr schmale Streifen geteilt, deren Seiten sämtlich senkrecht zu der Linie, in der die Ebenen sich schneiden, liegen. Jeder Streifen ist ein Rechteck plus einem kleinen Teile an jedem Ende, das durch die gekrümmte Grenze der Fläche entsteht. Die Länge l eines beliebigen Rechteckes ändert sich in $l/\cos\theta$, während seine Breite unverändert bleibt. Wenn A' die Summe der Flächen der Rechtecke ist, so ist die Summe ihrer projizierten Flächen $A'/\cos\theta$. Verglichen mit A' kann die Differenz $A' - A$ beliebig verkleinert werden, indem man die Streifen genügend schmal nimmt; folglich erhalten wir für die projizierte Fläche genau den Wert $A/\cos\theta$.

Ebenso ist, wenn die Fläche auf die zweite Ebene durch Linien, die senkrecht zu dieser sind, projiziert wird, die Projektionsfläche $A\cos\theta$. Diese Resultate sind, wie bemerkt werden muß, unabhängig von der Lage der gegebenen Figur in ihrer Ebene.

Wir sehen also, daß, wenn ein Quadrat um einen Kreis beschrieben und diese Figur projiziert wird, aus dem Kreise eine Ellipse und aus den Seiten des Quadrates vier ein umschriebenes Parallelogramm bildende Tangenten werden.

Wenn a', b' die Längen der konjugierten Halbaxen parallel zu den Tangenten sind und θ der Winkel zwischen ihnen ist, so haben wir für den Flächeninhalt des Parallelogrammes den Wert $4a'b'\sin\theta$, und dies gilt für alle konjugierten Axenpaare. Darum ist, wenn a, b die Längen der Haupthalbaxen sind, $a'b'\sin\theta = ab$. Da nun der Flächeninhalt des Kreises πb^2 ist (angenommen die Halbaxe b wäre gleich dem Radius des Kreises), ist der Flächeninhalt der Ellipse πab. Für die Halbaxen a', b' tritt an die Stelle hiervon $\pi a'b'\sin\theta$.

78. Brennpunkte und Brennpunktseigenschaften der Ellipse. Es ist hier nicht Raum für weitere Behandlung der Geometrie der Ellipse; aber aus den oben gegebenen Resultaten können verschiedene Eigenschaften der Kurve mit großer Leichtigkeit abgeleitet werden. Wenn wir z. B. die Hauptaxen als Koordinatenaxen nehmen, und zwei Punkte SS' (Fig. 56) auf der großen Axe so festsetzen, daß $S'C = CS$

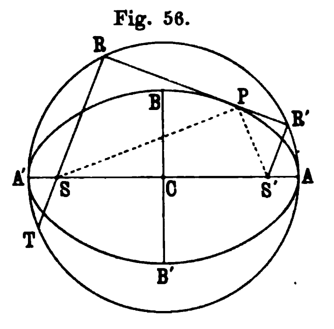
$= \sqrt{a^2 - b^2}$ wird, kann der Leser sofort beweisen, daß, wenn wie vorher, $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ ist, dann auch $S'P = a - ex$, $SP = a + ex$ wird, so daß

$$SP + S'P = 2a$$

wird. Das Verhältnis e heißt die Exzentrizität der Ellipse.

Die Punkte SS' heißen die Brennpunkte der Ellipse und spielen eine große Rolle in der Diskussion der Eigenschaften der Kurve. Eine Ellipse von den Halbaxen a, b, also von der Exzentrizität $\sqrt{a^2 - b^2}/a$, kann man sich auf die folgende Art entstanden denken. Stechen wir zwei Nadeln in ein Blatt Papier, um $2ea$ voneinander entfernt, und befestigen wir an ihnen einen dünnen Faden derart, daß er zwischen ihnen eine Länge von $2a$ besitzt. Wenn wir dann den Faden mittels eines Stiftes fassen und, während jener steif bleibt, diesen rund herumführen, so entsteht eine geschlossene Kurve, die sich als Ellipse von den gewünschten Dimensionen herausstellen wird.

Fig. 56.



Ferner, wenn, wie in Fig. 56, eine Tangente an eine Ellipse in einem beliebigen Punkte P gezogen und so verlängert wird, daß sie den um die große Axe der Ellipse beschriebenen Kreis in den Punkten RR' trifft, so sind die von den Brennpunkten gezogenen Linien SR, $S'R'$ senkrecht zur Tangente, und $SR \,.\, S'R'$ ist gleich b^2; oder, was dasselbe besagt, wenn RS so verlängert wird, daß es den Kreis in T wieder trifft, ist $RS \,.\, ST = b^2$. Diese Eigenschaft wird bei der Behandlung der elliptischen Bewegung, d. h. der Bewegung eines Teilchens in einer elliptischen Bahn, unter einer beständig nach einem der Brennpunkte gerichteten Beschleunigung von großem Nutzen sein.

Der Leser mag sich auch davon überzeugen, daß die von den Brennpunkten nach einem beliebigen Punkte gezogenen Linien $S'R$, SR mit der Tangente in P gleiche Winkel bilden, und daß folglich die Normale in einem beliebigen Punkte den Winkel zwischen den Brennpunktsradien dieses Punktes halbiert. Auch kann er die, gewöhnlich zur Definition der Kurve benutzte Eigenschaft feststellen, daß die Entfernung irgend eines Punktes P auf der Kurve von einem der Brennpunkte, z. B. S', ein bestimmtes Verhältnis e (kleiner als die Einheit) zu seiner Entfernung von einer Direktrix genannten geraden Linie hat, die senkrecht zu der großen Axe gezogen wird und sie in einem Punkte X in einer Entfernung AX vom Scheitelpunkte, die gleich $S'A/e$ ist, schneidet.

79. Polare Brennpunktsgleichung der Ellipse. Die polare Gleichung der Ellipse mit einem Brennpunkte als Pol, d. h. die Be-

ziehung zwischen der Länge des Radiusvektors vom Brennpukt nach irgend einem Kurvenpunkte und dem Winkel θ, den seine Richtung mit einer in der Ebene festen Richtung bildet, wird leicht gefunden. Nehmen wir als Pol den Brennpunkt S links vom Mittelpunkt in Fig. 56; der Winkel, den der Radiusvektor mit der positiven Richtung der großen Axe bildet, sei $\theta - \alpha$. Da $\varrho = a + ex$ ist und $x = \varrho \cos(\theta - \alpha) - ae$, so haben wir $\varrho = a(1 - e^2) + e\varrho \cos(\theta - \alpha)$, woraus sich

$$\varrho = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos(\theta - \alpha)} \quad \ldots \ldots \quad (65)$$

ergibt. Wenn $\alpha = 0$ ist, d. h. wenn θ von SA ab gemessen wird, so wird die Gleichung einfacher

$$\varrho = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos\theta} \quad \ldots \ldots \quad (66)$$

Die Länge p der Senkrechten vom Brennpunkte auf die Tangente in irgend einem Punkte ist $\varrho^2 d\theta/\sqrt{\varrho^2 d\theta^2 + d\varrho^2}$. Diese letzte Gleichung ergibt:

$$p = \frac{b^2}{a\sqrt{1 - 2e\cos\theta + e^2}} \quad \ldots \ldots \quad (67)$$

80. Kegelschnitte. In der Ellipse ist e immer kleiner als 1, es gibt aber eine andere Kurve, die Hyperbel, die ebenfalls durch das eigentümliche Verhältnis von Brennpunkt und Direktrix definiert wird, mit dem Unterschiede, daß $e > 1$ ist. Die Eigenschaften dieser Kurve entsprechen genau denen der Ellipse, obgleich sie keineswegs mit den letzteren identisch sind. Eine dritte Kurve, die Parabel, kommt heraus, wenn $e = 1$ wird, d. h. die Entfernung irgend eines Kurvenpunktes vom Brennpunkt seiner Entfernung von der Direktrix gleich wird.

Man kann die Kurven dadurch erhalten, daß man an einem geraden kreisförmigen Doppelkegel Schnitte ausführt. Ein Schnitt durch eine Ebene, die mit der Axe einen größeren als den Kegelwinkel bildet, ergibt eine Ellipse; ein Schnitt durch eine Ebene, die mit der Axe einen kleineren als den Kegelwinkel bildet, ergibt eine Hyperbel, die, wie wir sehen werden, zwei unendliche Zweige hat (da wir uns den Kegel in die Unendlichkeit fortgesetzt denken), während eine Parabel durch einen Schnitt parallel zu einer erzeugenden Linie entsteht; also besteht die Parabel aus einem einzigen unendlichen Zweige.

Diese Art, Kurven zu erzeugen, motiviert ihre übliche Benennung als Kegelschnitte. Der Leser kann die Kurven beobachten, indem er, mit Hilfe einer kleinen Lichtquelle, etwa der Flamme einer kurzen Kerze, den Schatten einer Kreisscheibe (etwa eines Suppentellers) auf den Fußboden oder die Zimmerwand wirft. Im ersten Falle, wenn die Flamme höher steht als alle Teile der Scheibe, wird der Schatten eine Ellipse sein, die natürlich zur geraden Linie wird, wenn die Scheibe mit ihrer Kante gegen die Lichtquelle steht. Wenn sich die Flamme

in einer Höhe zwischen den höchsten und tiefsten Punkten der Scheibe befindet, wird die Schattengrenze der eine Zweig einer Hyperbel sein, der von dem unter der Flamme befindlichen Scheibenrand geworfen wird; die von dem oberen Teile des Scheibenrandes rückwärts verlängerten Strahlen würden den anderen Zweig der Kurve auf den Fußboden zeichnen. Es ist klar, daß die Zweige unendlich sind, da die horizontalen Strahlen den Fußboden erst in der Unendlichkeit treffen.

Wenn sich die Lichtquelle in gleicher Höhe mit dem höchsten Punkte der Scheibe befindet, kann der andere Zweig überhaupt nicht als vorhanden angesehen werden; dann ist die Kurve eine Parabel.

81. Einfache Schwingungen in konjugierten Durchmessern einer Ellipse ergeben elliptische Bewegung. Wenn wir jetzt zur einfachen Schwingung als Quelle der Kreisbewegung zurückkehren, so sehen wir, daß die rechtwinkeligen Komponenten

$$x = a \cos(nt - \varepsilon), \quad y = a \cos\left(nt - \varepsilon + \frac{\pi}{2}\right)$$

sich in einfache Schwingungen in den konjugierten Durchmessern einer Ellipse projizieren, von den Amplituden a', b', den Längen der konjugierten Halbaxen und einer Phasendifferenz von $\pi/2$ im Winkelmaß oder einer Viertelperiode in Zeitmaß. Ferner ist die Resultante der beiden soeben beschriebenen einfachen Schwingungen eine elliptische Schwingung, die man durch Projektion aus einer gleichförmigen Kreisschwingung erhalten kann.

Es muß bemerkt werden, daß die Phasendifferenz nicht der Winkel zwischen den konjugierten Durchmessern ist. Die Zeit, die ein vom Mittelpunkt der Ellipse nach der Projektion des im Kreise fortschreitenden Teilchens gezogener Radius braucht, um einen der vier Winkel in der Ellipse zwischen einer und der anderen der konjugierten Halbaxen zu durchmessen, ist natürlich eine Viertelperiode. Die Winkelgeschwindigkeit des Radius, der nach dem in der elliptischen Bewegung befindlichen Teilchen gezogen wird, ist am größten an den Enden der kleinen und am kleinsten an den Enden der großen Axe.

82. Geschwindigkeiten in der elliptischen Bewegung. Die Größen der Linien- und Winkelgeschwindigkeiten in irgend einem Punkte der elliptischen Bahn können folgendermaßen gefunden werden. Der vom Mittelpunkte des Kreises nach dem in der Peripherie fortschreitenden Teilchen gezogene Radius hat die Winkelgeschwindigkeit n und beschreibt gleichen Flächeninhalt in gleichen Zeiten. In einer kurzen Zeit dt ist also die zurückgelegte Fläche $\frac{1}{2} r^2 n\,dt$, da sie sehr annähernd ein Dreieck von der Basis $rndt$ und der Höhe r ist. Also ist $\frac{1}{2} r^2 n$ die Geschwindigkeit, mit der der Radius die Fläche beschreibt. Wenn der Reihe nach lauter Zeiträume von gleicher Länge dt genommen werden, so werden die aufeinander folgenden Flächen $\frac{1}{2} r^2\,ndt$

alle gleich sein, und ihre Projektionen auf die Ellipsenebene werden ebenfalls gleich sein. Wenn nun ω die Winkelgeschwindigkeit des Radiusvektors für irgend eine Lage des Punktes auf der Ellipse, v die lineare Geschwindigkeit des Punktes, ϱ die Länge des Radiusvektors und p die der vom Mittelpunkte auf die Tangente in diesem Punkte gefällten Senkrechten ist, so ist die in der Zeit dt beschriebene Fläche $\frac{1}{2}\varrho^2\omega dt = \frac{1}{2}pvdt$. Also haben wir:

$$\omega = \frac{r^2}{\varrho^2}\frac{n}{\cos\theta}, \quad v = \frac{r^2}{p}\frac{n}{\cos\theta},$$

wo θ der Winkel zwischen den Ebenen des Kreises und der Ellipse in Fig. 52 ist. Die Winkelgeschwindigkeit ist also umgekehrt proportional dem Quadrat der Länge des Radiusvektors, die lineare Geschwindigkeit ist umgekehrt proportional dem Lot vom Mittelpunkt auf die Tangente. Die Längen des Radiusvektors und der Senkrechten vom Mittelpunkte auf die Tangente in ihrem Endpunkte ist oben, § 76, gegeben.

83. Zusammensetzung einfacher Schwingungen in aufeinander senkrechten Richtungen. Wenn die zusammen zu setzenden Schwingungen in aufeinander senkrechte Richtungen fallen, so ist die resultierende Bewegung auch dann noch elliptisch, wenn die Phasendifferenz einen anderen Wert als eine Viertelperiode hat. Man kann dies auf folgende Weise einsehen. Es seien die gegebenen Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos(nt-\varepsilon) \\ y &= b\cos(nt-\eta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

Dieselben ergeben entwickelt $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, wo

$$x_1 = a\cos\varepsilon\cos nt, \quad x_2 = a\sin\varepsilon\sin nt$$
$$y_1 = b\cos\eta\cos nt, \quad y_2 = b\sin\eta\sin nt$$

ist. Die Komponenten x_1, y_1 ergeben einfache Schwingung in einer geraden Linie, deren Gleichung lautet:

$$b\cos\eta\,.\,x_1 - a\cos\varepsilon\,.\,y_1 = 0.$$

Ebenso ergeben die Komponenten x_2, y_2 geradlinige, einfache Schwingung in der Linie:

$$b\sin\eta\,.\,x_2 - a\sin\varepsilon\,.\,y_2 = 0.$$

Folglich haben wir in diesen Linien die beiden einfachen Schwingungen:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{a^2\cos^2\varepsilon + b^2\cos^2\eta}\,.\cos nt \\ s_2 &= \sqrt{a^2\sin^2\varepsilon + b^2\sin^2\eta}\,.\sin nt \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (69)$$

Sie sind in dem Winkel

$$arc\,tg\left(\frac{b\cos\eta}{a\cos\varepsilon}\right) - arc\,tg\left(\frac{b\sin\eta}{a\sin\varepsilon}\right)$$

gegeneinander geneigt und haben eine Phasendifferenz von einer Viertelperiode. Sie ergeben daher Schwingungsbewegung in einer Ellipse, von der diese beiden Linien konjugierte Durchmesser sind. Die Längen

der konjugierten Halbaxen sind die Koeffizienten von $\cos nt$, $\sin nt$ in den obigen Werten von s_1, s_2.

Wenn die Perioden zweier einfacher Schwingungen, die zusammengesetzt werden sollen, nicht genau gleich sind, so ist der Betrag der Ungleichheit äquivalent einer Phasendifferenz, die bei jeder Periode hinzukommt. Die Bewegung ist in jedem Augenblick sehr annähernd eine Ellipse, aber infolge der also anwachsenden Phasenänderung ändert sich fortwährend die Lage der Axen der Ellipse. So kann man mit einem Apparate, der die fortwährend sich ändernde Bahn verzeichnet, diese Erscheinung studieren, die der der Umdrehung der Apsiden einer Planetenbahn analog ist.

84. Allgemeiner Fall der Zusammensetzung einfacher Schwingungen. Hat man eine beliebige Zahl einfacher Schwingungen von beliebigen Amplituden, Phasen und Richtungen, aber gleicher Periode, so kann man zeigen, daß sie zwei Komponenten äquivalent sind, die eine Phasendifferenz von $\pi/2$ haben und somit eine elliptische Schwingung von der eben besprochenen Art ergeben. Denn wenn $s = a\cos(nt - \varepsilon)$ eine jener Einzelbewegungen ist mit einer Richtung, deren Kosinus l', m', n' sind, so kann man sie in Komponenten längs der Koordinatenaxen zerlegen vom Betrage

$$\begin{aligned} x &= l'a \cos\varepsilon \cos nt + l'a \sin\varepsilon \sin nt \\ y &= m'a \cos\varepsilon \cos nt + m'a \sin\varepsilon \sin nt \\ z &= n'a \cos\varepsilon \cos nt + n'a \sin\varepsilon \sin nt. \end{aligned}$$

Verfährt man für alle Einzelschwingungen in dieser Weise und addiert, so erhält man unter Benutzung des Summenzeichens Σ:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma x &= A \cos nt + A' \sin nt \\ \Sigma y &= B \cos nt + B' \sin nt \\ \Sigma z &= C \cos nt + C' \sin nt \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{array}{lll} A = \Sigma\,(l'\,a\cos\varepsilon), & B = \Sigma\,(m'\,a\cos\varepsilon), & C = \Sigma\,(n'\,a\cos\varepsilon), \\ A' = \Sigma\,(l'\,a\sin\varepsilon), & B' = \Sigma\,(m'\,a\sin\varepsilon), & C = \Sigma\,(n'\,a\sin\varepsilon) \end{array}$$

gesetzt ist. Nunmehr kann man die ersten Glieder auf den rechten Seiten von Gl. (70) zu einer, die zweiten Glieder zu einer anderen einfachen Schwingung zusammensetzen; erstere erfolgt in einer Linie, deren Richtungskosinus

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

letztere in einer Linie, deren Richtungskosinus

$$\frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \qquad \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \qquad \frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

sind, jene ist durch

$$s = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cos nt \quad \ldots \ldots \quad (71)$$

diese durch

$$s' = \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2} \sin nt \quad \ldots \ldots \quad (72)$$

gegeben. Die Bewegung ist somit auf zwei Bewegungen zurückgeführt, die gegeneinander um den Winkel

$$\arccos \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

geneigt sind und eine Phasendifferenz von einer Viertelperiode haben. Die schließliche resultierende Bewegung ist also wieder eine elliptische Schwingung, von der die soeben bestimmten Linien zwei konjugierte Axen sind.

85. Zusammensetzung zweier zueinander senkrechter Schwingungen vom Periodenverhältnis 1:2. Wir wollen nun in Kürze zwei einfache, zueinander senkrechte Schwingungen betrachten, deren Perioden nicht gleich sind, aber im Verhältnis zweier ganzer Zahlen stehen, während ihre Phasen um irgend einen Betrag differieren. Sie sollen demgemäß dargestellt sein durch die Ausdrücke

$$x = a \cos(mt - \varepsilon), \quad y = b \cos nt,$$

wo m und n ganze Zahlen sind. Die Gleichung der resultierenden Bahn wird erhalten durch Elimination von t aus den beiden Gleichungen, wodurch sich eine Beziehung zwischen x, y und den drei Konstanten a, b, ε ergibt.

Einige spezielle Fälle mögen dies erläutern. Es sei z. B. $m = 2n$ (entsprechend dem in der Musik als Oktave bezeichneten Intervall); dann sind die Bewegungsgleichungen:

$$x = a \cos(2nt - \varepsilon), \quad y = b \cos nt.$$

Entwickelt man den Ausdruck für x und setzt y/b für $\cos nt$, $\sqrt{1 - y^2/b^2}$ für $\sin nt$, so erhält man

$$x = a\left[\left(\frac{2y^2}{b^2} - 1\right)\cos\varepsilon + \frac{2y}{b}\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\sin\varepsilon\right] \quad \ldots \quad (73)$$

als Gleichung der Bahn.

Für $\varepsilon = 0$ reduziert sich die Gleichung auf

$$y^2 = \frac{b^2}{2a}(x + a) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (74)$$

wodurch eine Parabel dargestellt ist. Die Bahn ist also ein Bogen einer Parabel, die zur x-Axe symmetrisch ist und durch die äußersten Werte von x und y begrenzt wird. In der Fig. 57 ist sie durch die erste Zeichnung veranschaulicht, und zwar ist hier wie in allen weiteren Zeichnungen der Fig. 57 $a = b$ angenommen, also gleiche Amplitude für beide Komponenten.

Für $\varepsilon = \pi$ ist die Kurve auch eine Parabel, aber eine statt nach rechts nach links offene, für $\varepsilon = 2\pi$ wieder nach rechts u. s. w.

Für $\varepsilon = \pi/2$ ist die Bahngleichung

$$b^4 x^2 = 4a^2 y^2 (b^2 - y^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

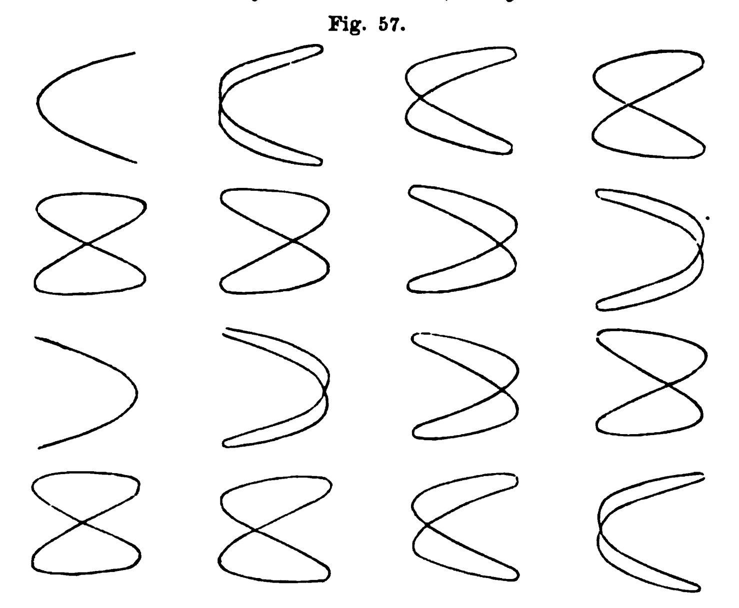
also eine durch den Nullpunkt gehende Kurve. Ihr Charakter in der Nähe dieses Nullpunktes erhellt aus der Gleichung, die aus der obigen entsteht, wenn y sehr klein angenommen wird; dann darf das zweite Glied rechts vernachlässigt werden, und es wird

$$b^2 x^2 = 4a^2 y^2$$

oder zerspalten:

$$bx - 2ay = 0 \text{ und } bx + 2ay = 0.$$

Fig. 57.



Hierdurch sind zwei gerade Linien dargestellt, die gegen die x-Axe um die Winkel

$$\pm \operatorname{arctg} \frac{b}{2a}$$

geneigt sind, so daß sie an gekreuzte Schwerter erinnern. Die Kurven, in die sie für größere x und y übergehen, haben diese geraden Linien zu Tangenten und den Nullpunkt zum Inflexionspunkt (fünfte Zeichnung der Fig. 57). Ferner hat man in diesem Falle, wenn $x = 0$ ist:

$$y^2 (y^2 - b^2) = 0, \text{ also } y = \pm 0 \text{ oder } y = \pm b;$$

d. h. die y-Axe schneidet die Kurve in vier Punkten, von denen zwei im Nullpunkte zusammenfallen (Kreuzungspunkt), einer ganz oben, einer ganz unten liegt. Dagegen ist für $y = 0$ auch $x = \pm 0$, wäh-

rend der Maximalwert von x nach rechts oder links für ein y eintritt, das sich durch Differentiation der Gleichung, also

$$2\,b^4 x \frac{dx}{dy} = 8a^2b^2y - 16\,a^2y^3$$

und Nullsetzung von dx/dy ergibt, also für $y = \pm\, b/\sqrt{2} = \pm\, 0{,}707\,b$. Die Kurve ist hiernach sowohl zur x-Axe als auch zur y-Axe symmetrisch und hat ein wenig die Form einer 8. Dieselbe Kurve ergibt sich übrigens für alle ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ als Phasendifferenz.

Ist die Phasendifferenz weder ein gerades noch ein ungerades Vielfaches von $\pi/2$, so liegt die Kurvengestalt zwischen einer Parabel und einer 8. In Fig. 57 sind diese Gestalten von 0 an für jedes um $\pi/8$ größere ε bis zu $2\,\pi$, also in 16 Fällen dargestellt; von nun an würden sich lediglich dieselben Figuren wiederholen.

Wenn die Perioden der beiden Einzelschwingungen sehr nahezu, aber nicht ganz genau im Verhältnis von 1 : 2 stehen, so ist die resultierende Bewegung in jedem Augenblicke, und annähernd auch während einer kurzen Zeit, diejenige der obigen Kurven, die der augenblicklichen Phasendifferenz entspricht; die Abweichung von dem genauen Periodenverhältnis hat aber zur Folge, daß die Phasendifferenz sich fortwährend ändert, und dies wiederum bringt es mit sich, daß die Bahn nach und nach alle die obigen Formen annimmt, daß also die Formen, von denen bei genauem Periodenverhältnis immer nur eine bestimmte auftritt, hier allmählich ineinander übergehen.

Nach dem französischen Physiker Lissajous, der diese und die analogen, noch zu besprechenden Figuren an Stimmgabeln beobachten lehrte, heißen dieselben Lissajoussche Figuren. (Näheres darüber in der Akustik.)

86. Zwei zueinander senkrechte Schwingungen vom Periodenverhältnis 2 : 3. Stehen die beiden Perioden im Verhältnis 2 : 3 (ent-

Fig. 58.

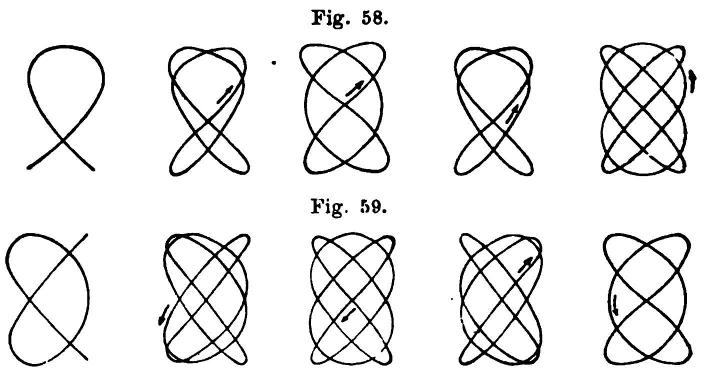


Fig. 59.

sprechend dem Intervall einer Quinte in der Musik), so ist die resultierende Schwingung verwickelter. In Fig. 58 sind die Schwingungs-

formen für die Phasendifferenzen 0, $\pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$, $\pi/2$ und $5\pi/8$ dargestellt. Entsprechende Bedeutung baben die Formen der Fig. 59 für das Periodenverhältnis 3 : 4 (musikalische Quart). Je größer die das Periodenverhältnis ausdrückenden Zahlen sind, desto verwickelter werden die Schwingungsformen.

87. Realisierung der zusammengesetzten Schwingungsfiguren. Die erläuterten Kurven können auf verschiedene Weise verwirklicht werden. Am bekanntesten ist die von Lissajous herrührende, schon erwähnte Methode der Anwendung zweier zueinander senkrechter, mit Lichtpunkten versehener Stimmgabeln, die durch ein Mikroskop beobachtet werden; es genüge hier dieser Hinweis. Von den übrigen Methoden wollen wir drei beschreiben mit dem Bemerken, daß es sehr nützlich ist, sie in recht mannigfaltigen Einzelfällen durchzuprobieren.

Man nehme, ebenfalls nach Lissajous' Vorgange, einen Glaszylinder (eine weite Glasflasche genügt) und zeichne auf gut durchsichtiges Papier eine Sinuskurve in solchem Maßstabe, daß auf eine Strecke gleich dem Umfange des Zylinders z. B. zwei Perioden entfallen; alsdann lege man das Papier einmal um den Zylinder herum. Blickt man nun aus hinreichender Entfernung nach ihm, so erblickt man die vordere und die hintere Hälfte der Sinuskurve aufeinander projiziert und kann durch Umdrehung des Glases der Reihe nach alle Gestalten der Schwingungskurve sehen: die Parabel (wenn beide Hälften sich decken), die 8 (wenn sie sich in der Mitte kreuzen) u. s. w. In Fig. 60

Fig. 60.



Fig. 61.



Fig. 62.



bis 62 sind diese beiden und ein dritter Fall veranschaulicht; die Figuren sind auf photographischem Wege hergestellt. Enthält die Sinuskurve auf einer dem doppelten Umfange des Glases entsprechenden Länge drei Perioden, so ist das Periodenverhältnis 2 : 3, und man erhält beim Drehen des Glases nach und nach die Formen der Fig. 58.

Auch auf folgende Art können die Kurven erhalten werden. Man zeichne auf ein Papierblatt ein Rechteck, dessen Seiten den doppelten Amplituden $2a$, $2b$ der Komponenten entsprechen. Ist ferner das Periodenverhältnis der ersten und der zweiten Komponente wie $m:n$,

so teile man die Rechteckseite $2a$ in pm, die Rechteckseite $2b$ in pn (ungleiche) Teile, wo p irgend eine geeignete ganze Zahl ist, und zwar in folgender Weise. Über den Seiten $2a$ und $2b$ als Durchmessern errichte man Halbkreise, teile deren Umfänge in pm bezw. pn gleiche Teile, projiziere die so erhaltenen Teilpunkte auf die betreffenden Durchmesser und verlängere die Projektionslinien durch das Rechteck hindurch bis zu den gegenüberliegenden Seiten. Auf diese Weise ist das Rechteck in p^2mn kleine Rechtecke geteilt, deren Größe von der Mitte nach den Rändern hin abnimmt. Jetzt geht man von einer Ecke irgend eines der kleinen Rechtecke aus, zieht eine Linie zu einer diagonal benachbarten Ecke und setzt dies fort, bis die Linie zu einer Ecke des großen Rechteckes führt oder sich selbst schließt. Genauer: Sobald man ein Randrechteck erreicht, führt man die Linie so, daß sie den Rand an der dem Eintritt entgegengesetzten Ecke des Rechtecks berührt und führt sie dann entgegengesetzt diagonal durch das nächste Randrechteck. Mit einiger Gewandtheit kann man ferner überall statt

Fig. 63.

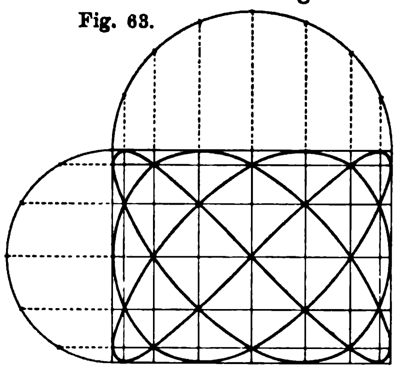
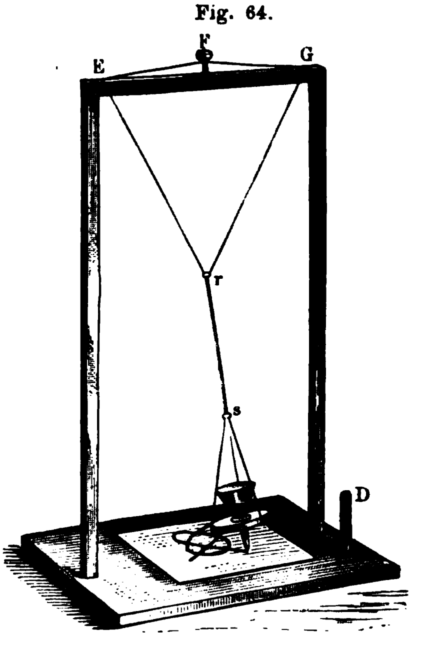


Fig. 64.



gerader Linien derart gekrümmte ziehen, daß sie sich ohne Knicke aneinander schließen. Die Zeichnung in Fig. 63, die auf diese Weise gewonnen ist, entspricht dem Falle $m = 4$, $n = 3$ und $p = 2$. Je größer man p wählt, desto genauer wird natürlich die Kurve.

88. Graphisches Doppelpendel. Die allereinfachste Methode, die Schwingungskurven darzustellen, ist aber wohl die Methode des graphischen Doppelpendels, das in Fig. 64 veranschaulicht ist. In E und G sind Fäden von gleicher Länge befestigt, die sich in r treffen, hier durch einen Ring gehen und von da ab nebeneinander verlaufen, um schließlich unten eine Kugel mit Schreibstift oder einen an drei Fäden hängenden Trichter zu tragen, in welchen Sand eingefüllt werden

kann. Das ganze Pendel kann nur senkrecht zur Ebene *EFG*, das Pendel *rs* auch in dieser Ebene schwingen, man kann also zwei aufeinander senkrechte Schwingungen zusammensetzen und zwar, da der Ring *r* verschiebbar ist, für beliebiges Periodenverhältnis der Komponenten (nur das Verhältnis 1:1 läßt sich nicht ganz genau herstellen, da man *r* nicht völlig in die Linie *EG* hinaufbringen kann); es ist dabei zu beachten, daß die Schwingungsdauer *n* von Pendeln sich nicht wie ihre Längen, sondern wie ihre Quadratwurzeln verhalten. Läßt man den mit einem Schreibstoff getränkten Stift über die Unterlage gleiten, oder läßt man den Sand aus dem Trichter auslaufen, so erhält man die betreffende Schwingungskurve; im ersten Falle wählt man passenderweise eine weiße, im letzteren eine schwarze Schreibfläche; der Stift gibt feinere Linien, stört aber durch die Berührung mit dem Papier ein klein wenig die Bewegung — ein Übelstand, den man durch Anwendung eines Kelvinschen Heberschreibers vermeiden kann. Zum Beginn kann man das Pendel in der abgelenkten Lage, von der man ausgehen will, mit einem feinen Fädchen an dem Rahmen oder sonst festbinden und dieses Fädchen dann mit einem Streichholz durchbrennen. Allerdings ist bei diesem Verfahren die Phasendifferenz der beiden Komponenten stets gleich null, und man muß sich in der Weise helfen, daß man das Periodenverhältnis von dem gewünschten ein wenig abweichen läßt, so daß (vergl. oben) sich nach und nach eine immer größere Phasendifferenz herstellt; ist die gewünschte erreicht, so beginnt man mit dem Schreiben, indem man die vorher abgerückte Schreibfläche in die Schreiblage bringt. Will man von vornherein Phasendifferenz haben, so muß man das abgelenkte Pendel mit einem Impuls in geeigneter Richtung und Stärke loslassen, worin man sich leicht die nötige Übung aneignet. Übrigens tut man gut, das Schreiben, nachdem die Kurve sich einmal oder einige Male geschlossen hat, abzubrechen, da die folgenden Kurven, die sich eigentlich mit der ersten decken müßten, wegen der Dämpfung der Pendelschwingungen sich allmählich nach innen ziehen.

89. Geschwindigkeitskurve; Strecke, die in einer gegebenen Zeit zurückgelegt wird. Die Strecke, die ein in gegebener Weise sich bewegendes Teilchen in irgend einer Richtung in irgend einer Zeit zurücklegt, kann man finden, indem man das sogenannte Integral, d. h. die Summe der Strecken nimmt, welche in aufeinanderfolgenden äußerst kleinen Zeitteilen zurückgelegt werden, wobei die mittlere Geschwindigkeit während jedes derselben aus dem bekannten Gesetz der Änderung der Geschwindigkeit berechnet wird. Dieser Prozeß, der, abgesehen von den praktischen, seine Ausführung betreffenden Regeln, in vielen Fällen höchst einfach in der Idee ist, wird mit Hilfe der hier folgenden Beispiele leicht begriffen werden. Es sei eine Kurve gezeichnet mit aufeinanderfolgenden Werten der Geschwindigkeit als

Ordinaten, und es soll der von der Kurve in einer gegebenen Zeit beschriebene Flächenraum berechnet werden. Fig. 65 stelle solch eine Kurve dar, AK sei die Geschwindigkeit zur Zeit $t = t_0$, zu welcher das gegebene Zeitintervall beginnt, BL die Geschwindigkeit zur Zeit t_1, dem Endpunkt jenes Intervalls, und RV die Geschwindigkeit in einem zwischen beiden gelegenen Moment t. Diesen letzteren Moment und ein sehr kleines, ihn in der Mitte enthaltendes Zeitteilchen dt wollen wir nun zunächst betrachten. Die Fläche, welche von dem diesem Zeitteilchen entsprechenden Kurvenstück UW (Fig. 66, etwas vergrößerter Maßstab), den Grenzordinaten QU und SW und dem zwischen ihnen liegenden Abscissenstücke QS eingeschlossen wird, liegt der Größe nach zwischen den Rechtecken $QUU'S'$ und $QW'WS$. Denn diese

Fig. 65.

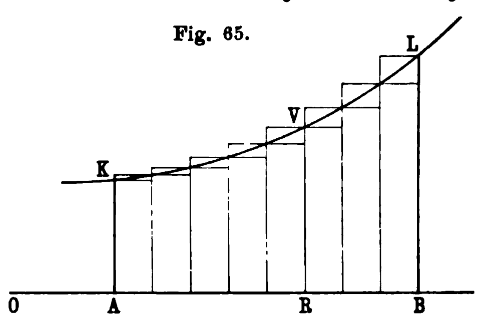


Fig. 66.

beiden Rechtecke sind die Produkte des Zeitteilchens dt einmal mit der Geschwindigkeit zu Anfang desselben, also kurz vor dem Moment t, das andere Mal mit der Geschwindigkeit am Ende von dt, also kurz nach dem Moment t; und das Zeitteilchen dt soll so kurz gewählt sein, daß die Geschwindigkeit während desselben nur zunimmt oder nur abnimmt (Ausnahmen s. w. u.). Die Größe $v dt$, wo v die Geschwindigkeit ist, liegt also zwischen jenen Rechtecken. Teilt man nun das ganze Zeitintervall $t_1 - t_0$ in sehr kleine Elemente dt (die nicht einmal gleich groß zu sein brauchen) und wendet obiges Resultat auf alle entsprechenden Kurvenelemente an, so sieht man ein, daß die ganze Fläche $AKLB$ kleiner ist als die Summe aller, wie wir sagen wollen, durch die obere Treppenlinie begrenzten Rechtecke, aber größer als die Summe aller durch die untere Treppenlinie begrenzten. Die Differenz zwischen beiden Summen aber, nämlich die Summe der durch die beiden Treppenlinien eingeschlossenen kleinen Rechtecke, wird offenbar immer kleiner und nähert sich der Null, wenn dt immer kleiner genommen wird. Damit erhält man, wenn Σ die Summe aller dahinterstehenden Elemente zwischen den oben und unten angegebenen Grenzen bezeichnet, das Resultat:

$$\text{Fläche } AKVLBRA = \sum_{t_0}^{t_1} v dt$$

oder, wenn man durch das aus einem S hervorgegangene besondere Summenzeichen $\int$, das sogen. Integrationszeichen, andeuten will, daß es sich um den Grenzwert handelt, den die Summe annimmt, wenn die Elemente unbegrenzt kleiner an Wert und unbegrenzt zahlreicher werden:

$$AKVLBRA = \int_{t_0}^{t_1} v dt.$$

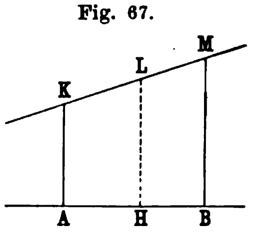
Das Verfahren, nach dem der Wert dieses Integrals ermittelt werden kann, wenn die Beziehung zwischen v und t bekannt ist, ist ein Gegenstand rein mathematischer Technik und gehört in die sogenannte Integralrechnung, die der Differentialrechnung ergänzend zur Seite steht, und deren Grundideen wie die jener sehr einfach sind und in mehr oder weniger unbewußter Art im Geiste jedes Menschen schlummern.

Wenn die Kurve an einer Stelle ein Maximum hat, was dann der Fall sein wird, wenn die Geschwindigkeit, die bisher zunahm, nunmehr abnimmt, so ist die obige Rechnung für das betreffende Rechteck allerdings fehlerhaft; dieser Fehler ist aber zu vernachlässigen, da er nur eines von unendlich vielen Rechtecken betrifft. Dasselbe gilt für den Fall eines Minimums der Kurve sowie auch dann, wenn mehrere solche Maxima und Minima vorhanden sind. Nur wenn diese Maxima und Minima sehr rasch aufeinander folgen und sich nicht gerade immer die hierdurch verursachten Fehler ausgleichen, tritt eine Schwierigkeit auf; diesen Fall brauchen wir indessen hier nicht zu verfolgen.

90. Integral der Geschwindigkeitskurve; gleichförmig beschleunigte Bewegung. Wir wollen nun ein paar Beispiele nehmen. Es ist für das Wesentliche unerheblich, vereinfacht aber die Schreibweise, wenn wir dabei $t_0 = 0$ setzen, d. h. wenn wir die Zeitrechnung mit dem Beginn des Zeitintervalls von t_0 bis t_1 beginnen lassen.

Die Geschwindigkeit ändere sich direkt proportional mit der Zeit, ihre Zunahme in der Zeiteinheit sei also eine Konstante a; der in der Zeit t_1 durchlaufene Flächenraum soll ermittelt werden. Es handelt sich also hier um den Fall gleichförmiger Beschleunigung in der Bewegungsrichtung. War die Geschwindigkeit gleich v_0 zur Zeit $t = 0$, so ist sie gleich $v_0 + at$ zur Zeit t und gleich $v_0 + at_1$ zur Zeit t_1. In Fig. 67 entspreche A dem Moment $t = 0$, H dem Moment t, B dem Moment t_1; ferner sei v_0 durch AK, v_1 durch BM dargestellt; zieht man nun die gerade Linie KM und errichtet in H eine Senkrechte bis zum Schnittpunkte L mit KM, so ist $HL = v$, der Geschwindigkeit in diesem Augenblicke. Die durchlaufene Strecke ist durch die Fläche $ABMK$ dargestellt, und diese ist gleich: $\frac{1}{2}(AK + BM).AB$ oder $\frac{1}{2}(v_0 + v_1)t$

Fig. 67.



Da nun $v_1 = v_0 + at_1$ ist, erhält man für die Strecke s_1:

$$s_1 = v_0 t_1 + \tfrac{1}{2} a t_1^2,$$

und ebenso natürlich für irgend eine Zeit t:

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (76)$$

Ersetzt man t durch seinen Wert $(v - v_0)/a$, so erhält man ferner:

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a},$$

oder, wie dies auch geschrieben werden kann:

$$as = \tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (77)$$

Diese letzte Gleichung ist von besonderer Wichtigkeit wegen ihrer später zu erörternden Beziehung zur Lehre von der Energie.

91. Fortsetzung; gedämpfte Bewegung. Als zweites Beispiel wollen wir den Fall betrachten, daß die Geschwindigkeit des bewegten Teilchens von dem Charakter $v_0 e^{-\lambda t}$ ist, wo λ eine Konstante ist. Es ist dies verwirklicht bei einem Teilchen, das bei seiner Bewegung eine der Geschwindigkeit proportionale Verzögerung erleidet. Die Kurve der Geschwindigkeiten für diesen Fall ist in Fig. 68 dargestellt; OA repräsentiert die Zeit t, OK die Anfangsgeschwindigkeit v_0, AL die Geschwindigkeit in irgend einem Momente, also:

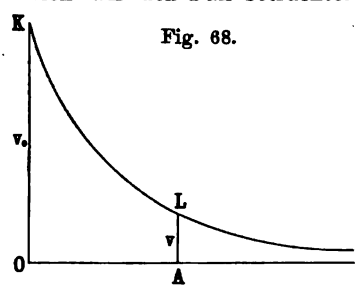


Fig. 68.

$$v = v_0 e^{-\lambda t}.$$

Die Geschwindigkeit, also auch die Kurvenordinate, nimmt hier in geometrischer Progression ab, wenn die Zeit in arithmetrischer wächst. Denn wenn man t in n aufeinanderfolgende Intervalle von gleicher Länge dt einteilt (so daß $t = ndt$ ist), so sind die Geschwindigkeiten am Ende des ersten, zweiten, ... $n$ten dieser Intervalle gegeben durch die Ausdrücke

$$v_0 e^{-\lambda dt}, \quad v_0 e^{-2\lambda dt}, \quad \ldots, \quad v_0 e^{-n\lambda dt}.$$

Der in der Zeit t durchlaufene Flächenraum wird daher kleiner als

$$v_0 dt + v_0 e^{-\lambda dt} dt + \cdots + v_0 e^{-(n-1)\lambda dt} dt,$$

aber größer als

$$v_0 e^{-\lambda dt} dt + v_0 e^{-2\lambda dt} dt + \cdots + v_0 e^{-n\lambda dt} dt$$

sein; denn der erste dieser Ausdrücke ist die Fläche, die beschrieben werden würde, wenn die Geschwindigkeit des Teilchens während jedes Zeitintervalls dt den Wert hätte, den sie am Anfange dieses Intervalles hat, der zweite aber ist die Fläche, die beschrieben werden würde,

wenn die Geschwindigkeit während jedes Intervalles den Wert hätte, den sie an seinem Ende hat. Der erste Ausdruck übertrifft nun den zweiten um

$$v_0 dt - v_0 e^{-n\lambda dt} dt,$$

oder, da $t = n dt$ ist, um

$$v_0 dt (1 - e^{-\lambda t}),$$

ein Betrag, der beliebig nahe an Null herangebracht werden kann, wenn dt genügend klein gewählt wird.

Ferner ergibt die erste Reihe, deren Wert s_1 sein möge, wenn sie Glied für Glied mit $e^{-\lambda dt}$ multipliziert wird, die zweite Reihe. Durch Subtraktion der zweiten Reihe von der ersten erhält man also die Beziehung

$$s_1 (1 - e^{-\lambda dt}) = v_0 dt\ (1 - e^{-n\lambda dt}) = v_0 dt\ (1 - e^{-\lambda t}),$$

und folglich:

$$s_1 = \frac{v_0 dt\ (1 - e^{-\lambda t})}{1 - e^{-\lambda dt}} = \frac{v_0 dt\ (1 - e^{-\lambda t})}{1 - e^{-\lambda t/n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

Der Grenzwert dieser Größe für unendlich kleine dt, also, wie man auch sagen kann, für unendlich großes n, ist die durchlaufene Fläche. Nun kann der Nenner in Gl. (78) in der Form der unendlichen Reihe

$$\frac{\lambda t}{n} - \frac{\lambda^2 t^2}{1.2.n^2} + \frac{\lambda^3 t^3}{1.2.3.n^3} - \cdots$$

geschrieben werden (vgl. oben in § 54 das Exponentialtheorem); eine Reihe, deren Glieder vom zweiten ab kleiner sind als die entsprechenden der geometrischen Reihe

$$\frac{\lambda t}{n} - \frac{\lambda^2 t^2}{n^2} + \frac{\lambda^3 t^3}{n^3} - \cdots$$

oder als

$$\frac{\lambda t}{n}\left(1 - \frac{\lambda t}{n} + \frac{\lambda^2 t^2}{n^2} - \cdots\right).$$

Der Grenzwert der jetzt in den Klammern stehenden Reihe ist für unendlich großes n nach dem früher Gesagten offenbar gleich 1, die ganze Reihe also $\lambda t/n$. Folglich ist der Grenzwert s von s_1 gegegeben durch die Formel:

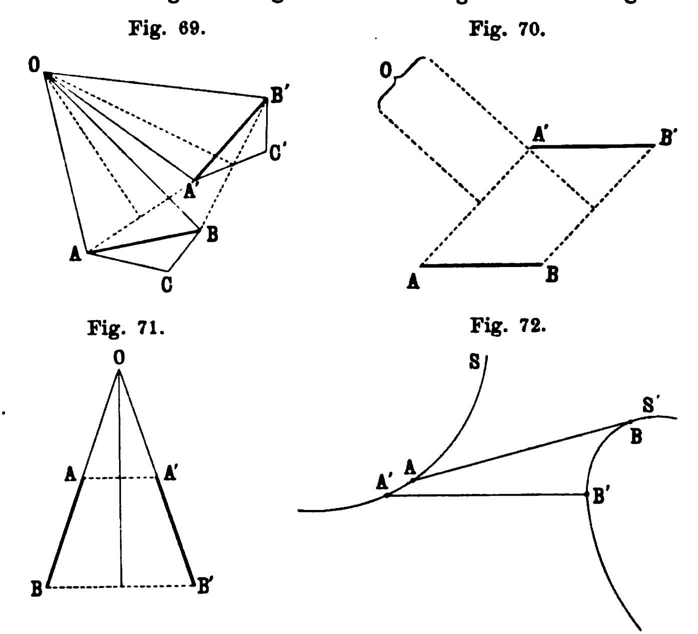
$$s = \frac{v_0 n dt}{\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}) = \frac{v_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

Die durchgeführte Rechnung wird sehr viel kürzer mit Hilfe der Integralrechnung erledigt; sie ist aber absichtlich etwas weitschweifig behandelt worden, weil sie eine treffliche Veranschaulichung der Theorie der Grenzwerte gibt.

92. Ebene Kinematik eines starren Systems. Wir wollen nun zur Kinematik eines starren Körpers übergehen, d. h. eines Körpers, dessen Teilchen eine unveränderliche relative Konfiguration haben, oder,

mit anderen Worten, eines Körpers, bei welchem der Abstand irgend zweier Teilchen voneinander konstant bleibt. Ferner wollen wir die Bedingung stellen, daß jeder Punkt des Körpers veranlaßt wird, sich parallel zu einer gegebenen Ebene zu bewegen. Wir brauchen in diesem Falle nur die Verrückungen von Punkten zu betrachten, die in einer zu jener parallelen Ebene des Körpers liegen, da alle Linien in dem Körper, die auf jener Ebene zu irgend einer Zeit senkrecht stehen, durchweg dieselbe Richtung beibehalten. Weiterhin wollen wir dann die Bewegung einer Ebene in dem Körper betrachten, welche auf einer im Raume festen Ebene gleitet. Die erste Ebene wollen wir die bewegliche oder fortgeführte, die letztere die feste Ebene nennen.

93. Verrückung infolge von Rotation bei Festhaltung eines Punktes. Zunächst kann irgend eine Verrückung des Körpers von irgend einer Anfangs- in irgend eine Endlage bewerkstelligt werden,



indem man den Körper um eine bestimmte, zur Bewegungsebene senkrechte Axe um einen gewissen Winkel dreht. Denn es sei in Fig. 69 AB irgend eine Linie in der Bewegungsebene in ihrer Anfangslage, $A'B'$ dieselbe Linie in ihrer Endlage. Man ziehe die Verbindungslinien AA', BB' und errichte in ihren Mittelpunkten Senkrechte, die sich in O schneiden mögen. Dann kann man AB nach $A'B'$ schaffen mittels einer Drehung um O, und das Gleiche gilt für die entsprechende Verrückung irgend einer anderen Linie in dem Körper. Es folgt das einfach daraus, daß, wenn man die Linien AO, BO und $A'O$, $B'O$ zieht,

die so entstehenden Dreiecke AOB, $A'OB'$ in jeder Hinsicht einander gleich sind, und daß deshalb auch der Winkel AOA' (nämlich $AOB + BOA'$) gleich dem Winkel BOB' (nämlich $BOA' + A'OB'$) ist. Der Winkel, um den gedreht wird, ist also $\theta = AOA' = BOB'$. Diese Schlußweise wird hinfällig erstens, wenn die beiden Lagen der Linie, AB und $A'B'$, einander parallel sind; denn dann sind (Fig. 70) auch die Linien AA' und BB' und folglich auch die in ihren Mitten errichteten Normalen parallel, d. h. ihr Schnittpunkt O liegt in der Unendlichkeit und der Winkel θ ist null, es findet also gar keine Drehung statt; und zweitens, wenn AB und $A'B'$ so zueinander liegen (Fig. 71), daß die Linien AA' und BB' Mittelnormalen haben, die miteinander zusammenfallen; in diesem Falle liegt aber die Sache viel einfacher, insofern die Axe O hier in dem Schnittpunkte der Verlängerungen von BA und $B'A'$ selbst liegt.

Auch ein dritter Punkt C des Körpers (Fig. 69) macht die gleiche Drehung um den Winkel θ mit, so daß er nach C' gelangt; denn da der Körper starr ist in dem oben definierten Sinne, muß die Konfiguration irgend dreier Punkte ABC ungeändert bleiben, die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ müssen also kongruent sein, und hieraus folgt analog wie oben, daß der Winkel $COC' = \theta$ ist.

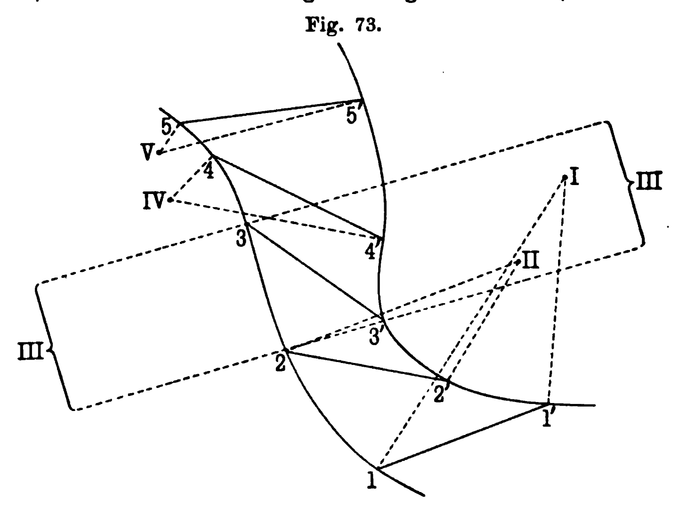
94. Kontinuierliche ebene Verrückung. Bei der kontinuierlichen ebenen Verrückung eines starren Körpers läßt sich die Bewegung in jedem Augenblicke als eine Drehung um eine auf der Bewegungsebene senkrechte Axe ansehen. Bei jeder derartigen Bewegung beschreiben die Endpunkte irgend einer in der Bewegungsebene liegenden geraden Linie bestimmte Kurven in dieser Ebene, und die Bewegung läßt sich geradezu auffassen als eine Bewegung der geraden Linie mit ihren Enden auf diesen beiden Kurven. Hiermit sind die successiven Lagen des Körpers geometrisch festgelegt, da alle Teile desselben starr miteinander verbunden sind und alle Verrückungen parallel zu einer Ebene verlaufen. S und S' (Fig. 72) seien die beiden Kurven, zwischen denen sich die Linie AB bewegt; AB und $A'B'$ seien zwei Lagen derselben. A hat sich längs AA' nach A', B längs BB' nach B' bewegt. Die Lagenänderung von AB nach $A'B'$ kann bewirkt werden durch eine Drehung des Körpers um eine Axe, die man findet, indem man die Sehnen AA' und BB' der betreffenden Kurvenstücke halbiert und in den Halbierungspunkten Senkrechte errichtet, gerade wie in Fig. 69. Durch die verschiedenen aufeinanderfolgenden Sehnen AA' und BB', $A'A''$ und $B'B''$ ... werden verschiedene Lagen der Drehungsaxe bestimmt; während sich der Körper bewegt, bewegt sich also die Axe ebenfalls und ändert ihre Lage sowohl zum Körper als im Raume.

Wenn sich der Körper stetig bewegt, so bewegt sich auch die Axe stetig; und die Lage derselben in einem bestimmten Augenblicke, z. B.

zur Zeit, wo unsere Linie die Lage AB hat, ist offenbar die Grenzlage, die man findet, indem man die Sehnen AA' und BB' unendlich kurz werden läßt, d. h. es ist der Schnittpunkt der auf den Tangenten an die Kurven in A und B errichteten Normalen. Diese Axe heißt die Momentanaxe oder Instantanaxe des Körpers für die durch AB definierte Lage. Mit Rücksicht auf das früher Gesagte und auf die in Fig. 69 veranschaulichten Verrückungen ist es einleuchtend, daß es in jedem Augenblicke nur eine einzige solche Axe gibt, und daß sie durch Betrachtung der Bewegung einer beliebigen Linie des Körpers in der Ebene der Verschiebungen gefunden werden kann.

In Fig. 73 ist der Verlauf etwas detaillierter skizziert, $11'$, $22'$, $33'$, $44'$, $55'$ sind aufeinanderfolgende Lagen der Linie, in allen diesen

Fig. 73.



Punkten sind Normalen auf den Kurven errichtet, die Schnittpunkte der beiden ersten Paare dieser Normalen sind I, II, ihre Verbindungslinie gibt die Bahn der Momentanaxe; das dritte Normalenpaar ist dagegen parallel, der Punkt III liegt also im Unendlichen; und das vierte und fünfte Paar konvergiert sogar nach der anderen Seite, auf dieser liegen also auch die Punkte IV und V. Dieser Sprung von der einen Seite durch die Unendlichkeit zur anderen Seite findet offenbar da statt, wo die beiden Kurven in den Endpunkten $33'$ der Linie einander auf einer ganz kurzen Strecke parallel laufen.

95. Zentroden. Die Kurven, welche der Durchschnitt der Momentanaxe mit der festen Ebene beschreibt, heißen Zentroden, und zwar die Kurve, die er in der festen Ebene selbst beschreibt: Raumzentrode, diejenige, welche er in der mit der festen Ebene zusammenfallenden Körperebene beschreibt: Körperzentrode.

Die Lage der Momentanaxe kann man folgendermaßen finden. In

Fig. 74 seien X, Y rechtwinkelige, in der Bewegungsebene feste Axen, x, y die Koordinaten des Durchschnittspunktes der augenblicklichen Axe O. Da diese Axe für einen Augenblick als fest angesehen werden kann, während sich alle übrigen Punkte mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um sie drehen, so lassen sich die Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes P, dessen Koordinaten a, b sind, leicht angeben. Ist nämlich l die Entfernung zwischen P und O, so hat die Bewegung von P die in der Figur durch den Pfeil angegebene Richtung, und die Geschwindigkeit ist $\lambda\omega$. Ist nun θ der Winkel zwischen OP und MX, so hat man für die Geschwindigkeitskomponenten u, v von P die Ausdrücke:

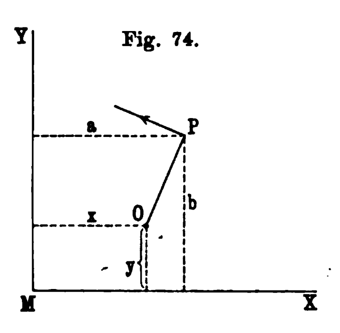


Fig. 74.

$$-u = l\omega \sin\theta = \omega(b - y)$$
$$v = l\omega \cos\theta = \omega(a - x),$$

also:

$$x = a - \frac{v}{\omega}, \quad y = b + \frac{u}{\omega} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (80)$$

hiermit ist aber die Lage der Axe mit Hilfe der allgemeinen Winkelgeschwindigkeit ω sowie der Koordinaten ab und der Geschwindigkeitskomponenten uv irgend eines Punktes bestimmt.

Die Gleichungen (80) enthalten die Zeit, insofern nämlich ω, a, b, u,v im allgemeinen Funktionen der Zeit sind. Eliminiert man aus ihnen die Zeit, so erhält man die Gleichung der Raumzentrode.

96. Gleichung der Körperzentrode. Die Körperzentrode C_k ist, wie oben festgesetzt wurde, die Kurve, welche in der mit der Bewegungsebene zusammenfallenden Ebene des Körpers von den successiven Lagen der Momentanaxe beschrieben wird. Als Koordinatenaxen mögen zwei in dem Körper feste, rechtwinkelige Linien gewählt und die hierauf bezogenen Koordinaten des Punktes O (Durchschnittspunkt der Axe) zur Zeit t mit ξ, η bezeichnet werden; endlich sei θ' der Winkel zwischen der im Raume festen x-Axe und der im Körper festen ξ-Axe. Die Koordinaten irgend eines Punktes P im neuen System sind dann:

$$\xi + l\cos(\theta - \theta')$$
$$\eta + l\sin(\theta - \theta'),$$

oder, da doch

$$l\cos\theta = a - x, \quad l\sin\theta = b - y,$$

ist:

$$\xi + (a - x)\cos\theta' + (b - y)\sin\theta'$$
$$\eta + (b - y)\cos\theta' - (a - x)\sin\theta',$$

oder schließlich, mit Benutzung der Gl. (80):

$$\xi + \frac{v}{\omega} \cos \theta' - \frac{u}{\omega} \sin \theta'$$

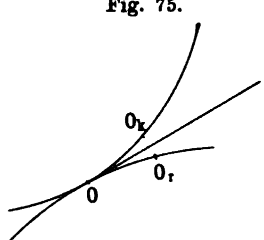
$$\eta - \frac{u}{\omega} \cos \theta' - \frac{v}{\omega} \sin \theta'.$$

Ist nun P selbst der Anfangspunkt der $\xi\eta$-Koordinaten, so sind obige Ausdrücke null, und man hat:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{v}{\omega} \cos \theta' + \frac{u}{\omega} \sin \theta' \\ \eta &= \quad \frac{u}{\omega} \cos \theta' + \frac{v}{\omega} \sin \theta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (81)$$

Gleichungen, die durch Elimination der Zeit eine Beziehung zwischen ξ, η einerseits und Konstanten anderseits liefern. Diese Beziehung ist die gesuchte Gleichung der Körperzentrode.

Fig. 75.



Die beiden Kurven C_k und C_r sind zwei Punktfolgen von der Art, daß, während der Körper sich bewegt, jeder Punkt der ersteren Folge, wenn die Reihe an ihn kommt, mit einem entsprechenden Punkte der letzteren zusammenfällt und, indem er dies tut, zur Ruhe kommt, obgleich er nicht, auch nicht für einen noch so kurzen Zeitteil, wirklich in Ruhe zu bleiben braucht. So wird ein Punkt O_k von C_k (Fig. 75) der Ort der Momentanaxe, sobald er mit dem Punkte O_r von C_r zur Koinzidenz kommt. Die Lage von O_r ändert sich mit der Geschwindigkeit $\dot{x}$, $\dot{y}$, und mit der Beschleunigung $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, Größen, die aus den durch die Gleichungen (80) bestimmten Werten von x, y berechnet werden können.

97. Geschwindigkeit der Momentanaxe längs der Körperzentrode. Die Raumgeschwindigkeit des Punktes O_k ist in dem Augenblicke, wo er mit O_r zusammenfällt, natürlich null. Wir wollen nachweisen, daß die Geschwindigkeit, mit der sich die Lage von O_k längs C_k ändert, dieselbe ist wie die Geschwindigkeit, mit der sich O_r längs C_r verschiebt, und daß die beiden Kurven in dem die Momentanaxe repräsentierenden Punkte eine gemeinsame Tangente haben.

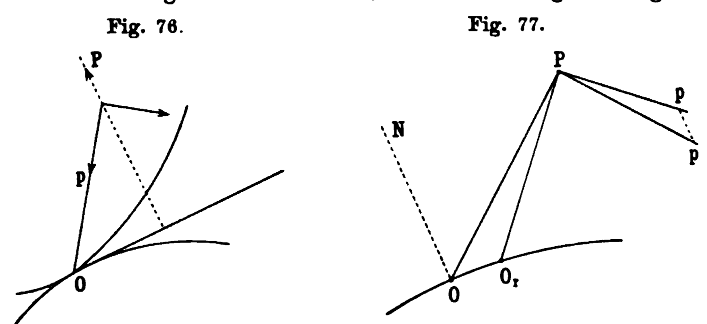
O sei die Momentanaxe, O_r und O_k seien Punkte von C_r bezw. C_k, welche nach einem unendlich kleinen Zeitteil dt mit dem nunmehrigen Orte von O zur Koinzidenz kommen. Da nun der Körper sich um O dreht, nähert sich O_k offenbar O_r in einer zur Linie $O O_k$ senkrechten Richtung und mit der Geschwindigkeit $O O_k . \omega$, und da ω endlich ist, kann sich die Richtung jedes Teiles des Elementes $O O_k$ von C_k während dt nur unendlich wenig ändern. Folglich ändert sich im Grenzfalle, da O auf O_k zuläuft, die Bewegungsrichtung von

O_k überhaupt nicht und steht durchweg senkrecht auf $O O_k$. Nun ist aber $O_k O_r$ klein gegenüber $O O_k$, da es von der Größenordnung $O O_k . \omega dt$ ist; folglich fällt im Grenzfalle $O O_r$ mit $O O_k$ zusammen. Die beiden Kurven haben daher in O eine gemeinsame Tangente, und die Geschwindigkeit, mit der sich der Raumpunkt O längs C_r bewegt, ist gleich der Geschwindigkeit — die wir $\dot{s}$ nennen wollen — mit der sich der entsprechende Körperpunkt längs C_r bewegt.

98. Beschleunigung eines Körperpunktes in der Axe. Da $O O_k$ gleich $\dot{s} dt$ ist, so ist die Geschwindigkeit von O_k im Raume in dem betrachteten Augenblicke gleich $\dot{s} \omega dt$; und da O_k in O_r zur Ruhe kommt, muß jener Ausdruck in der Zeit dt zu null werden. Folglich ist die Beschleunigung von O_k gleich $\dot{s} \omega$, und zwar in der Richtung, welche der von der Rotation herrührenden Bewegung entgegengesetzt ist. Die Komponente $\omega^2 \dot{s} dt$ von O_k nach O ist im Vergleich damit unendlich klein. Die Beschleunigung des Körperpunktes in O ist also gleich $\omega \dot{s}$ und nach dem Krümmungsmittelpunkte von O_k gerichtet.

99. Beschleunigung irgend eines Körperpunktes. Es ist zu beachten, daß das soeben gewonnene Ergebnis für die Beschleunigung eines jeden Körperpunktes P, Fig. 76, in der Entfernung p von O außer den Komponenten $\dot{\omega} p$ senkrecht zu OP in der Richtung der Bewegung und $\omega^2 p$ in der Richtung von P nach O noch eine Komponente $\omega \dot{s}$ senkrecht zur Tangente in O liefert, wie das in Fig. 76 angedeutet

Fig. 76. Fig. 77.



ist. Diese Komponente rührt von der Bewegung von O lang C_r her. Ihr Vorhandensein in P läßt sich folgendermaßen zeigen. In dem Zeitteilchen dt möge sich der Körperpunkt von P nach P' bewegen. In Fig. 77 stelle Pp, senkrecht zu OP, die Geschwindigkeit von P um O herum dar und Pp' die Geschwindigkeit von P' um O_r. (Da wir die von der Änderung von ω und von der Lagenänderung von P herrührende Beschleunigung anderweitig in Rechnung ziehen, nehmen wir hier ω als konstant und P als fest während der Zeit dt an.) Pp ist proportional mit OP, Pp' mit $O_r P$, und der Winkel pPp' ist gleich dem Winkel $O P O_r$. Die Dreiecke $O P O_r$ und pPp' sind daher ähn-

lich; und da Pp und Pp' auf PO und PO_r bezw. senkrecht stehen, so steht auch pp' senkrecht auf OO_r. Ferner ist $pp' = OO_r . Pp/PO$; anderseits ist aber $Pp = \omega . PO$; es folgt also $pp' = \omega . OO_r = \omega \dot{s} dt$. Die Änderung der Geschwindigkeit in der Zeit dt ist also $\omega \dot{s} dt$, d. h. die Beschleunigung ist $\omega \dot{s}$ und zwar in der auf der Kurve in O senkrechten Richtung ON.

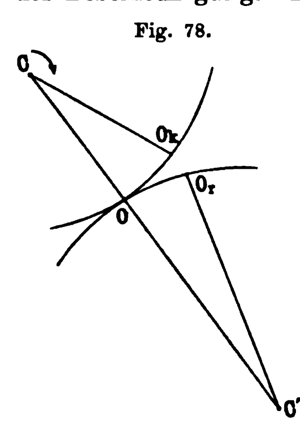
Die Beschleunigung von P kann mit Hilfe der Vektoralgebra wie folgt gefunden werden. Bezeichnet man OP mit p, so hat man für die Geschwindigkeit von P den Wert $i\omega p$, weil sie senkrecht zu OP erfolgt. Der Änderungsgrad hiervon ist $i\omega\dot{p} + i\dot{\omega}p$; nun ist aber $\dot{p}$ der Änderungsgrad von p, also gleich der Differenz der Geschwindigkeiten von P und O, also gleich $i\omega p - \dot{s}$. Folglich hat man

$$i\omega\dot{p} + i\dot{\omega}p = -\omega^2 p - i\omega\dot{s} + i\dot{\omega}p,$$

d. h. die Beschleunigung von P besteht aus drei Komponenten, einer solchen gleich $\omega^2 p$ in der Richtung von P nach O, einer zweiten $-i\omega\dot{s}$ rechtwinkelig zu $\dot{s}$ und einer dritten gleich $i\dot{\omega}p$ in der Richtung der Bewegung von P. Da nun ip eine Strecke bedeutet, die aus der Richtung OP in die Bewegungsrichtung herumgedreht ist, so bedeutet $-i\omega\dot{s}$ eine Beschleunigung, deren Richtung man erhält, wenn man $\dot{s}$ in der entgegengesetzten Richtung um einen rechten Winkel dreht, d. h. sie fällt in die in Fig. 76 durch den Pfeil in der gestrichelten Linie angedeutete Richtung.

100. Bahnkrümmung irgend eines Punktes, abgeleitet aus der Beschleunigung. Die Beschleunigung, die hiermit für einen beliebigen Punkt gefunden ist, erlaubt nun, die Krümmung der von P während des Rollens des Körpers zurückgelegten Bahn zu bestimmen. Denn die zur Bewegungsrichtung senkrechte Komponente der Beschleunigung ist in jedem Punkte gleich dem Quadrat der Geschwindigkeit in der Bahn, multipliziert mit der Krümmung der letzteren.

Fig. 78.



In Fig. 78 seien C und C' die Krümmungszentren von C_k und C_r für den Punkt O, ferner seien r und r' die entsprechenden Krümmungsradien.

Dann hat man:

$$\dot{s} dt = r . OCO_k = r' . OC'O_r.$$

Folglich ist:

$$OCO_k + OC'O_r = \dot{s} dt \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right),$$

und dies ist der Winkel zwischen den Tangenten in O_k und O_r.

Wenn sich O nach O_r bewegt hat, sind CO_k und $O_r C'$ in einer Linie, und der Körper hat sich um den Winkel $OCO_k + OC'O_r$ gedreht, und zwar in der Zeit dt. Somit ist

$$\omega = \frac{dt}{ds}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

Für die Beschleunigung des Körperpunktes in O haben wir demgemäß:

$$\omega \frac{ds}{dt} = \omega^2 \frac{rr'}{r + r'} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (82)$$

Dabei ist angenommen, daß die beiden Krümmungen entgegengesetzt sind, wie dies in Fig. 78 der Fall ist. Wenn sie gleich gerichtet sind und r, r' wie bisher die positiven Zahlenwerte der Krümmungsradien bedeuten, sind obige Formeln durch

$$\omega = \frac{ds}{dt}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right), \quad \omega \frac{ds}{dt} = \omega^2 \frac{rr'}{r' - r} \quad \cdots \quad (83)$$

zu ersetzen. Für den Punkt P in Fig. 77 ist die Beschleunigung senkrecht zur Bahn von P nach § 99 gleich $\omega^2 p - \omega \dot{s} \cos\theta$, wo θ der Winkel zwischen der Normalen ON auf C_r in O und OP ist; da nun die Geschwindigkeit von P gleich ωp ist und senkrecht auf OP steht, ist die Krümmung der Bahn von P

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\omega^2 p - \omega \dot{s} \cos\theta}{\omega^2 p^2},$$

oder, wegen Gl. (82) bezw. (83):

$$K = \frac{1}{R} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \frac{rr'}{r' \pm r} \cos\theta,$$

wo das positive oder das negative Zeichen gilt, je nachdem die Krümmungen der beiden Zentroden entgegengesetzt oder gleichgerichtet sind.

Wie man sieht, verschwindet dieser Ausdruck für alle Punkte, für welche

$$p = \frac{rr' \cos\theta}{r' \pm r}$$

ist, d. h. für einen Kreis vom Durchmesser $rr'/(r' \pm r)$; dieser Durchmesser verläuft in der Normale ON zur Zentrode. Da man OP in jeder beliebigen Richtung ziehen kann, so kann θ jeden beliebigen Wert annehmen, und folglich geht jeder Punkt des gedachten Kreises in irgend einem Momente durch einen Punkt seiner Bahn von der Krümmung null, d. h. durch einen Inflexionspunkt derselben hindurch. Indessen ändert sich der Durchmesser des Kreises fortwährend, die Inflexionspunkte wandern also während des Rollprozesses von Kreis zu Kreis.

Es ist einleuchtend, daß die Tangentialbeschleunigung von P in seiner Bahn gleich $\dot{\omega} p - \omega \dot{s} \sin\theta$ ist, also gleich einer Größe, die für alle Punkte verschwindet, für welche

$$p = \frac{\omega \frac{ds}{dt} \sin\theta}{\frac{d\omega}{dt}}$$

ist; das ist ebenfalls ein Kreis, sein Durchmesser ist $\omega\dot{s}/\dot{\omega}$, und zwar in der Richtung tangential zur Zentrode in O. Die beiden Kreise schneiden sich also in O rechtwinkelig. Jedoch ist in O die Linie p gleich null, ebenso wie die Beschleunigung normal zur Bahn von P; anderseits ist die Beschleunigung in der Bewegungsrichtung von P hier gleich $-\omega\dot{s}$. In jedem anderen Punkte des zweiten Kreises ist gerade die Tangentialbeschleunigung null; in dem zweiten Schnittpunkte der beiden Kreise schließlich ist die Normalbeschleunigung ebenfalls null.

101. Rollen und Gleiten. Die eben untersuchte Bewegung des Körpers ist eine jener Bewegungen, die man als reines Rollen bezeichnet, und zwar rollt die Kurve C_k auf der Kurve C_r. In jedem Augenblicke fallen die Normalen zu den beiden Kurven in dem gemeinsamen Punkte O in eine Linie, der Körper dreht sich um den Berührungspunkt, und die Geschwindigkeit, mit welcher der Berührungspunkt seine Lage auf C_k ändert, ist stets gleich derjenigen, mit der er sich auf C_r bewegt; derart, daß die Länge s_k desjenigen Teiles von C_k, welcher mit C_r in Berührung gebracht worden ist, in irgend einem Zeitintervall gleich der Strecke s_r ist, welche der Berührungspunkt längs C_r zurückgelegt hat. Wäre s_k größer oder kleiner als s_r, so würde man von der Körperzentrode sagen, sie gleite auf der Raumzentrode, im ersteren Falle nach der Richtung der Bewegung längs C_r, im letzteren in der entgegengesetzten Richtung.

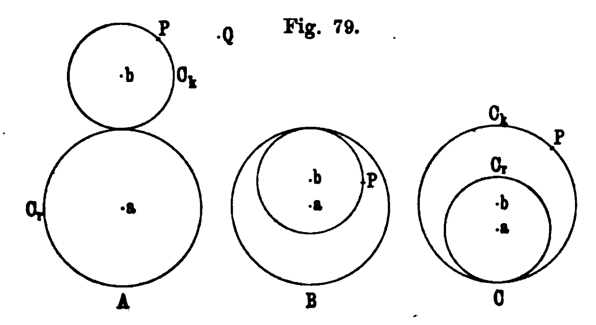
Ein bekanntes Beispiel bietet ein auf einer Schiene rollendes Rad. Findet reines Rollen statt, so findet keine relative Bewegung zwischen der Schiene und dem mit ihr sich berührenden Punkte des Rades statt. Die Körperzentrode ist die Linie längs des Radreifens, in welcher es die Schiene berührt, die Raumzentrode hingegen ist die Linie der Berührungspunkte längs der Schiene. Findet gar kein Gleiten statt, so ist die Strecke, welche der Mittelpunkt des Rades zurückgelegt hat, genau gleich der Zahl der Umdrehungen, die das Rad gemacht hat, multipliziert mit seinem Umfange, d. h. mit der Länge von C_k.

Werden an einige der Räder eines Eisenbahnzuges Bremsen angelegt, so wird ihre Winkelgeschwindigkeit plötzlich herabgemindert und sie fangen deshalb zunächst an, auf den Schienen in der Richtung der Bewegung zu gleiten. Wenn anderseits eine Lokomotive einen schweren Zug in Bewegung setzt, gleiten die treibenden Räder auf den Schienen in rückwärtiger Richtung, und häufig wird Sand auf die Schienenstränge dicht vor der Maschine gestreut, in der Absicht, die Räder zum „greifen“ zu bringen, d. h. der reinen Rollbewegung näher zu kommen.

102. Rouletten. Die Kurve, welche von einem in der Bewegungsebene gelegenen Punkte in der festen Ebene beschrieben wird, während die Kurve C_k auf der Kurve C_r rollt, heißt Roulette. Wenn C_k ein Kreis und C_r eine gerade Linie ist, so heißt die von einem Punkte auf C_k beschriebene Kurve Zykloide, dagegen die von irgend einem anderen, in der Bewegungsebene gelegenen Punkte beschriebene, Trochoide. Ist C_r keine gerade Linie, sondern ebenfalls ein Kreis, so sagt man, ein Punkt auf C_k erzeuge eine zykloidische Kurve, irgend ein anderer Punkt eine trochoidische Kurve.

Wenn der Kreis C_k den Kreis C_r berührt, so daß jeder von beiden außerhalb des anderen liegt wie in Fig. 79 (A), so nennt man die von

Fig. 79.

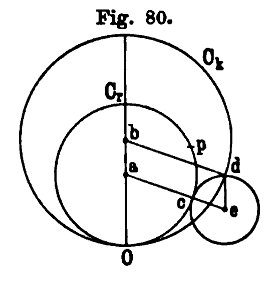


einem Punkte P auf C_k beschriebene Kurve eine Epizykloide, die von irgend einem anderen Punkte Q erzeugte eine Epitrochoide.

Dagegen heißen die entsprechenden Kurven Hypozykloiden bezw. Hypotrochoiden, wenn C_k von C_r umgeben ist, wie in Fig. 79 (B), und Epizykloiden bezw. Peritrochoiden, wenn C_r von C_k umgeben ist, wie in Fig. 79 (C); statt Perizykloide sagt man nämlich gewöhnlich Epizykloide, weil, wie sich zeigen wird, eine Perizykloide zugleich eine Epizykloide im Sinne ihrer früheren Definition ist.

103. Zwiefache Erzeugung von Perizykloiden. In Fig. 80 seien a und b die Mittelpunkte der Kreise C_r und C_k; man ziehe die parallelen Radien ac und bd und vervollständige das Parallelogramm $abde$. Der Punkt e ist der Mittelpunkt eines Kreises, dessen Radius gleich der Differenz der Radien der großen Kreise ist, und welcher den Kreis C_k in d schneidet, während er den Kreis C_r in c berührt. Da jeder der beiden Winkel Obd, dec gleich Oac und $bd = ac + ce$ ist, sind die Bögen Oc und cd der Kreise mit den Mittelpunkten a bezw. e zusammengenommen gleich dem Bogen Od des Kreises C_k mit dem Mittelpunkte in b. Trägt man also auf C_r den Bogen $Op = Od$ ab, so ist auch

Fig. 80.



$cp = cd$. Wenn also C_k rollt, gelangt d, betrachtet als fester Punkt auf C_k, nach p; wenn anderseits der Kreis mit dem Mittelpunkte e in derselben Richtung rollt, so gelangt d, als fester Punkt auf dem kleinen Kreise betrachtet, ebenfalls nach p. Nun lasse man C_k um einen beliebigen Winkel rollen, so daß der Punkt auf ihm, der vorher d war, jetzt in d' liegt, während O nach O', b nach b' kommt, während der Kreis mit dem Mittelpunkte e fest bleibt; anderseits lasse man den letzteren Kreis längs C_r um dieselbe Strecke in derselben Richtung rollen, so daß c in die Lage c' und der frühere Punkt d jetzt nach d'' kommt. Es ist klar, daß die beiden Linien ac', $b'd'$ einander parallel sind, ebenso auch aO', ed''. Die beiden Punkte d' und d'' müssen also zusammenfallen. Rollen also die beiden Kreise mit gleicher Winkelgeschwindigkeit in gleicher Richtung, so bleibt ihr Schnittpunkt stets derselbe Punkt von beiden, und der von diesem Punkte beschriebene Weg ist durch die Bewegung eines jeden der beiden Kreise gegeben. Daraus folgt aber weiter, daß, während C_k auf C_r rollt, die von irgend einem Punkte von C_k beschriebene Bahn auch von einem gewissen Punkte des Kreises um e beschrieben wird, während dieser Kreis in derselben Richtung auf C_r rollt. Mit anderen Worten: Eine Perizykloide ist auch eine Epizykloide.

In dem Falle, wo der innere Kreis auf dem äußeren rollt, ist eine ähnliche Konstruktion durchführbar. Der Kreis um e rollt alsdann inwendig auf C_r, und sein Schnittpunkt mit C_k beschreibt eine Hypozykloide, die auch durch das Rollen von C_k auf C_r erzeugt werden kann. In diesem Falle sind aber beides auch begrifflich Kurven gleicher Art.

104. Evolvente (Involute) und Evolute. Die sich bewegende Zentrode sei jetzt eine gerade Linie. Sie ist dann eine Tangente an die Raumzentrode C_r, und zwar im Punkte O. Dieser Punkt ist der Krümmungsmittelpunkt des Bahnelements, das in dem betrachteten Zeitteile von irgend einem Punkte P der geraden Linie beschrieben wird. Jede solche Bahn heißt eine Evolvente (oder eine Involute) der von der geraden Linie berührten Kurve. Ein gegebenes Paar von Evolventen hat längs der gemeinsamen Normalen an allen Stellen den gleichen gegenseitigen Abstand, mit anderen Worten, das System der Evolventen besteht aus einer unendlichen Anzahl paralleler Kurven. Die Kurve C_r, die von der sich bewegenden geraden Linie berührt wird, heißt, mit entsprechender Wortbildung, die Evolute jener Kurvenschar, also die Evolute der Evolventen; sie ist offenbar der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte einer jeden der Evolventen.

Die Evolventen kann man sich erzeugt denken durch die Punkte eines Fadens, der, während er von der Evolute abgewickelt wird, straff gespannt wird. Aus dieser Art der Erzeugung folgt offenbar, daß die Länge OP der Evolventennormale gleich der Länge OA des Bogens der Evolute ist, von welchem der Faden abgewickelt worden ist.

Fig. 81 zeigt die Evolventen $PP_1P_2\ldots$, $P'P'_2P'_2\ldots$ u. s. w. eines Systems, das durch Abwickeln eines Fadens von der Kurve C_r, ihrer Evolute, gewonnen wurde. Die Punkte $O, O_1 O_2\ldots$ sind die den Punkten $PP_1P_2\ldots$ oder den analogen Punkten der anderen Evolventen entsprechenden Krümmungsmittelpunkte. Ferner ist, wie man unmittelbar einsieht, die Tangente PT in irgend einem Evolventenpunkte P der in dem entsprechenden Krümmungszentrum O auf der Evolute errichteten Normalen OM parallel.

Der Leser möge beachten, daß, wenn man die erzeugende gerade Linie in sehr dichten Lagen, d. h. für Punkte $PP_IP_2\ldots$ verzeichnet, die einander äußerst nahe liegen, jede dieser Lagen zwei Krümmungsmittelpunkte zugleich in sich enthält. Von dieser Tatsache wird bei der im folgenden Abschnitte erläuterten Methode, Kurven graphisch zu erzeugen, vorteilhafter Gebrauch gemacht.

Die feste Zentrode wird von der gemeinsamen Normalen OP des Systems der Evolventen in jeder ihrer Lagen berührt; ein Umstand, der Veranlassung geboten hat, die Evolute der Evolventen auch als Enveloppe ihrer Normalen zu bezeichnen.

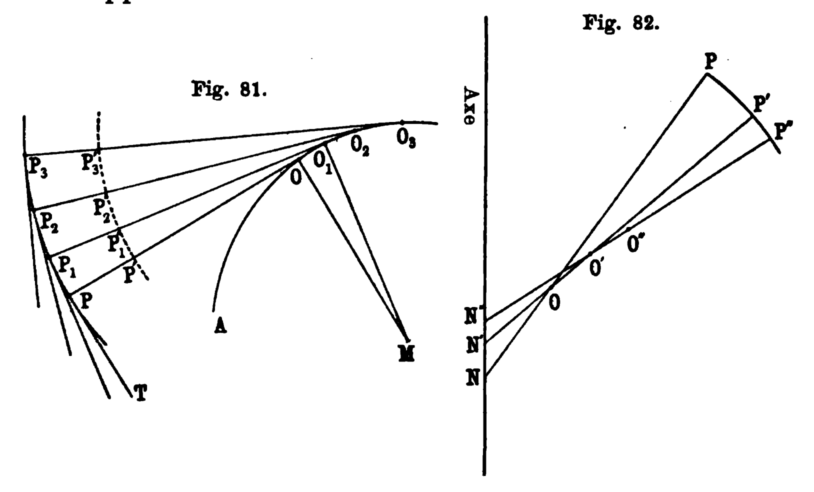


Fig. 81. Fig. 82.

105. Zeichnen von Kurven auf Grund ihrer Krümmung. Wenn die Geschwindigkeit und die Beschleunigung für verschiedene Punkte bekannt sind, kann die Bahn in folgender Weise auf Papier gezeichnet werden. Von irgend einem Punkte O, Fig. 82, ziehe man eine Linie OP, die dem Krümmungsradius der Bahn der Länge nach gleich ist, beschreibe dann um O als Mittelpunkt und mit OP als Radius einen kurzen Kreisbogen PP' und verbinde O mit P'. Dann ist PP' ein kurzer Bogen der Bahn von der Länge ds. Nunmehr ermittle man den Krümmungsradius für ein Element, das in der Entfernung ds von P anfängt, also in P'. Dieser Radius sei $P'O'$; dann ist O' das Krümmungszentrum für das nächste Element $P'P''$, das

einen kleinen Kreisbogen um den Punkt O' als Mittelpunkt darstellt. In entsprechender Weise findet man dann O'' als Krümmungsmittelpunkt des nächstfolgenden Bahnelementes $P''P'''$, und so geht das fort. Auf diese Weise haben Lord Kelvin und Perry (Nature 1886, 22. und 29. Juli und 19. August) Diagramme kapillarer Rotationsflächen gezeichnet. Die weiter unten in § 275 dargestellte Mondbahn ist ebenfalls nach dieser Methode gezeichnet.

C. V. Boys hat die in Rede stehende Methode, Kurven zu zeichnen, sehr bedeutend erleichtert durch die Erfindung seiner Skale der reziproken Werte; sie ist in Fig. 83 dargestellt. Der Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Teilstrichen wächst mit der Entfernung vom Ausgangspunkt, und es sind so feine Unterabteilungen eingeführt, als die Deutlichkeit der Einteilung irgend erlaubt. Die bei den Teilstrichen angegebenen Zahlen sind die reziproken Werte der Abstände der Teilstriche von dem Anfangspunkte der Skale, ein Punkt, der demgemäß mit ∞ bezeichnet ist. Wenn also eine Krümmung $1/r$ bekannt ist, so liegt die Teilmarke, die bei dem betreffenden Zahlenwerte auf der Skale der reziproken Werte sich findet, in der Entfernung r von der Marke ∞.

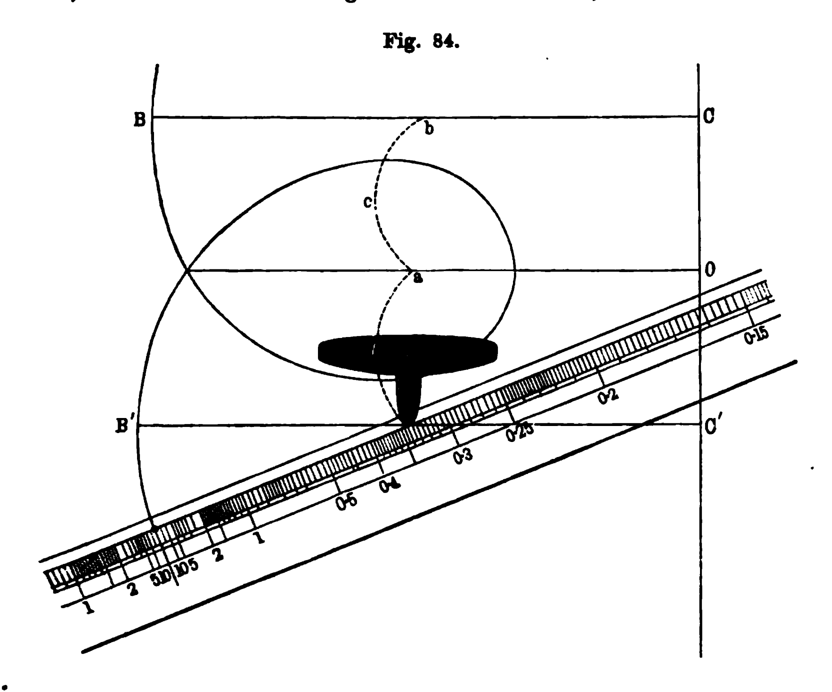
Fig. 83.

Um hiernach die Kurven zu zeichnen, verfährt Boys folgendermaßen. Er nimmt ein in der angegebenen Weise graduiertes Lineal, Fig. 84, welches eine aus einem kleinen Loche bei dem Punkte ∞ hervorragende Federspitze trägt, und legt es in der gewählten Anfangsrichtung auf das Papier. Dann stellt er einen kleinen Dreifuß mit Nadelspitzen als Füßen so auf, daß zwei von den Spitzen auf dem Papiere ruhen, während die dritte in den Punkt der Teilungslinie eingreift, welchem die die Krümmung bezeichnende Zahl zur Seite steht. Dieser dritte Punkt bildet ein Zentrum, um welches sich jetzt das Lineal drehen kann. Wirklich wird das Lineal um einen kleinen Winkel gedreht, und die Feder beschreibt einen kurzen Bogen auf dem Papier. Nun wird das Lineal auf der neuen Lage festgehalten, der Dreifuß aber ihm entlang bewegt und nunmehr so eingestellt, daß die Nadelspitze auf dem Lineal an diejenige Stelle kommt, die der Krümmung des nächsten Elementes entspricht; dieses wird nun von der Feder genau wie vorhin das erste beschrieben, und so geht das fort. Es versteht sich

von selbst, daß, wenn kein Teilstrich der Krümmung genau entspricht, die exakte Lage, die man der Nadelspitze geben muß, durch Schätzung zwischen den benachbarten Teilstrichen gefunden werden kann, und zwar mit großer Genauigkeit.

Die in Fig. 84 gezeichnete Kurve ist die Meridiankurve einer Rotationsfigur, von welcher $C\,O\,C'$ die Axe ist. Die Nadelspitze ist dargestellt, während sie gerade auf dem Teilchen mit der Zahl 0,84 ruht; das ist die Krümmung des Bahnelementes, welches die Feder

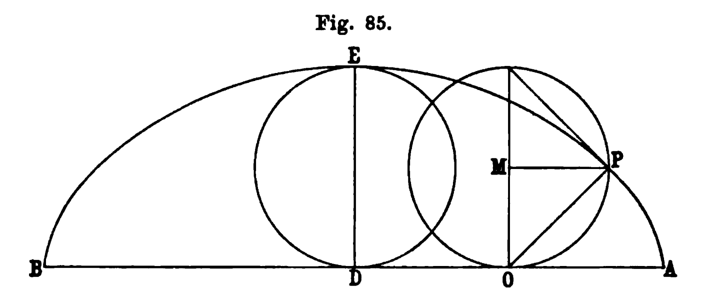
Fig. 84.



beim Punkte ∞ beschreibt (dieser Punkt liegt auf dem Lineal zwischen den beiden Marken 10, das Lineal enthält nämlich eine Teilung nach beiden Seiten). Die Kurve heißt eine Nodoide und wird in dem Kapitel über Kapillarität diskutiert werden; leider können dort keine weiteren Einzelheiten über den Boysschen Prozeß und über die zur Vermeidung von Ungenauigkeiten erforderlichen Vorsichtsmaßregeln Platz finden, so daß in dieser Hinsicht auf die Literatur verwiesen werden muß. Es sei indessen bemerkt, daß die beiden in das Papier eingreifenden Nadelspitzen Marken hinterlassen, die nach Beiseitelegung des Lineals den dritten Punkt längs seiner Bahn zurückzuführen erlauben, so daß man seine aufeinanderfolgenden Lagen, also seine Bahn, auf dem Papiere eintragen kann. Die Kurve, die man auf diese Weise erhält, ist in unserem Falle die Evolute der Nodoide; sie ist in der Zeichnung durch die gestrichelte Linie dargestellt.

106. Die Zykloide. Betrachten wir nun als ein Beispiel der im vorstehenden angedeuteten Theorie der Rouletten die Zykloide; eine Kurve, die von hervorragendem dynamischen Interesse ist. M in Fig. 85 sei der Mittelpunkt des erzeugenden Kreises in einer seiner Stellungen, O die augenblickliche Drehungsaxe, P der die Kurve erzeugende Punkt, $APEB$ die Zykloide selbst. Wenn der Kreis mehr als eine Umdrehung macht, ist die erzeugte Kurve offenbar eine Folge von lauter gleichen Zykloiden, also eine Kurve, welche an jeder Stelle (wie A und B), wo zwei Zykloiden zusammenstoßen, eine Spitze hat. Ferner ist jede einzelne Zykloide symmetrisch um die Linie DE, die

Fig. 85.



in der Mitte von AB senkrecht errichtet und ihrer Länge nach gleich dem Durchmesser $2a$ des rollenden Kreises ist. Nun sei ω die Winkelgeschwindigkeit des rollenden Kreises, dann ist die Geschwindigkeit u von O längs AB gleich ωa, die Geschwindigkeit von P gleich $\omega . OP$, senkrecht zu OP, und folglich nach § 99 die Beschleunigung von P, in der Bewegungsrichtung gleich $\dot{\omega} . OP$, in der Richtung nach O hin gleich $\omega^2 . OP$ und in der Richtung, die auf AB senkrecht ist, gleich ωu oder gleich $\omega^2 a$. Ist also θ der Winkel POA, so ist die gesamte Beschleunigung gegen O hin gleich $\omega^2 . OP - \omega^2 a \sin\theta$, d. h. gleich $\omega^2 a \sin\theta$ (denn es ist $OP = 2a \sin\theta$). Anderseits ist die gesamte Beschleunigung in der Bewegungsrichtung gleich $\dot{\omega} . OP + \omega^2 a \cos\theta$, d. h. gleich $a\,(2\dot{\omega} \sin\theta + \omega^2 \cos\theta)$; in Formeln ($b_{\parallel}$ und $b_{\perp}$ die beiden Beschleunigungskomponenten parallel und senkrecht zur Bahn):

$$b_{\parallel} = a\left(2\frac{d\omega}{dt} \sin\theta + \omega^2 \cos\theta\right), \quad b_{\perp} = a\omega^2 \sin\theta.$$

107. Krümmung der Zykloide; Bogenlänge und Fläche einer Zykloide. Aus der Beschleunigungskomponente senkrecht zur Bahn und der Geschwindigkeit kann man, wie wir wissen, die Krümmung finden; denn es ist, wenn v die Geschwindigkeit und ϱ der Krümmungsradius ist:

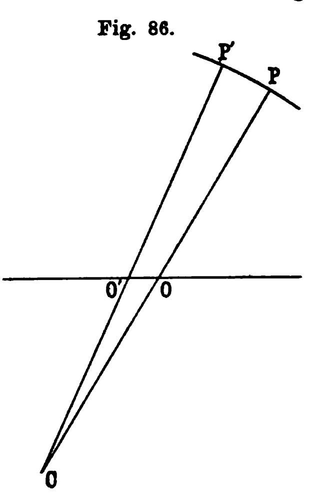
$$b_{\perp} = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{(\omega . OP)^2}{\varrho} = \frac{\omega^2 . 4a^2 \sin^2\theta}{\varrho},$$

und folglich:

$$\varrho = \frac{v^2}{b_\perp} = 4\, a \sin\theta.$$

Dieses Ergebnis kann auch durch folgende einfache Betrachtung gefunden werden, die häufig in ähnlichen Fällen den Krümmungsmittelpunkt zu finden erlaubt. In einem Zeitelement dt bewegt sich der Punkt P, Fig. 86, um eine Strecke $2\,\omega a \sin\theta\,.\,dt$ in der Richtung senkrecht zu OP vorwärts, und in derselben Zeit bewegt sich O längs AB um eine Strecke $\omega a dt$, also um eine Strecke $\omega a \sin\theta\,.\,dt$ in einer zu OP senkrechten Richtung. Die Normalen der beiden Endpunkte des Kurvenelementes werden sich daher in der Entfernung $2\,OP$, d. h. $4\,a \sin\theta$, von P schneiden. Um also den Krümmungsmittelpunkt C zu finden, braucht man nur PO um sich selbst zu verlängern.

Fig. 86.



Wie man sieht, unterscheidet sich die Zykloide von einem Kreisbogen, der mit dem Radius $(4 + \pi^2)a/4$ durch die Punkte AEB geschlagen ist, obgleich sie ihm sehr nahe liegt, doch ganz wesentlich dadurch, daß ihre Krümmung variabel ist; während der Krümmungsradius des Kreises überall ($\pi^2 = 10$ gesetzt) rund gleich $3{,}5\,a$ ist, ist er bei der Zykloide gleich $4\,a \sin\theta$; im Punkte E ist er gleich $4\,a$, also etwas größer als beim Kreise, dann kommt ein Punkt beiderseits, wo sie gleich werden, schließlich ist beiderseits die Zykloidenkrümmung stärker.

Bei den Rouletten ist übrigens, worauf noch besonders aufmerksam zu machen ist, der Krümmungsmittelpunkt im allgemeinen nicht identisch mit dem Durchschnittspunkt der Momentanaxe, und zwar wegen deren Bewegung im Raume; vielmehr ist er einfach der Schnittpunkt zweier benachbarter Normalen der Kurve, und diese gehen eben durch verschiedene Punkte von C_r hindurch.

Aus dem Krümmungsradius kann nunmehr leicht die Länge irgend eines Bogens AP der Zykloide (Fig. 85) abgeleitet werden. Der Betrag, in welchem der Bogen erzeugt wird, ist zunächst $\varrho\,\omega$, also $4\,a\omega \sin\theta$, und das, was hierzu hinzukommt, wenn die Linie CP (Fig. 84) sich um den kleinen Winkel $d\theta$ dreht, ist $4\,a \sin\theta\, d\theta$; das ist aber der Zuwachs, den die Größe $-4\,a \cos\theta$ erfährt, wenn θ um $d\theta$ wächst; somit hat man:

$$AP = -4\,a \cos\theta - (-4\,a \cos 0) = 4\,a(1 - \cos\theta).$$

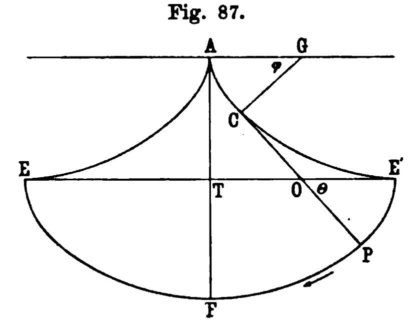
Da im Scheitel E der Kurve $\theta = \frac{\pi}{2}$, also $\cos\theta = 0$ ist, so hat man

für den halben Zykloidenbogen den Wert $4a$, für den ganzen $8a$, endlich für den Bogen EP, der AP zum halben Bogen ergänzt, $4a \cos\theta$.

Endlich kann man leicht zeigen, daß der Flächeninhalt der Zykloide gleich $3\pi a^2$, d. h. dreimal so groß ist wie der des erzeugenden Kreises. Denn die Fläche eines Dreieckes mit einem Winkel $d\theta$ an der Spitze, mit der Basis in der Kurve und mit zwei benachbarten Krümmungsradien als Schenkeln ist $8\,a^2 \sin^2\theta d\theta$; anderseits ist die Fläche des kleinen Dreieckes COO' (Fig. 86) ein Viertel von der des ganzen CPP' (weil $CO = OP$ ist, s. oben); folglich bleibt für die Fläche $OO'P'P$ übrig: $6a^2 \sin^2\theta d\theta$; und wenn man dies über die ganze Zykloidenfläche summiert, erhält man $3\pi a^2$. Es läßt sich das auch auf elementarem Wege zeigen. Wenn der erzeugende Kreis während des Zeitteils dt fest wäre und zugleich OP um O durch den Winkel zwischen OP und $O'P'$ gedreht würde, so würde die überstrichene Fläche $\frac{1}{2}2a \sin\theta . \omega a \sin\theta\, dt$ oder $\omega a^2 \sin^2\theta dt$ sein. Würde anderseits der Kreis ohne Drehung um die Strecke $\omega a dt$ vorwärts geschoben, so wäre die von OP überstrichene Fläche gleich $2a\sin\theta . \omega a \sin\theta dt$, also $2\omega a^2 \sin^2\theta dt$, d. h. das Doppelte der vorigen. Aber jene erste Fläche stellt für eine ganze Umdrehung offenbar die Kreisfläche πa^2 dar, die zweite also $2\pi a^2$; die ganze Zykloidenfläche ist also $3\pi a^2$.

108. Beschleunigung eines sich auf einer Zykloide bewegenden Punktes. Wenn der Kreis mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rollt, ist $\dot\omega = 0$, und die Beschleunigung längs der Tangente wird, von P nach E hin, gleich $\omega^2 a \cos\theta$. Die Beschleunigung strebt also Geschwindigkeit von P nach E hin hervorzurufen, und es ist leicht einzusehen, daß dies auch auf der anderen Hälfte eintreten würde, also

Fig. 87.



für einen Punkt P zwischen B und E. Der numerische Wert wird, wenn b die Beschleunigung und u die Verrückung bedeutet:

$$\frac{b}{u} = \frac{\omega^2 a \cos\theta}{4\,a \cos\theta} = \frac{\omega^2}{4} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (84)$$

Die Bewegung des erzeugenden Punktes in der zykloidischen Bahn, hervorgerufen durch Rollen eines Kreises mit konstanter Winkel-

geschwindigkeit, ist also vom Charakter einer einfachen Schwingung längs der Bahn, und zwar ist die halbe Periode offenbar $2\pi/\omega$; dies folgt übrigens auch aus § 52, indem nämlich $4\pi^2/T^2 = \omega^2/4$ ist.

In Fig. 87 sei EPE' eine Zykloide über der Basis EE', und C sei der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt P dieser Kurve; nach § 104 ist dann C ein Punkt der Evolute der Zykloide. Nun ziehe man CG senkrecht zu CP, bis zu einem Punkte G auf der zu EE' im Abstande $2a$ parallelen Linie (a ist der Radius des erzeugenden Kreises); ferner sei Winkel AGC mit φ, Winkel PCE' mit θ bezeichnet. Es ist alsdann $CO = 2a \sin\theta$, somit die Linie GO parallel zu AT, und folglich $CG = 2a \sin\varphi$. Während sich P auf seiner Zykloide bewegt, beschreibt also C eine ihr gleiche Zykloide, nur daß, während P im Scheitel F ist, C in der Spitze A ist und umgekehrt (E und E'). Der Krümmungsradius der Bahn von C ist dementsprechend $4a\cos\theta$, und die Verbindungslinie GO steht senkrecht auf EE'. Die Evolute einer Zykloide ist also eine gleiche, aber um die halbe Länge verschobene Zykloide.

109. Zykloidenpendel. Wenn die Zeichnungsebene der Fig. 87 die vertikale Ebene und der Punkt P ein Massenteilchen darstellt, das an einem masselosen Faden von der Länge $4a$ aufgehängt ist, der sich an eine feste Zykloide von A bis C anschmiegt, während der Rest CP geradlinig ist, so erzeugt, wie in § 137 besprochen werden wird, die Schwerkraft eine Beschleunigung g in der Richtung vertikal nach unten. Die Komponente dieser Beschleunigung in der Richtung CP wird durch die Wirkung des Fadens aufgehoben, die andere Komponente, tangential an die Bahn, ist demgemäß $g\cos\theta$. Nun haben wir aber gesehen, daß der Bogenabstand des Punktes P vom Scheitel F gleich $4a\cos\theta$ ist; folglich ergibt sich (vergl. Gl. 84):

$$\frac{b}{u} = \frac{g\cos\theta}{4a\cos\theta} = \frac{g}{4a} \quad \text{(85)}$$

und folglich ist die Schwingungsdauer des Pendels:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}} \quad \text{(86)}$$

Man erhält somit, da in dieser Formel die Amplitude nicht vorkommt, den merkwürdigen Satz: Die Schwingungsdauer des Zykloidenpendels ist unabhängig von der Amplitude der Schwingung; sie ist gleich groß, welchen der möglichen Werte zwischen 0 und $4a$ die Amplitude auch haben möge; beim gewöhnlichen einfachen Pendel ist das nur für mäßige Amplituden annähernd, hier für alle genau richtig. Im übrigen haben beide Pendel, das Kreis- und das Zykloidenpendel, bei gleicher Fadenlänge auch gleiche Schwingungsdauer.

Die Unabhängigkeit der Dauer einer Schwingung von der Schwingungsweite hat der Zykloide den Namen der Tautochrone verschafft.

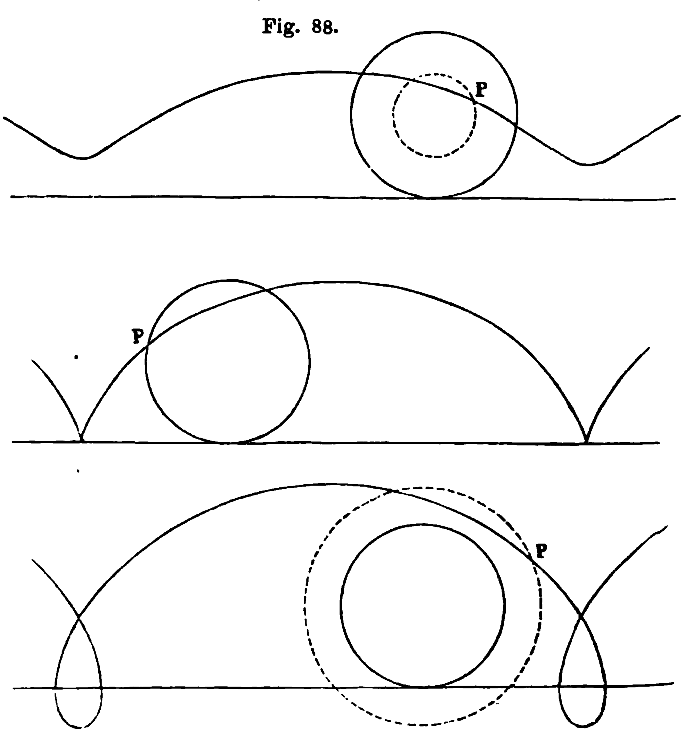
Am einfachsten kann man diese ihre Bedeutung veranschaulichen, wenn man sich eine halbe Zykloide EF in Form einer Rinne denkt, in der man eine Kugel laufen lassen kann; wo man sie auch einlegen möge, ob in E oder irgend wo weiter unten: die Fallzeit bis F ist stets dieselbe.

Gelegentlich sei hier bemerkt, daß die Zykloide noch eine andere wichtige Eigenschaft hat: von allen Bahnen, in denen ein Massenpunkt von E nach F fallen kann, ist die Zykloide diejenige, die ihn am schnellsten von E nach F bringt; die Zykloide ist, wie man sagt, auch die Brachistochrone.

110. Trochoiden. Epizykloiden und Hypozykloiden; Epitrochoiden und Hypotrochoiden. Über die der Zykloide verwandten Kurven muß hier kürzer hinweggegangen werden, obwohl auch sie für zahlreiche physikalische Erscheinungen (Wasserwellen, optische Brennlinien u. s. w.) von Bedeutung sind.

Die Zykloide ist, wie aus der Definition in § 102 hervorgeht, ein Spezialfall der Trochoide; und zwar der Grenzfall zwischen den

Fig. 88.



Trochoiden mit abgerundeten Spitzen und denen mit Schleifen; jene entstehen, wenn der erzeugende Punkt innerhalb, diese, wenn er außer-

halb des rollenden Kreises liegt. In Fig. 88 sind die drei Kurven zur übersichtlichen Vergleichung dargestellt.

Bei den **Epizykloiden** und **Epitrochoiden** rollt ein Kreis auf dem anderen, und zwar auf der Außenseite. Es seien a und b die Radien des rollenden und des festen Kreises, c der Abstand des erzeugenden Punktes P (Fig. 89) vom Mittelpunkte des rollenden Kreises; der Allgemeinheit halber sei c von a verschieden, wie es bei der Epitrochoide der Fall ist. Dann ist der in der Zeit dt durchrollte Winkel $d\theta$ gleich $ds(1/a + 1/b)$, wo ds die längs C_r zurückgelegte Strecke ist. Die Geschwindigkeit von P ist $\omega . OP$, seine Beschleunigung ist gegen O hin gleich $\omega^2 . OP$, längs der Bahn gleich $\dot{\omega} . OP$, endlich, wenn $\dot{s}$ die Geschwindigkeit von O auf dem festen Kreise ist, gleich $\omega \dot{s}$ in der Richtung, die auf der gemeinsamen Tangente in O senkrecht steht, d. h. längs der gestrichelten geraden Linie PQ. Da nun $\dot{s} = \omega ab/(a + b)$ ist, so ist, wenn θ den Winkel zwischen OP und der gemeinsamen

Fig. 89.

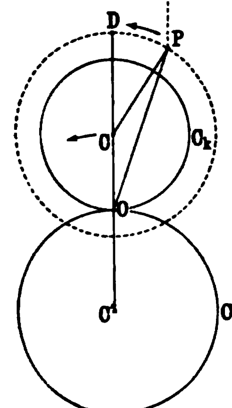
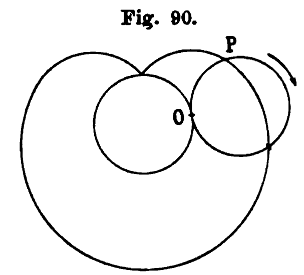


Fig. 90.



Tangente bedeutet, die Normalbeschleunigung gleich $\omega^2[OP - ab \sin\theta/(a + b)]$. Nun ist der Winkel PCD bekannt, da er der Supplementwinkel von OCP, d. h. von $s\ (1/a + 1/b)$ ist, der φ heißen möge. Ferner ist $OP = c \sin\varphi/\cos\theta$, also ist die **Normalbeschleunigung**

$$b_{\perp} = \omega^2 \left[\frac{c \sin\varphi}{\cos\theta} - ab\, \frac{\sin\theta}{a + b}\right].$$

Setzt man hierin $c = a$, so daß P auf dem rollenden Kreise liegt, so erhält man die Formel für die Epizykloide; setzt man auch noch $b = \infty$, so erhält man die schon bekannte für die Zykloide (§ 106).

Der **Krümmungsradius** der Epitrochoide wird nunmehr (Quadrat der Geschwindigkeit dividiert durch Beschleunigung):

$$\varrho = \frac{2\,(a + b)\,c^2 \sin^2\varphi}{[2\,(a + b)\,c \sin\varphi - ab \sin 2\theta] \cos\theta} \quad . \; . \; . \quad (87)$$

auch hier kann man wieder für $c = a$ (Epizykloide) und dann weiter für $b = \infty$, $\varphi = 2\,\theta$ (Zykloide) spezialisieren; im letzteren Falle erhält man, wie in § 107, $4\,a \sin\theta$.

Ein interessanter Fall ist der, wo außer $c = a$ auch noch $a = b$ ist, d. h. die beiden Kreise gleich groß sind. Dann ist $\varphi = 2\theta$, und es wird

$$\varrho = \frac{8}{3} a \sin \theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

Die so gezeichnete und in Fig. 90 (a. v. S.) dargestellte Kurve heißt **Kardioide**. Ihre Länge von der nach innen gekehrten Spitze rund herum bis zur Spitze zurück ist 16 a, also doppelt so groß wie die Länge der von demselben Kreise erzeugten Zykloide. Die von der Kardioide einerseits, von dem festen Kreise anderseits begrenzte Fläche ist $5\pi a^2$, d. h. fünfmal so groß wie die des erzeugenden Kreises; es ist nicht schwer einzusehen, daß zu den $3\pi a^2$ der Zykloidenfläche (§ 107) infolge des Umstandes, daß der Kreis nicht wie bei dieser auf einer geraden Linie von der Länge seines Umfanges, sondern auf einem gleich großen Kreise rollt, hier noch einmal dessen doppelte Fläche hinzukommt, so daß man eben $5\pi a^2$ erhält. Die ganze von der Kardioide umschlossene Fläche ist also $6\pi a^2$.

Wenn der Radius des rollenden Kreises nur die Hälfte von dem des festen ist, erhält man die in Fig. 91 dargestellte Epizykloide.

Fig. 91.

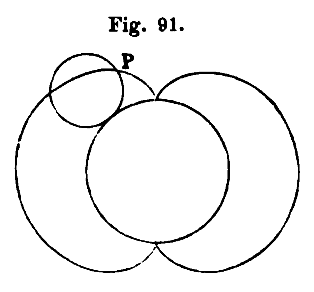
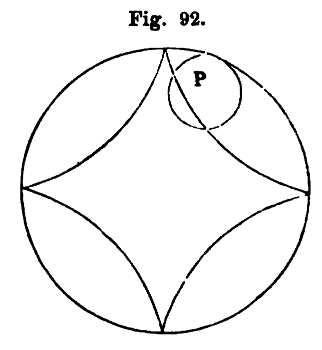


Fig. 92.



Eine Hypozykloide ist in Fig. 92 dargestellt, und zwar für $b = 4a$.

Endlich sind in den Fig. 42 und 43 schon früher Hypotrochoiden veranschaulicht, wenn auch bei Gelegenheit einer ganz anderen Betrachtungs- und Erzeugungsweise.

111. Gleichung der Kreisroulette. Es ist bemerkenswert, daß die Gleichung jeder Epitrochoide, ja selbst jeder beliebigen Kreisroulette, auf folgendem Wege gefunden werden kann. Die Kurve kann nämlich angesehen werden als erzeugt durch die Bewegung des Mittelpunktes des bewegten Kreises um den Mittelpunkt des festen, kombiniert mit einer Bewegung des bewegten Kreises um sein eigenes Zentrum, und zwar mit Winkelgeschwindigkeiten, die eine gewisse Beziehung zueinander aufweisen. So ist in Fig. 89 die Winkelgeschwindigkeit von C um C' gleich ω, die Geschwindigkeit von O infolge der Bewegung von C um C' ist

$\omega \cdot b$, und dies wird gerade ausgeglichen durch die relative Drehbewegung des fortgeführten Kreises um seinen eigenen Mittelpunkt. Die von C in der Zeit dt zurückgelegte Strecke ist $\omega\,(a + b)\,dt$, und dies muß, wenn ω' (statt des früheren ω) die Winkelgeschwindigkeit von OC ist, gleich $\omega' a dt$ sein. Somit erhält man:

$$\omega' = \frac{a + b}{a}\,\omega.$$

Demgemäß hat man für die Koordinaten von P zu irgend einer Zeit t, von dem Augenblicke an gerechnet, wo P in der Zentrallinie lag, und wenn die x-Axe längs der ursprünglichen Zentrallinie, die y-Axe senkrecht dazu genommen, der Anfangspunkt der Koordinaten aber in den Mittelpunkt des festen Kreises gelegt wird:

$$\left.\begin{aligned} x &= (a + b)\cos\omega t + c\cos\left(\frac{a+b}{a}\,\omega t\right) \\ y &= (a + b)\sin\omega t + c\sin\left(\frac{a+b}{a}\,\omega t\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (89)$$

durch Elimination von t aus diesen Gleichungen erhält man die gesuchte Kurvengleichung. Ist insbesondere $a = b = c$, so wird:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2a\cos\omega t + a\cos 2\omega t \\ y &= 2a\sin\omega t + a\sin 2\omega t \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (90)$$

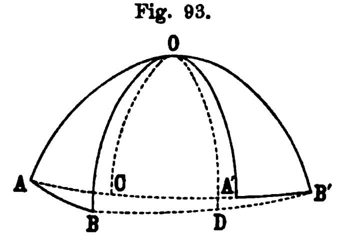
woraus sich die Eigenschaften der Kurven ableiten lassen. Es ist die in Fig. 90 abgebildete Kardioide; ihre Polargleichung für die Spitze als Anfangspunkt und die Symmetrielinie als Polaraxe ist, wie man mit Rücksicht auf $\theta = \omega t$ leicht nachweisen kann:

$$r = 2a\,(1 + \cos\theta).$$

Hiermit wollen wir unsere Betrachtungen über Bewegungen eines Punktes in der Ebene abschließen.

112. Allgemeine Verrückung eines starren Körpers. Wir wollen jetzt, wenn auch nur ganz kurz, die allgemeine Bewegung eines starren Körpers betrachten. Dabei werde zunächst ein Punkt des Körpers als fest angenommen; dann kann jede Verrückung des Körpers zuwege gebracht werden durch die Bewegung einer Kugel, die den festen Punkt zum Mittelpunkt hat, auf einer festen konzentrischen Kugeloberfläche.

Fig. 93.

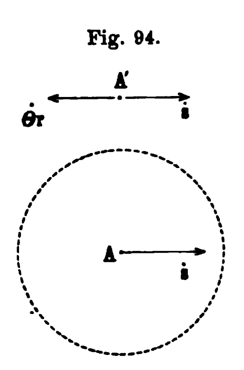


In Fig. 93 seien A und B zwei Punkte auf der bewegten Kugeloberfläche; durch ihre Ortsänderung mögen sie mit den Punkten A' und B' auf der festen Oberfläche zur Koinzidenz kommen. Die Verrückung des Körpers soll durch seine Drehung um eine durch den festen Punkt

gehende Axe bewerkstelligt werden. Man ziehe nun größte Kugelkreisbögen, welche A und A', B und B' verbinden, halbiere diese in den Punkten C und D und ziehe durch CD größte Kugelkreise rechtwinkelig zu AA', $B'B$; diese werden sich in zwei diametral entgegengesetzten Punkten OO' schneiden. Alsdann ist OO' eine Axe von der Eigenschaft, daß bei der Drehung des Körpers um sie A nach A' und B nach B' gelangt; der Drehungswinkel ist der in O von den Tangenten an die sich dort schneidenden größten Kugelkreise CO, DO gebildete Winkel. Der Leser wird das leicht nachzuweisen im stande sein.

113. Verschiebung und Drehung in einer Ebene sind äquivalent mit einer Drehung. Ein Körper möge eine derartige Verrückung erfahren, daß sich eine Ebene in ihm auf einer im Raume festen Ebene bewegt, zuerst durch Verschiebung in einer zu der festen Ebene senkrechten Richtung, dann durch Drehung um eine auf der festen Ebene senkrechte Axe. Die Resultante dieser Ortsänderungen kann nun auch erzielt werden durch eine einfache Drehung des Körpers um einen gleichen Winkel, aber um eine zu der vorigen parallele Axe. Denn irgend zwei Punkte AB in der bewegten Ebene gelangen schließlich nach $A'B'$, d. h. die Linie AB kommt in die Lage $A'B'$. Nach § 93 kann das aber durch eine Drehung der angegebenen Art erzielt werden. Ist $2s$ die lineare Verschiebung und 2θ die Winkeldrehung, so hat offenbar die Entfernung zwischen der zweiten und der ersten Axe die Komponente s in der Bewegungsrichtung (nach rückwärts) und die Komponente $s/tg\,\theta$ senkrecht zu ihr.

Fig. 94.



Der Körper möge sich mit der linearen Geschwindigkeit $\dot{s}$ bewegen und zugleich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ um eine Axe A senkrecht zu $\dot{s}$, die sich mit dem Körper bewegt, drehen. Diese Bewegung ist äquivalent einer reinen Drehung um eine Axe A' parallel zu jener und in einem Abstande von ihr gleich $\dot{s}/\dot{\theta}$, gemessen in der Richtung senkrecht zu $\dot{s}$, wie dies in Fig. 94 angedeutet ist.

114. Schraubenbewegung eines starren Körpers. Die allgemeinste Verrückung eines starren Körpers im Raume kann hervorgebracht werden durch eine Drehung um einen bestimmten Winkel um eine bestimmte Axe und durch eine Verschiebung (ohne Drehung) des ganzen Körpers parallel zu dieser Axe. Ein Punkt A auf dem Körper werde von dieser seiner Anfangslage in die Endlage A' durch Fortführung auf ihrer Verbindungslinie gebracht. Dann kann nach dem eben Erörterten der Körper um eine Axe durch den Punkt gedreht werden, bis er seine Endlage annimmt. Die Punkte in dem Körper,

die in einer zu jener Axe senkrechten Ebene liegen, erfahren Drehungen in ihrer eigenen Ebene; bei der vorangehenden Verschiebung aber waren die aufeinanderfolgenden Lagen dieser Ebene untereinander parallel, und die Bewegungsrichtung jedes Punktes ist gegen die Ebene unter demselben Winkel geneigt. Die Verrückung kann somit bewirkt werden, indem man den Körper zuerst in der auf jener Ebene senkrechten Richtung verschiebt und ihm dann die eben betrachtete Drehbewegung erteilt. Diese beiden letztgenannten Bewegungen aber, nämlich die Verschiebung längs der Ebene und die Drehung um eine zu ihr senkrechte Axe, können auf die in § 93 angegebene Weise zu einer Drehung um eine parallele Axe zusammengesetzt werden; und somit kann die ganze Verrückung erzielt werden durch Verschiebung des Körpers im ganzen in einer gewissen Richtung und anschließende Drehung um eine zu dieser Richtung parallele Axe.

Natürlich kann die Drehung auch gleichzeitig mit der Verschiebung erfolgen und zwar so, daß das Verhältnis v/ω der Verschiebungs- zur Winkelgeschwindigkeit durchweg dasselbe ist.

Die somit gefundene Bewegung ist die einer Mutter relativ zur Axe einer Schraube, um die sie sich dreht. Die Mutter schreitet, während sie sich um die Axe der Schraube dreht, zugleich längs derselben fort. Die Bewegung wird daher als Schraubenbewegung bezeichnet.

115. Schraubenhöhe. Die Verrückung als Drillung. Unter Schraubenhöhe oder Ganghöhe kann man entweder das Verhältnis v/ω oder, wie das in der Technik üblich ist, das 2πfache hiervon, also $2\pi v/\omega$ verstehen; es ist das die Fortschreitung während einer Umdrehung. Nimmt man, wie wir das hier tun wollen, v/ω, so dient die Winkelgeschwindigkeit gewissermaßen als Bewegungsmaß; die Streckengeschwindigkeit ist dann das Produkt der Winkelgeschwindigkeit und der Schraubenhöhe; bei der Anwendung des Wortes „Ganghöhe" im folgenden muß das im Auge behalten werden. Ist die Höhe null, so hat man eine reine Drehung; ist sie unendlich, eine reine Verschiebung — Spezialfälle, die im übrigen hier kein weiteres Interesse darbieten.

Einer gegebenen Verrückung eines starren Körpers entspricht nur eine einzige Schraubenbewegung; denn diejenigen Punkte des Körpers, die ursprünglich in der Drehungsaxe lagen, liegen auch im Endzustande in ihr, und das könnte bei irgend einer anderen Schraube nicht der Fall sein.

Im folgenden wollen wir uns also eine Verrückung eines Körpers in der Weise bewirkt denken, daß wir ihn an einer Mutter befestigen, die sich um einen sehr dünnen Schraubenzylinder von geeigneter Ganghöhe dreht. Eine derartige Verrückung kann man eine Drillung nennen, oder, um auszudrücken, daß es die Verrückung eines starren Körpers ist, eine starre Drillung (von der bekannten Drillung ela-

stischer Körper ist sie gänzlich verschieden). Eine Drillung ist bestimmt, wenn Axe, Ganghöhe und Drehungswinkel, die sogenannte Amplitude, gegeben sind.

116. Zusammensetzung von Winkelgeschwindigkeiten. Wenn ein Körper einen festen Punkt O hat und mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 um die unter dem Winkel θ gegeneinander geneigten Axen OA, OB sich dreht, so kann man zeigen, daß die Bewegung äquivalent ist einer einzigen Drehbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\,\omega_1\omega_2\cos\theta}$$

um eine Axe OC, die gegen OA um den Winkel

$$\theta' = \arccos\frac{\omega_1 + \omega_2\cos\theta}{\omega}$$

geneigt ist.

Es seien nämlich die Linien OA, OB in Fig. 95 in der Richtung der Drehungsaxen proportional mit ω_1, ω_2 gewählt, und es werde $OC = \omega$ als ihre Resultante nach den Regeln von § 17 gezogen; sie hat der Größe nach den oben angegebenen Wert; sie ist die durch O gehende Diagonale des Parallelogrammes, von welchem OA, OB anliegende Seiten sind. Nun nehme man einen beliebigen Punkt P in der Ebene AOB und außerhalb dieses Winkels; es ist dann leicht nachzuweisen, daß die Summe der Dreiecksflächen POA, POB gleich der Dreiecksfläche POC ist. Nun hat man aber, wenn h, k, p die Längen der von P auf OA, OB, OC bezw. gefällten Lote sind,

$$2.\triangle POA = \omega_1 h, \quad 2.\triangle POB = \omega_2 k,$$

und die Summe dieser Größen ist die Geschwindigkeit von P infolge der Zusammenwirkung beider Rotationen. Anderseits ist aber

$$2.\triangle POC = \omega p,$$

Fig. 95.

und folglich ist ωp auch die Geschwindigkeit von P infolge der alleinigen Rotation um OC. Wenn P nicht außerhalb, sondern innerhalb des Winkels AOB liegt, haben $\omega_1 h$ und $\omega_2 k$ entgegengesetzte Vorzeichen, und ωp ist dann gleich ihrer Differenz. Allgemein ist also im algebraischen Sinne der Summe

$$\omega p = \omega_1 h + \omega_2 k.$$

Diese Betrachtung lehrt, daß man Winkelgeschwindigkeiten wie gerichtete Größen, wie Vektoren, behandeln und gerade so wie Strecken,

Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zusammensetzen und auflösen kann. Das Gesetz dieser Zusammensetzung ist unter bestimmten Namen bekannt, die hier übersichtlich zusammengestellt werden mögen, zumal sie auch in der Dynamik (bei den Kräften und Momenten) noch weiter vorkommen werden. Sind nur zwei Komponenten vorhanden, entsteht also, wie in Fig. 95, ein Parallelogramm, so spricht man vom Parallelogramm der Strecken, der Geschwindigkeiten, der Winkelgeschwindigkeiten, der Beschleunigungen; bei drei Komponenten, die nicht in derselben Ebene liegen, erhält man ein Parallelepiped (wie z. B. in Fig. 10) und spricht daher vom Parallelepiped der Strecken u. s. w.; endlich, bei beliebig vielen Komponenten, wo eine entsprechende Vorstellung nicht mehr durchführbar ist, setzt man die die Komponenten darstellenden Strecken einfach polygonartig aneinander, wie in Fig. 4, und spricht dann vom Polygon der Strecken, Geschwindigkeiten, Winkelgeschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Kehren wir nun zu den Winkelgeschwindigkeiten zurück und betrachten wir diese noch etwas genauer. Um also eine Winkelgeschwindigkeit um eine gegebene Axe graphisch darzustellen, trage man auf dieser Axe eine der Winkelgeschwindigkeit gleiche Strecke auf und nehme die positive Richtung dieser Linie nach derjenigen Seite einer auf ihr senkrechten Ebene, von der aus gesehen die Rotation entgegen der Drehung eines Uhrzeigers erfolgt. Eine solche Drehrichtung wollen wir eine linkshändige oder umgekehrte Uhrzeigerdrehung nennen; sie ist in der Figur durch Pfeile angedeutet.

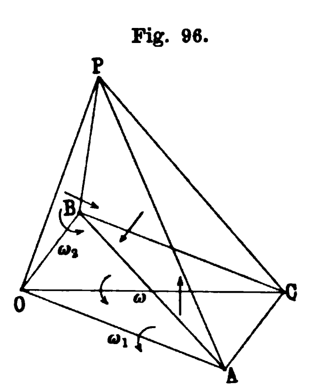
117. Momente; Zusammensetzung von Momenten in einer Ebene. Die Produkte $\omega_1 h$, $\omega_2 k$, ωp können die Momente der Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2, ω in Bezug auf den Punkt P genannt werden, und man hat alsdann den Satz, der später von großer Wichtigkeit werden wird: Die Summe der Momente zweier gerichteter Größen in Bezug auf einen Punkt in ihrer Ebene ist gleich dem Moment ihrer Resultante in Bezug auf denselben Punkt. Die Summe der Momente ist also null, wenn der Punkt in der Resultantenlinie liegt, und zwar ist sie nur in diesem Falle null. Diese Tatsache leistet gute Dienste beim Aufsuchen der Richtung der Resultanten in wirklichen Fällen.

Durch fortgesetzte Anwendung dieses Satzes läßt sich zeigen, daß die Summe der Momente irgend einer Anzahl gerichteter Größen längs Linien, die in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte schneiden, genommen in Bezug auf irgend einen Punkt dieser Ebene, gleich dem Moment ihrer Resultante in Bezug auf denselben Punkt ist.

118. Allgemeiner Satz, betreffend die Zusammensetzung von Momenten. Aber auch der zuletzt ausgesprochene Satz ist nur ein Spezialfall eines allgemeinen Theorems, nämlich des Satzes, daß die

Summe der Momente irgend welcher gerichteter Größen, deren Linien sich in einem Punkte schneiden, um irgend einen Punkt gleich dem Moment ihrer Resultanten in Bezug auf denselben Punkt ist. Denn es seien zwei gerichtete Größen in Fig. 96 durch die Linien OA, OB dargestellt (in dem speziellen Falle, um den es sich hier handelt, sind es Winkelgeschwindigkeiten eines starren Körpers); die Momente dieser Größen in Bezug auf einen beliebigen Punkt P sind gleich den doppelten Dreiecksflächen POA, POB; das Moment der Resultanten OC in Bezug auf denselben Punkt P ist seinerseits das Doppelte der Dreiecksfläche POC. Diese Momente sind nun aber selbst gerichtete Größen und können durch gerade Linien dargestellt werden, welche durch einen gemeinschaftlichen Punkt gehen und auf den die Momente darstellenden Flächen senkrecht errichtet sind. Die positiven Richtungen dieser Linien bestimmen zugleich diejenigen Seiten der Flächen, die als ihre positiven Seiten zu gelten haben; die Festsetzung dieser positiven Richtungen geschieht folgendermaßen: Die Begrenzungslinie jeder Fläche werde von einem Punkte durchlaufen, der auf seinem Wege die Linie, welche eine gerichtete Größe darstellt (z. B. die Linie OA), in positiver Richtung durchläuft; dann ist die positive Richtung der die Fläche repräsentierenden Linie nach derjenigen Seite der Fläche hin gerichtet, von der aus gesehen der Umlauf des Punktes um die Fläche in der linkshändigen oder umgekehrten Uhrzeigerrichtung erfolgt. Werden also z. B. die Linien des Umlaufes $POAP$ in der durch die Reihenfolge der Buchstaben gekennzeichneten Folge durchlaufen, womit erreicht ist, daß der Vektor OA in positiver Richtung durchlaufen wird, so ist die die Fläche POA bezw. das Moment darstellende Linie nach dem Beschauer der Figur hin zu errichten; entsprechend sind die Linien, welche POB bezw. POC repräsentieren sollen, nach der rechten Seite von POB bezw. nach derjenigen Seite von POC, auf der A liegt, zu errichten; die geraden Pfeile deuten diese Richtungen an. Wir wollen die so der Richtung und Größe nach bestimmten Linien die **Streckenwerte** der Flächen nennen.

Fig. 96.



119. Streckenwerte von Flächen. Hiernach sind Flächen als gerichtete Größen anzusehen und gehorchen allen Gesetzen solcher. Der Streckenwert einer Fläche kann in zwei Komponenten zerlegt werden, deren eine senkrecht steht auf irgend einer Ebene, auf welche die Fläche projiziert ist, deren andere parallel zu dieser Ebene ist; diese

Komponenten sind zugleich die Streckenwerte der Projektionen der Fläche auf Ebenen, die zu ihnen senkrecht sind. Wenn alsdann die Summe der Projektionen irgend einer Reihe von Flächen auf irgend eine Ebene gleich der Projektion einer Fläche S auf diese Ebene ist, so ist auch die Summe der Komponenten der Streckenwerte der Flächen, senkrecht zu der Projektionsebene, gleich der Komponente des Streckenwertes der Fläche S in derselben Richtung.

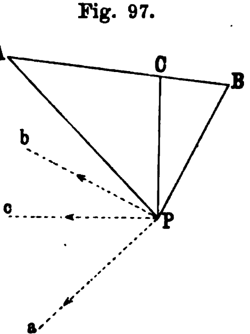
Werden also die Streckenwerte von einem Punkte aus in den betreffenden Richtungen gezogen, so muß der Streckenwert von S die Resultante der die übrigen Flächen darstellenden Strecken sein, widrigenfalls die eben gemachte Feststellung nicht erfüllt sein könnte.

Nun ist die Projektion des Parallelogrammes $OACB$ auf eine beliebige Ebene stets wieder ein Parallelogramm; auf welche Ebene mithin auch die Linien der Fig. 96 projiziert werden mögen, das Ergebnis ist stets eine Figur in dieser Ebene, bei welcher Linien gezogen sind von der Projektion p von P nach den Projektionen o, a, c, b von $OACB$, und diese erfüllen die Bedingung, daß

$$\triangle poc = \triangle poa + \triangle pob$$

ist. Somit ist die Projektion von POC auf eine beliebige Ebene gleich der Summe der Projektionen von POA, POB auf diese Ebene, und wenn die Streckenwerte der Momente von ω_1, ω_2, ω in Bezug auf O in diesem Punkte in je zwei Komponenten zerlegt werden, eine senkrecht zu einer gewählten Ebene, die andere in ihr, so erhält man zwei Zeichnungen, für deren jede die obige Beziehung

Fig. 97.



$$\triangle poc = \triangle poa + \triangle pob$$

erfüllt ist. Da somit der Satz von den Komponenten gilt, ist auch das Moment von OC, d. h. von ω, in Bezug auf P die Resultante der Streckenwerte von ω_1 und ω_2 in Bezug auf P.

Die Streckenwerte, die man durch Projektion auf irgend eine Ebene erhält, sind die Momente ω_1, ω_2, ω um eine durch P gehende, zu dieser Ebene senkrechte Axe (vgl. w. u. § 155).

Dasselbe Theorem gilt, wenn ein starrer Körper zwei Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 um zwei parallele Axen A, B hat. Obwohl dieser Fall aus dem früheren abgeleitet werden könnte, ist es doch angezeigt, ihn einer besonderen Betrachtung zu unterwerfen.

In Fig. 97 sei P irgend ein Punkt, α, β seine Entfernungen von A, B, den Durchschnittspunkten der Axen mit einer auf ihnen senkrechten, durch P gehenden Ebene. Werden dann $\alpha\omega_1$, $\beta\omega_2$ als Strecken längs AP, BP genommen, so sind $i\alpha\omega_1$, $i\beta\omega_2$ Strecken längs Pa, Pb,

senkrecht zu AP, BP, und stellen die Geschwindigkeiten von P infolge der Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 dar. Die Resultante dieser Strecken ist $i(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)$, sie ist daher senkrecht zu der Strecke $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2$, der Resultante der Strecken AP und BP. Das ist aber, wie wir in § 20 gesehen haben, die Strecke, welche P mit C verbindet, nämlich mit dem Punkte, der die Linie AB so teilt, daß sich $AC:CB = \omega_2:\omega_1$ verhält; es ist also gleich $(\omega_1 + \omega_2)CP$. Somit haben wir:

$$i(a\omega_1 + \beta\omega_2) = i(\omega_1 + \omega_2)CP;$$

d. h. der Punkt P dreht sich um C mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 + \omega_2$ und einer linearen Geschwindigkeit längs Pc im Betrage von $(\omega_1 + \omega_2)CP$.

120. Zusammensetzung von Schraubenbewegungen und Drillungen. Wir wollen nun zwei gegebene Schraubenbewegungen um Axen, die aufeinander senkrecht stehen und sich in einem Punkte schneiden, zusammensetzen. Die Richtungen seien in Fig. 98 durch OX und OY dargestellt, die Winkelgeschwindigkeiten seien ω_1 und ω_2, die Ganghöhen p_1 und p_2; die Verschiebungsgeschwindigkeiten sind dann $\omega_1 p_1$ und $\omega_2 p_2$. Bezeichnet θ den Winkel, den die Richtung der resultierenden Winkelgeschwindigkeit mit OX bildet, so hat man für diese Resultante längs OP den Wert $\omega_1 \cos\theta + \omega_2 \sin\theta$. Anderseits ist aber $\omega_1 \sin\theta - \omega_2 \cos\theta = 0$; es ergibt sich also

$$tg\,\theta = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

womit die Richtung von OP bestimmt ist. Die linearen Geschwindigkeiten in dieser Richtung und senkrecht zu ihr sind bestimmt durch die Ausdrücke

$$\omega_1 p_1 \cos\theta + \omega_2 p_2 \sin\theta, \qquad \omega_1 p_1 \sin\theta - \omega_2 p_2 \cos\theta.$$

Die erste von ihnen gibt in Verbindung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

eine Schraubenbewegung um OP mit der Ganghöhe

$$p = \frac{\omega_1 p_1 \cos\theta + \omega_2 p_2 \sin\theta}{\omega},$$

oder, da $\omega_1 = \omega \cos\theta$ und $\omega_2 = \omega \sin\theta$ ist:

$$p = p_1 \cos^2\theta + p_2 \sin^2\theta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (91)$$

Nun sind die Winkelgeschwindigkeit ω um die Linie OP und die zu ihr senkrechte Geschwindigkeit $\omega_1 p_1 \sin\theta - \omega_2 p_2 \cos\theta$ (der zweite der obigen Ausdrücke) zusammengenommen nach § 113 äquivalent einer Rotation um eine Axe, die zu OP parallel ist und in einer Höhe z über der Ebene der Axen OX, OY liegt, die durch die Beziehung

$\omega s = \omega_1 p_1 \sin\theta - \omega_2 p_2 \cos\theta$ gegeben ist, d. h. da $\omega = \omega_1/\cos\theta$ $= \omega_2/\sin\theta$ ist, durch die Beziehung

$$s = \frac{p_1 - p_2}{2} \sin 2\theta \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (92)$$

Die Resultante unserer beiden Schraubenbewegungen ist also eine Schraubenbewegung von der Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{{}_1^2 + \omega_2^2}$ um eine zu OP parallele, in der Höhe $\frac{1}{2}(p_1 - p_2) \sin 2\theta$ über der Ebene der Axen OX und OY gelegene Axe.

Das Resultat gilt naturgemäß auch für zwei beliebige Schraubenverrückungen oder Drillungen von den Amplituden ω_1, ω_2.

Die neue Axe kann in folgender Weise konstruiert werden. Man nehme auf OX und OY zwei von O gleich weit entfernte Punkte A

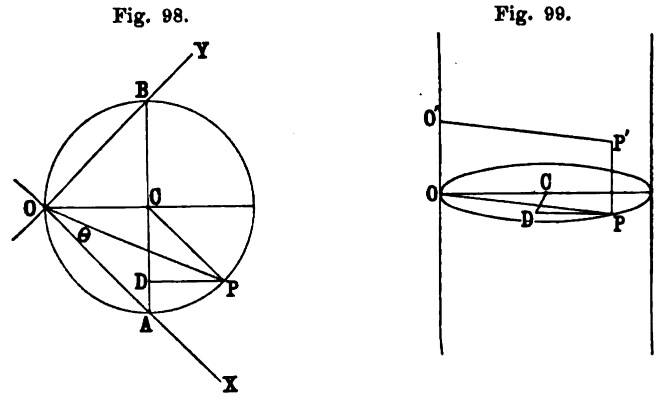


Fig. 98. Fig. 99.

und B (Fig. 98) von der Eigenschaft, daß $AB = p_1 - p_2$ ist. Durch AOB lege man einen Kreis und verbinde seinen Mittelpunkt C (zugleich Mittelpunkt von AB) mit P. Der Winkel ACP ist als Zentriwinkel gleich 2θ (θ der Peripheriewinkel), und CP ist gleich $\frac{1}{2}(p_1 - p_2)$; folglich ist, wenn $PD \perp AB$ steht, $PD = \frac{1}{2}(p_1 - p_2) \sin 2\theta$. Nun errichte man (Fig. 99) in P ein Lot PP' auf der Kreisebene von der Länge PD und ziehe von P' eine Parallele zu PO, bis sie die OZ-Axe, die in O auf der XY-Ebene senkrecht steht, in O' trifft. Diese Linie $O'P'$ ist die Axe der resultierenden Drillung, d. h. die Axe der Schraube, welche die gesuchte Bewegung repräsentiert.

121. Das Zylindroid. Nehmen wir an, daß θ mit der Änderung von ω_1 und ω_2 sich gleichförmig ändert, während p_1 und p_2, von denen θ nicht abhängt, konstant gehalten werden, so erhalten wir eine Folge von Lagen der Axe $O'P'$ der resultierenden Drillung. Und zwar dreht sich, während sich θ gleichförmig ändert, OP um O, und $O'P'$ dreht sich um die Axe OO' und bewegt sich zugleich längs OO' nach dem Gesetze einer einfachen Schwingung, von der zwei Perioden in einer Umdrehung enthalten sind. Somit liegt $O'P'$ auf einer Fläche, deren

Gleichung folgendermaßen gefunden werden kann. Die Koordinaten von P in Bezug auf die Axen OX, OY seien x, y, die dritte Koordinate von P' sei z; dann hat man

$$y = z tg\,\theta$$
$$z = \tfrac{1}{2}(p_1 - p_2) \sin 2\theta,$$

woraus sich sofort

$$\frac{y}{z} \cos^2\theta = \frac{2x}{p_1 - p_2}$$

ergibt; anderseits ist aber

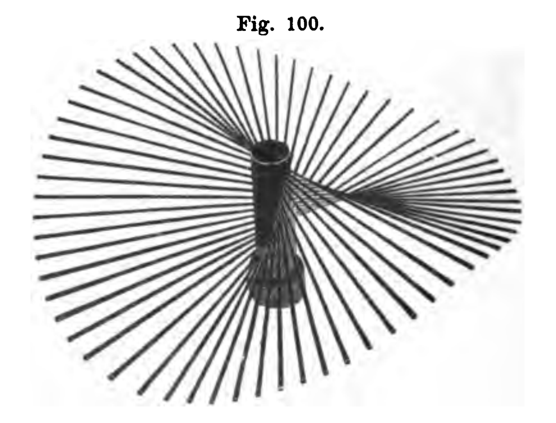
$$\cos^2\theta = \frac{x^2}{x^2 + y^2},$$

man erhält also

$$2z(x^2 + y^2) = (p_1 - p_2)xy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

Diese Fläche wird Zylindroid genannt. Die Fig. 100 zeigt die aufeinanderfolgenden Lagen der Generatrix $O'P'$ und gibt eine Vorstellung

Fig. 100.



von der Form der Fläche. Die Zeichnung, die aus Balls Schraubentheorie entnommen ist, stellt ein Modell dar; die Axe, aus der die erzeugenden Linien herauskommen, müßte eigentlich unendlich dünn sein, und die erzeugenden Linien selbst müßten bis ins Unendliche verlängert werden. Die Axe OO' (Fig. 99) heißt die Direktrix der Fläche.

122. Der Ganghöhenkegelschnitt. Die Ganghöhe irgend einer Schraube auf dem Zylindroid ist durch die Gleichung (91) gegeben. Konstruiert man die Kurve — einen Kegelschnitt —, deren Gleichung

$$p_1 x^2 + p_2 y^2 = h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

ist, wo h irgend eine konstante Größe bedeutet und $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$ ist, so sieht man, daß die Ganghöhe p der Schraube für eine mit OX den Winkel θ bildende Generatrix gleich h/r^2 ist. Die Ganghöhe ist also umgekehrt proportional dem Quadrat des in der gegebenen

Richtung verlaufenden Radiusvektors des durch Gl. (94) dargestellten Kegelschnittes. Derselbe ist eine Ellipse, falls die Ganghöhen dasselbe Vorzeichen haben, eine Hyperbel, falls sie entgegengesetzte Vorzeichen haben. Die Kurve kann Ganghöhenkegelschnitt genannt werden. Ist er eine Hyperbel, so gibt es zwei Richtungen, nämlich die Asymptoten der Hyperbel, für welche der Radiusvektor unendlich ist; es sind das die Richtungen, für welche die Beziehung $tg^2\theta = -p_1/p_2$ gilt; für sie ist die durch den Kegelschnitt gelieferte Ganghöhe null, d. h. die entsprechende Bewegung ist eine Rotationsbewegung.

123. Zwei beliebige Schrauben liegen auf einem Zylindroid. — Äquilibrant zweier gegebener Drillungen um zwei beliebige Schrauben. Es läßt sich nun zeigen, daß man ein Zylindroid so bestimmen kann, daß es zwei beliebige Schrauben enthält, mit anderen Worten, daß zwei seiner Generatrizen die Schraubenaxen darstellen und daß überdies die Verteilung der Ganghöhen auf ihm eine derartige ist, daß jene Generatrizen auch die Ganghöhen der gegebenen Schrauben haben.

Sind θ und θ', p und p', z und z' die die beiden Schrauben charakterisierenden Größen, so sind die Differenzen $\theta - \theta'$, $p - p'$, $z - z'$, die wir bezw. A, P, H nennen wollen, sowie p und p' selbst bekannt. Durch diese Größen kann man die Ganghöhen p_1, p_2 für ein Zylindroid, auf welchem die beiden gegebenen Schrauben liegen, sowie die Werte von θ und z finden. Es ist leicht nachzuweisen, daß die Formeln gelten:

$$p_1 - p_2 = \sqrt{P^2 + H^2}\,\frac{1}{\sin A}, \quad p_1 + p_2 = p + p' - P\,ctg\,A$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}\left[A + arctg\,\frac{P}{H}\right], \quad z = \tfrac{1}{2}(H + P\,ctg\,A).$$

Ein Körper erfahre Drillungen von den Amplituden α, β, γ um drei auf einem Zylindroid gelegene Schrauben; die Winkel ihrer Axen mit OX seien θ, φ, ψ. Die Winkelverrückungen des Körpers um die Axen OX, OY sind

$$\alpha\cos\theta + \beta\cos\varphi + \gamma\cos\psi \quad \text{bezw.} \quad \alpha\sin\theta + \beta\sin\varphi + \gamma\sin\psi;$$

die linearen Verrückungen längs der Axen sind eben diese Ausdrücke, multipliziert mit den Ganghöhen p_1, p_2 der Drillungen um die Axen. Jede dieser vier Verrückungen verschwindet identisch, wenn die Beziehungen

$$\frac{\alpha}{\sin(\varphi - \psi)} = \frac{\beta}{\sin(\psi - \theta)} = \frac{\gamma}{\sin(\theta - \varphi)}$$

erfüllt sind, da dieselben jede der Winkelverrückungen in eine Konstante, multipliziert mit einer Determinante, verwandeln, von der zwei Reihen identisch sind. Sind also diese Beziehungen erfüllt, so ist die Resultante der drei Drillungen gleich null, und der Körper hat überhaupt keine Verrückung erfahren.

Es gibt noch zahlreiche Schlüsse von hervorragendem Interesse, zu denen die vorliegende Theorie führt; es würde aber hier zu weit führen, sie zu behandeln. In Verbindung mit der Dynamik starrer Körper wird noch einmal darauf zurückzukommen sein; im übrigen sei auf das Buch von Sir Robert Ball über die Theorie der Schrauben[1]) verwiesen; diesem Mathematiker ist die in Rede stehende Methode, die Dynamik starrer Körper zu behandeln, in erster Reihe zu danken.

Das Problem der Freiheitsgrade eines starren Körpers und ihrer Einschränkung durch Zwang gehört eigentlich auch zur Kinematik und kann mit Hilfe der Theorie der Schrauben sehr elegant entwickelt werden. Indessen ist es doch ratsam, seine Behandlung zu verschieben, um sie in Gemeinschaft mit der Theorie des Gleichgewichtes eines starren Systems nachzuholen; in dem Kapitel über Statik soll das geschehen.

124. Dimensionen von Geschwindigkeit und Beschleunigung. Da der Zahlenwert der Geschwindigkeit die Anzahl der Verrückungseinheiten, dividiert durch die dazu erforderte Anzahl von Zeiteinheiten, ist, kann man, wie schon in § 7 angegeben wurde, für irgend eine wirkliche Geschwindigkeit V die Gleichung

$$V = v\,[L T^{-1}]$$

aufstellen, wo v der Zahlenwert der Geschwindigkeit in den Einheiten der Länge L und der Zeit T ist. Werden diese Einheiten von L, T in L', T' geändert, wobei $L = \lambda L'$, $T = \tau T'$ ist, so hat man für dieselbe Geschwindigkeit die neue Gleichung

$$V = v\lambda\tau^{-1}\,[L' T'^{-1}] = v'\,[L' T'^{-1}].$$

Der neue Zahlenwert ist $v' = v\lambda\tau^{-1}$, also das Verhältnis des neuen zum alten Werte $\lambda\tau^{-1}$.

Es sei z. B. $L = 1$ km, $T = 1$ Stunde, und man soll das Verhältnis v'/v finden, wenn die Einheiten in $L = 1$ m, $T = 1$ sec geändert werden. Dieses Verhältnis ist 1000/3600 oder 5/18; d. h. der Zahlenwert v' einer Geschwindigkeit in den letzteren Einheiten ist 5 18 von dem Zahlenwert v der Geschwindigkeit in den erstgenannten Einheiten.

Ganz analog wird die Dimensionsformel der Beschleunigung gefunden. Der Zahlenwert einer Beschleunigung ist die Anzahl der Geschwindigkeitseinheiten, die in einem gegebenen Zeitteilchen zu der schon vorhandenen Anzahl neu hinzugefügt werden, dividiert durch die Anzahl der Zeiteinheiten in diesem Zeitteilchen. Die Einheit der Beschleunigung ist eine Beschleunigung, bei welcher in der Zeiteinheit die Einheit der Geschwindigkeit neu erzeugt wird; man erhält also die Dimensionsformel (B = Beschleunigung, b ihr reiner Zahlenwert):

$$B = b\,[L T^{-2}].$$

[1]) Sir Robert Ball, Theory of Screws. Cambridge 1900.

Geht man von den Einheiten L und T zu den neuen L' und T' über, so erhält man:

$$B = b\,\lambda\,\tau^{-2}\;[L'\,T'^{-2}],$$

wo λ und τ dieselbe Bedeutung wie vorhin haben. Ist wieder $L = 1$ km, $T = 1$ Stunde, dagegen $L' = 1$ m, $T' =$ sec, so hat man

$$B = b\,\frac{1000}{3600^2}\,[L'\,T'^{-2}] = b'\,[L'\,T'^{-2}];$$

das Verhältnis $b' : b$ ist also $1 : 12960$.

Drittes Kapitel.

Dynamik.

125. Wirkungen zwischen Körpern. Aktion und Reaktion (Wirkung und Gegenwirkung). Wir kommen jetzt zur Betrachtung der eigentlichen Dynamik. Es ist Gegenstand gewöhnlicher Beobachtung, daß Körper derart aufeinander wirken, daß die relativen Bewegungen der verschiedenen Teile eines Systems stetigem Wechsel unterliegen. Ein in die Luft geworfener Stein wird nach der Erde zu angezogen und beschreibt, relativ zur Erde, sehr annähernd eine Kurve, die wir schon kurz betrachtet haben. Ein Stein, den man von der Höhe herunterfallen läßt, bewegt sich nahezu (vgl. § 280) vertikal nach unten mit gleichförmig wachsender Geschwindigkeit, und wir werden zu dem Schlusse geführt, daß diese Beschleunigung dem Vorhandensein der Erde zuzuschreiben ist. Wie wir alsbald sehen werden, ist die Wirkung gegenseitig. Die Erde, so wollen wir sagen, zieht den Stein an, der Stein zieht die Erde an.

Wir sagen, daß zwischen den beiden Körpern eine Spannung wirksam ist, d. h. eine gegenseitige Wirkung vorhanden ist, die gewissermaßen zwei Seiten hat, nämlich die gleichen und entgegengesetzten Wirkungen des einen Körpers auf den anderen und des anderen auf den einen. Wenn z. B. an den beiden Enden einer ausgezogenen Spiralfeder zwei Massen befestigt sind, so ist in der Feder eine Spannung vorhanden, und die Körper werden durch die Feder in entgegengesetzten Richtungen gezogen; und wenn die Beschleunigung der Masse der Feder selbst vernachlässigt wird oder null ist, so ist der Zug nach beiden Seiten gleich, in einem Sinne, der später erklärt werden wird.

Es ist sehr wichtig, diese Doppelseitigkeit der Wirkung zwischen je zwei Körpern dauernd im Auge zu behalten. Ohne sie wird die Theorie der Energie, auf die wir alsbald eingehen werden, im Hinblick auf die Relativität der Bewegung unverständlich. Wenn wir weiter unten von einem Zug als auf einen Körper ausgeübt sprechen werden, so betrachten wir diesen Zug eben nur in einer seiner beiden Bedeutungen.

Es ist ein allgemein verbreiteter Gedanke, daß irgend eine Wirkung auf einen sich bewegenden Körper ausgeübt werden müsse, ohne die der Körper sich nicht weiterbewegen könnte. So hatte Kepler die Vorstellung, daß die Erde zwischen Strahlen gehalten würde, die von der Sonne ausgehen und in solcher Weise rotieren, daß sie die Erde rund um ihre Bahn tragen. Ferner wird der Körper häufig als im Besitz der Eigentümlichkeit angesehen, eine gewisse „Kraft" hervorzubringen, wenn er auf ein Hindernis trifft, z. B. wenn ein fallender Körper auf die Erde aufschlägt.

Diese Gedanken werden im allgemeinen mehr oder weniger unbestimmt ausgedrückt; aber sofern sie einen bestimmten Sinn haben, sind sie irrig. Eine Bewegungsänderung in einem Teile der Materie wird immer durch die Wirksamkeit eines anderen Teiles von Materie zuwege gebracht.

Wenn eine Bombe explodiert, so werden ihre verschiedenen Teile durch die Wirkung, welche die durch die schnelle Verbrennung der Ladung plötzlich erzeugten gasigen Produkte auf sie ausüben, nach verschiedenen Richtungen getrieben; der wohlgeglättete Schlittschuh bewegt sich viel länger vorwärts, ohne zur Ruhe zu kommen, wenn man ihn auf gut gefegtem glatten Eise gleiten läßt, als wenn er durch Hindernisse oder die Reibung an rauher Oberfläche gehemmt wird; auch weiß der Schlittschuhläufer wohl, daß er im schnellen Fahren die Richtung seines Laufes nicht ändern kann, ohne nach der einen oder anderen Seite auszuschlagen, und daß die Strecke, die er ohne auszuschlagen zurücklegen kann, von der Glätte der Oberfläche und dem Betrage jeglichen Widerstandes, den er erfährt, abhängt.

126. Erstes Newtonsches Bewegungsgesetz. Die volle Wahrheit in dieser Sache wurde zuerst von Newton in seinen „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", in seinem ersten Bewegungsgesetz, ausgesprochen.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Jeder Körper verharrt in seinem Zustande der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange er nicht durch auf ihn ausgeübte Kräfte gezwungen wird, diesen seinen Zustand zu ändern.

Er fügt die folgende kurze Erklärung der Bedeutung des Gesetzes bei:

Ein Geschoß bleibt in seiner Bewegung, wenn es nicht durch die Wirkung des Luftwiderstandes verzögert und durch die Wirkung der Schwerkraft nach unten gezogen wird. Die verschiedenen Teile eines Rades werden infolge ihres Zusammenhanges beständig gezwungen, von gerad-

liniger Bewegung abzuweichen, und das Rad hört nicht auf sich zu drehen außer durch die Verzögerung durch den Luftwiderstand. Indessen behalten Planeten und Kometen sehr lange ihre Translations- und Bahnbewegungen bei, weil ihre Körper in den Räumen, worinnen sie sich bewegen, geringerem Widerstande begegnen.

In diesem Gesetze wird ausgesagt, daß die Bewegung eines Körpers sich nur durch die Einwirkung anderer Körper ändert. Auch folgt aus der Behauptung, daß, wenn ein Körper gefunden werden kann, der genügenden Grund zu der Annahme bietet, daß er keine Einwirkung von anderen Körpern erfährt, dieser Körper gleiche Strecken in gleichen Zeiten beschreibt und zum Messen der Zeit benutzt werden kann; auch werden die nach verschiedenen solchen Körpern ausgeführten Messungen der Zeit unter sich übereinstimmen. Dies ist die oben (§ 8) angedeutete dynamische Methode der Zeitrechnung, durch welche die Gleichförmigkeit der Erdrotation geprüft werden muß, und nach welcher schon ein Versuch zur Messung der Größe der Änderung der Rotationsperiode gemacht worden ist. Es soll später versucht werden, diese Vergleichung einigermaßen zu besprechen.

127. Relativität der Bewegung. Es muß hier bemerkt werden, daß die Bewegung relativ ist, und daß es, um die Bewegung eines Systems zu beobachten und zu messen, notwendig ist, eine Anzahl von Axen festzusetzen, auf die Bezug zu nehmen ist. Diese Axen können an jedem beliebigen Körper festgesetzt werden und sind dann, auf diesen Körper bezogen, in Ruhe. Dann bleiben die darauf bezogenen Bewegungen unberührt von Veränderungen (die auf irgend ein anderes System bezogen werden), die den Axen und dem Körper, dessen Bewegung in Rede steht, gemeinsam sind. Aber, wenn wir auch Beschleunigungen relativ zu diesen Axen betrachten und ein entsprechendes System einwirkender Kräfte erhalten könnten, so würde doch die Verwirklichung der Methode der Zeitrechnung Beziehung auf Axen verlangen, die an einem von anderen Körpern nicht beeinflußbaren Körper festgesetzt wären, und so wären wir der Schwierigkeit, einen solchen Körper zu finden, gegenübergestellt. Ohne ihn können wir nicht sagen, was wir mit einer geraden Linie oder einer gleichförmigen Bewegung meinen.

128. Vergleichung abstrakter Dynamik mit der Erfahrung. Definition eines Teilchens. Der Weg, der aus diesen Schwierigkeiten herausführt, liegt in der Betrachtung der Dynamik als auf idealen Vorstellungen begründet, gerade wie die Geometrie, und als für ihre Anwendung auf praktische Probleme, von gewissen Annahmen abhängig, die durch die Resultate der Erfahrung gerechtfertigt werden müssen. Tatsächlich ist die abstrakte Dynamik eine rein ideale Wissenschaft, geometrisch in einem Sinne, der einigermaßen erweitert ist durch die

Einführung gewisser Begriffe, die für gewöhnlich in rein geometrischen Prozessen nicht angewandt werden. Solange wir uns, wie in der Geometrie, auf die Abstraktion beschränken, finden wir in ihr auch nur dieselben Schwierigkeiten, die wir bei den geometrischen Vorstellungen haben, und von diesen soll hier nicht die Rede sein. Die besonderen, fundamentalen Schwierigkeiten entstehen erst, wenn die Wissenschaft zur Deutung der Natur angewandt wird, und alle mit ihrer Hilfe gefundenen Lösungen hängen von Hypothesen ab, die durch den Vergleich der Resultate mit der Beobachtung gerechtfertigt werden müssen.

Es ist indessen nicht wünschenswert, in der Behandlung der dynamischen Prinzipien und im Aufbau ihrer Wissenschaft ein Gebäude reiner Abstraktionen aufzuführen; im Gegenteil, sobald die Grundbegriffe festgelegt sind, dürfen und sollen wir Experiment und Beobachtung auf Schritt und Tritt zu Rate ziehen. Abstrakte Dynamik soll mit praktischer Dynamik Hand in Hand gehen, d. h. sie soll fortwährend Bezug nehmen auf und so weit als möglich erläutert werden durch Beispiele aus der Physik und Technik. Sonst wird sie zum bloßen Gestelle, Beispiele reiner Geometrie und Analyse daran aufzuhängen, statt der geeigneten theoretischen Basis für die große experimentelle, beobachtende und mathematische Wissenschaft, die wir physikalische Dynamik nennen können.

Wir werden im folgenden häufig den Ausdruck Teilchen anwenden. Ein Teilchen kann theoretisch betrachtet werden als eine in einem geometrischen Punkte konzentrierte Masse, obgleich wir natürlicherweise praktisch mit einem diese Definition erfüllenden Teilchen nichts zu tun haben. Praktisch kann ein Teilchen als ein Körper betrachtet werden, der in jeder Dimension, im Vergleich mit seiner Entfernung von einem anderen Körper, sehr klein ist.

129. Messung der Zeit. Wir haben also zunächst die Aufgabe, irgend einen festen Maßstab für die Messung der Zeit zu suchen. Hierin lassen wir uns führen durch den aus dem oben festgestellten Bewegungsgesetz abgeleiteten Gedanken, daß jeder Körper, der in einer relativen Bewegung begriffen ist, von der aus der Beobachtung zu schließen ist, daß sie durch die Wirkung anderer Körper nicht verändert wird, als Zeitmesser dienen kann. Indem wir die Drehung der Erde als unseren Maßstab für die Zeitmessung nehmen, benutzen wir tatsächlich das Resultat dieses Gedankens in Verbindung mit der schon oben erwähnten Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, wie wir im folgenden zeigen werden. Oder wir können einen anderen, entweder von dieser Idee eingegebenen oder willkürlich gewählten Zeitmesser annehmen; seine Brauchbarkeit für physikalische Anwendung wird dann nur Sache der Beglaubigung a posteriori sein.

Wenn wir nach Übereinkunft oder Wahl einen Weg gefunden haben, gleiche Zeitabschnitte auszusondern, ist der nächste Schritt, ein

System von Beziehungsaxen aufzustellen. Betrachten wir die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen verschiedener Teilchen (§ 125) in Beziehung auf diese Axen. Die Teilchen haben in Bezug auf diese Axen irgend welche Beschleunigungen, welche bekannt sind oder von gegebenen Daten abgeleitet werden können, und so kann aus der Konfiguration zu einer gegebenen Zeit die zu einer beliebigen anderen, also, kurz gesagt, die Bewegung ermittelt werden. Wenn die Teilchen ihre Lage relativ zueinander nicht ändern, so sind der Bewegung Schranken auferlegt, die Teilchen bilden einen „starren" Körper. So haben wir die Wissenschaft der reinen Kinematik, mit der wir uns in den vorhergehenden Kapiteln befaßt haben.

130. Übergang von einem Bezugsystem zu einem anderen. Wir wollen uns jetzt unser Bezugsystem, das wir A nennen können, relativ zu einem anderen Bezugsystem B bewegt denken; die Bewegung der Teilchen mit Bezug auf dieses andere System wird in irgend einem Augenblicke zusammengesetzt sein aus derjenigen Bewegung, welche die Teilchen in Bezug auf B haben würden, wenn sie mit A starr verbunden wären (in den Lagen, die sie in diesem Augenblicke einnehmen), und den Bewegungen, welche die Teilchen im selben Augenblicke in Bezug auf A haben. Wenn die Bewegung von A in Bezug auf B bestimmt ist, ist es nicht schwierig, den ersten Teil der Bewegung jedes Körpers zu finden; er wird sich — wie man sich erinnern muß — mit den wechselnden Lagen der Teilchen infolge ihrer Bewegungen in Bezug auf A ändern. Beispiele für diesen Vorgang bietet die oben besprochene ebene Bewegung eines starren Körpers, z. B. die Bewegung der Schreibspitze einer Zykloide im rollenden Kreise und auf dem Blatte, auf das die Kurve verzeichnet wird.

Wir können die Bezugnahme noch weiter zurückschieben und so immer, wenn es nötig ist, von einem Bezugsystem zum anderen übergehen. Es liegt freilich kein Grund vor, zu glauben, daß wir durch irgend einen solchen Vorgang jemals zu Axen gelangen könnten, die als absolut fest anzusehen wären; aber es ist dasjenige Vorgehen, durch welches die durch die Erfahrung eingegebenen Korrektionen eingeführt werden müssen, wie wir weiter unten sehen werden.

Wir finden also durch Beobachtung, daß wir bei einem durch wirkliche Körper festgelegten Bezugsystem Halt machen können, vielleicht gleich bei dem ersten, A, das uns durch die Natur der jeweiligen Umstände geliefert wird. Bis zu einem gewissen Grade können wir die Wirkung der Beziehung eines gewählten Systems auf andere, durch die Natur angegebene Bezugsysteme in Betracht ziehen und sicher sein, daß die für die Teile unseres Systems noch zuzusetzenden Bewegungen unmerklich oder zu vernachlässigen sind.

Z. B. beziehen wir die Bewegung eines Geschosses auf drei in der Erde feste Axen, etwa eine vertikal nach oben, eine nord-, die andere

westwärts und betrachten die Bewegung. Wir finden, daß die Ergebnisse der Annahme, dieses Axensystem sei fest, nur annähernd mit der Erfahrung übereinstimmen, und wir müssen sie auf Grund der Drehung der Erde relativ zu den Fixsternen korrigieren. Möglicherweise gibt es noch andere Korrektionen, welche der vollkommenen Exaktheit näher kommende Beobachtungen erschließen könnten, aber wir haben keinen Beweis für ihr Vorhandensein.

131. Trägheit oder Masse. Bis hierher haben wir es lediglich mit rein kinematischen Begriffen zu tun gehabt; nunmehr müssen wir den Begriff der Trägheit oder Masse einführen. Wir beobachten unzählige Male, daß verschiedene Körper unter Umständen, die wir als gleiche anzusehen erfahrungsgemäß berechtigt sind, doch verschiedene Beschleunigungen annehmen. Freilich machen wir, indem wir in verschiedenen Fällen „Gleichheit der Umstände" annehmen, stillschweigend die Voraussetzung, daß die Körper ihre physikalischen Eigenschaften inzwischen nicht geändert haben, was natürlich stets besonderer Erwägung bedarf. Beobachten wir z. B. den Antrieb, den eine elastische Feder erst einem, dann einem anderen Körper erteilt und finden wir beide verschieden, so könnten wir dies auf eine Änderung der Feder schieben, wenn wir nicht durch einen dritten Versuch bei dem ersten Körper wieder den früheren Antrieb wiederfänden, so daß die Differenz wirklich in der Verschiedenheit der beiden Körper zu suchen ist; denn daß die Feder sich immer abwechselnd verändere und wieder den früheren Zustand annehme, wird man nicht behaupten wollen. Überhaupt ließe die Tatsache, daß eine Feder (wenigstens lange Zeit hindurch) auf denselben Körper in gleichen Zeiten gleiche Wirkungen ausübt, außer der Erklärung, daß Feder und Körper unverändert geblieben sind, nur noch die andere zu, daß sie sich in genau gleichem Verhältnis geändert haben; eine Annahme, die, da sie schließlich für alle Dinge gelten müßte, gänzlich unfruchtbar bliebe und deshalb aus dem Spiele gelassen werden darf. Wir wollen also ruhig von „gleichen Umständen" reden, wofür eine Feder mit gegebener Spannung ein Beispiel ist.

132. Vergleichung der Trägheiten verschiedener Körper. Wir finden also, wie gesagt, daß verschiedene Körper unter gleichen Umständen verschiedene Beschleunigungen annehmen. Wir gewinnen hieraus die Vorstellung, daß die Körper der Veränderung ihres Zustandes einen verschiedenen Widerstand entgegensetzen, daß sie verschiedene Trägheit besitzen. Ein Maß dieser Trägheit erhalten wir, wenn wir erwägen, daß wir die Beschleunigung b_1, b_2, b_3 ... mit verschiedenen Faktoren m_1, m_2, m_3 ... multiplizieren müssen, um immer dasselbe Produkt K zu erhalten, nämlich offenbar mit den Faktoren:

$$m_1 = \frac{K}{b_1}, \quad m_2 = \frac{K}{b_2}, \quad m_3 = \frac{K}{b_3} \cdots$$

Diese Größen m heißen die Trägheiten oder gewöhnlich die Massen der Körper.

Wenn man, wie dies zuweilen geschieht, die Masse als den Gehalt eines Körpers an Materie definiert, so ist dies nichts als eine leere Wortumschreibung. Die wahre Definition knüpft an das an, was wir an den Körpern beobachten, an ihre Bewegung.

Wenn man ferner, wie dies in zahlreichen Büchern geschieht, den Satz aufstellt: Die Beschleunigungen der Körper unter gleichen Umständen sind umgekehrt proportional ihren Massen, so ist das tatsächlich, nicht aber erkenntnistheoretisch richtig ausgedrückt. Denn das Beobachtete ist die Beschleunigung, das hieraus Erschlossene die Masse, und es ist demgemäß vielmehr so zu sagen:

„Die Massen, die man verschiedenen Körpern beilegen muß, sind den unter gleichen Umständen an ihnen beobachteten Beschleunigungen umgekehrt proportional."

Oder, direkt in der Form der Definition des Begriffes Masse:

„Massen der Körper sind die Faktoren, mit denen man ihre unter gleichen Umständen angenommenen Beschleunigungen multiplizieren muß, um für alle dasselbe Produkt zu erhalten."

133. Kraft. Vergleichung verschiedener Kräfte. Durch die Einführung der Faktoren m sind wir zugleich noch zu einer anderen neuen Größe, dem Produkte K, gelangt. Diese Größe ist für alle Körper, auf welche bestimmte Umstände einwirken, dieselbe; sie kann also nichts mit diesen Körpern zu tun haben, sie ist lediglich ein Maß jener „gleichen Umstände", welche die Körper in Bewegung setzen bezw. ihre Bewegung ändern. Das uns innewohnende Kausalitätsbedürfnis hat dazu geführt, jene Umstände als die Ursache, diese Beschleunigung als ihre Wirkung aufzufassen. Jene Ursache aber nennt man, indem man die Idee der in uns vorhandenen Muskelkraft überträgt und verallgemeinert: Kraft. Es ist aber stets im Auge zu behalten, daß, während die Muskelkraft in unserer Empfindung lebt, die physikalischen Kräfte lediglich Abstraktionen aus den beobachteten Erscheinungen sind.

Kraft wird also gemessen durch das Produkt irgend einer Masse in die Beschleunigung, die sie ihr erteilt; dieses Produkt heißt auch Massenbeschleunigung.

134. Gewicht. Von dem Begriff Masse prinzipiell durchaus verschieden ist der Begriff: Gewicht (oder Schwere) der Körper. Es muß das besonders betont werden, weil man praktisch beide häufig identifizieren kann und deshalb auch die Masse von Körpern, statt aus Beschleunigungsversuchen (die höchst heikel und umständlich sein würden), durch Wägung feststellt. In Wahrheit ist aber das Gewicht eines Körpers eine Kraft, nämlich die Kraft, mit der er auf eine Wagschale drückt, oder die ihn, wenn er keine Unterlage hat, frei herabfallen läßt. Nach dem, was wir bereits wissen, ist also das Gewicht

eines Körpers das Produkt seiner Masse und seiner Beschleunigung beim freien Fall. Wie verschiedenartig beide Begriffe sind, geht am deutlichsten daraus hervor, daß ein gegebener Körper eine bestimmte Masse hat, daß hingegen seine Beschleunigung und folglich auch sein Gewicht von Ort zu Ort, wenn auch auf der Erdoberfläche nicht sehr erheblich, variiert; an den Polen und in Bergwerken ist es am größten, am Äquator und auf hohen Bergen am kleinsten. Im Durchschnitt ist die Beschleunigung durch die Schwere auf der Erde etwa $g = 980$ cm/sec², das Gewicht G eines Körpers ist also durchschnittlich

$$G = mg = 980\,m,$$

d. h. das 980fache seiner Masse; der Faktor kann aber zwischen 978 und 983 (infolge örtlicher Verschiedenheiten) schwanken. Bei Wägungen mit der Hebelwage macht sich dies offenbar nicht geltend, weil beide Schalen gleich affiziert werden, wohl aber bei Wägungen mit der Federwage.

135. Masseneinheit. Spezifische Masse oder Dichte. Da die Masse derjenige Faktor ist, der mit der Beschleunigung ein für alle Körper gleiches Produkt liefert, kann man für einen Körper offenbar die Masse ganz willkürlich festsetzen, z. B. $m = 1$ setzen. Man hat hierzu ursprünglich diejenige Wassermasse gewählt, welche bei 4° C. genau 1 ccm Rauminhalt hat und diese Masse ein Gramm genannt. Das Tausendfache dieser Masse ist damals in Gestalt eines Platinstückes fixiert worden; es heißt Normalkilogramm und wird im Original in Paris, in Kopieen an vielen Orten aufbewahrt. Gleichviel nun, ob die damalige Bestimmung genau richtig war oder nicht, als Gramm gilt heutzutage der 1000. Teil des Normalkilogramms.

Bei einem ausgedehnten Körper ist die Masse insofern kein einfacher Begriff, als sie mit dem Volumen desselben im Zusammenhange steht. Erfahrungsgemäß hat von zwei Körpern aus derselben Art von Materie, z. B. von Gold, derjenige, der das doppelte Volumen hat, auch die doppelte Masse: die Masse ist also mit dem Volumen v proportional, m enthält v als Faktor. Die Masse enthält aber, wie die Massenverschiedenheit eines Kubikzentimeters Gold und eines Kubikzentimeters Kupfer zeigt, noch einen anderen Faktor, und diesen nennt man die spezifische Masse oder die Dichte des betreffenden Stoffes. Dichte ist also die Masse pro Volumeneinheit; allgemeiner, bei einem Körper, dessen Dichte sich von Punkt zu Punkt in ihm stetig ändert, ist die Dichte in einem bestimmten Punkte der Grenzwert, dem sich das Verhältnis der Masse eines diesen Punkt umschließenden Teiles des Körpers zum Volumen dieses Teiles nähert, wenn man den Teil kleiner und kleiner wählt; in Formel, wenn ϱ die Dichte ist:

$$\varrho = \frac{dm}{dv}, \quad dm = \varrho\, dv$$

und speziell bei einem „homogenen" Körper:

$$\varrho = \frac{m}{v}, \quad m = \varrho v.$$

Die Dichte des Wassers ist hiernach bei 4° C. gerade 1, und die Dichte eines anderen Stoffes kann alsdann auch als das Verhältnis der Masse eines Körpers aus diesem Stoffe zur Masse eines gleichen Volumens Wasser definiert werden. Je nachdem in der ursprünglichen oder in der letztgenannten Weise definiert wird, erhält man als Dimensionsformel der Dichte

$$\varrho = [L^{-3} M]$$

oder

$$\varrho = \frac{[M]}{[M]} = 1,$$

d. h. eine reine Zahl.

136. Gewichts- und Krafteinheit. Spezifisches Gewicht. Aus der Masseneinheit ergibt sich nun sofort die Gewichtseinheit, allgemeiner die Krafteinheit, wie sie dem wissenschaftlichen Maßsystem entspricht. Die Krafteinheit ist offenbar diejenige Kraft, welche der Masseneinheit, also einem Gramm, die Beschleunigung 1 cm pro sec, oder in der Sekunde die Geschwindigkeit 1 cm pro sec erteilt; diese Krafteinheit heißt Dyne; sie ist zugleich die wissenschaftliche Gewichtseinheit. Im praktischen Leben werden Gewichte gewöhnlich in einer anderen Einheit ausgedrückt, nämlich auf das Gewicht eines Kubikzentimeters Wasser von 4° C. (am Meeresspiegel unter 45° Breite) als Einheit bezogen. Im wissenschaftlichen Maße ist dieses Wassergewicht nicht 1, sondern, wie wir wissen, 980; denn es ist das Produkt der Masse 1 g und der Beschleunigung 980 cm/sec^2. Leider wird diese praktische Gewichtseinheit auch als „Gramm" bezeichnet und hieraus kann leicht Verwirrung entstehen. Man muß sich stets vergegenwärtigen, daß das wissenschaftliche Gewicht eines Körpers 980 mal so groß ist, wie sein praktisches Gewicht. Dagegen sind offenbar die wissenschaftliche Masse eines Körpers und sein praktisches Gewicht immer von demselben Zahlenwert in Grammen.

Wie aus der Masse die Dichte, so leitet man aus dem Gewichte das spezifische Gewicht ab. Es ist das Gewicht der Volumeneinheit eines Körpers oder auch das Verhältnis des Gewichtes eines Körpers zu dem eines gleich großen Volumens Wasser. Hieraus ergibt sich, daß praktisch die Dichte und das spezifische Gewicht eines Stoffes durch dieselbe Zahl ausgedrückt werden.

137. Newtons zweites Bewegungsgesetz. Diskussion desselben. Der moderne Kraftbegriff und das Kraftgesetz, wonach die Kraft durch das Produkt von Masse und Beschleunigung gemessen wird, rührt im wesentlichen von Isaac Newton her, der es als zweites Bewegungsgesetz mit folgenden Worten aussprach:

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

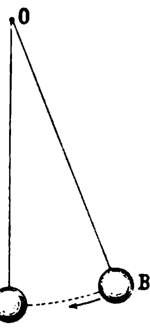
Die Änderung der Bewegung ist der bewegenden einwirkenden Kraft proportional und findet in der Richtung statt, in der jene Kraft wirkt.

Newton fügt die folgende Erklärung bei, die natürlich mit dem Gesetz angenommen werden muß.

Wenn eine Kraft eine Bewegung erzeugt, so wird eine doppelte Kraft eine doppelte Bewegung, eine dreifache eine dreifache Bewegung erzeugen, gleichviel, ob sie zusammen und plötzlich oder der Reihe nach und allmählich angewandt werden, und diese Bewegung wird, wenn der Körper schon vorher in Bewegung war, entweder der schon vorhandenen Bewegung zugefügt, wenn sie in derselben Richtung stattfindet, oder von ihr abgezogen, wenn sie in der gerade entgegengesetzten stattfindet, oder endlich mit ihr zusammengesetzt, wenn beide in einem Winkel gegeneinander geneigt sind.

Das in Rede stehende Gesetz wird manchmal als bloße Aufstellung einer Indentität betrachtet, da wir ja die Kraft nur aus der Bewegungsänderung, die sie hervorruft, kennen. Indessen scheint dies ein zu voreiliger Schluß zu sein. Von dem hier angenommenen Standpunkte aus enthält das Gesetz die oben erklärten theoretischen Methoden, um Massen und Kräfte zu vergleichen. Überdies liefert die in der Übersetzung mitgeteilte erklärende Bemerkung eine höchst wichtige Deutung des Gesetzes. Sie besteht darin, daß, wenn ein Körper unter verschiedenen Kräften steht, jede von ihnen als vollkommen wirksam, hinsichtlich der Änderung der Bewegung des Körpers, unabhängig von den anderen, betrachtet werden muß. Wenn z. B. ein einfaches Pendel, das aus einem, an einem Faden aufgehängten, schweren kleinen Körper besteht, wie in Fig. 101 abgelenkt und dann sich selbst überlassen wird, so muß man die dem Kügelchen durch die Schwere erteilte Beschleunigung als neben der durch die Spannung im Faden erzeugten bestehend annehmen. Wenn das Pendel vertikal hängt, so kann man annehmen, daß die Spannung im Faden eine Beschleunigung erzeugt, die der durch die Schwere nach unten erzeugten gleich und entgegengesetzt ist, d. h. daß die Spannung im Faden eine Beschleunigung des Kügelchens in der Richtung des Fadens hervorruft. Wenn das Pendel, nachdem es abgelenkt worden ist, losgelassen wird, so muß man annehmen, daß die Spannung im Faden wie im vorhergehenden Falle eine Beschleunigung längs dem Faden erzeugt, und da die Beschleunigung in diesem Augenblicke längs der Tangente an den von O als Mittelpunkt durch AB gelegten Kreis gerichtet ist, so hebt die Wirkung des Fadens einfach die in die Richtung OB fallende Komponente der Beschleunigung des Kügelchens durch die Schwere auf. Wenn also α der Winkel AOB und m die Masse des Pendel-

Fig. 101.



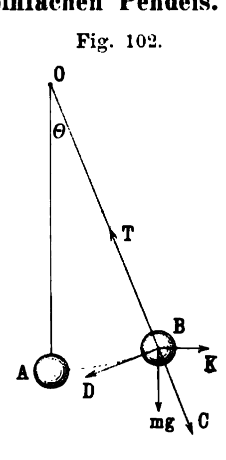
körpers ist, so haben wir als Komponenten der Massenbeschleunigung des Pendelkörpers $mg\cos\alpha$ längs OB und $mg\sin\alpha$ längs der Tangente nach A hin. Die erstere wird durch die Spannung im Faden aufgehoben, und folglich ist die durch den Faden erzeugte Massenbeschleunigung in der Richtung von B nach O gleich $mg\cos\alpha$. Die Komponente $mg\sin\alpha$ setzt den Pendelkörper längs dem Kreise in Bewegung.

Hat der Pendelkörper eine Geschwindigkeit v erhalten, so hat er Beschleunigung v^2/r nach O zu, wenn $OB = r$ ist. Wenn also θ der Winkel ist, den OB jetzt mit OA bildet, so ist die durch den Faden geleistete Massenbeschleunigung nach O zu:

$$R = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{r} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

138. Gleichgewicht des abgelenkten Pendels. Bewegung des einfachen Pendels. Lassen wir nochmals das Pendel in der eben erwähnten abgelenkten Lage durch eine auf den Pendelkörper wirkende horizontale Kraft, wie in Fig. 102, angehalten werden. Der Faden erteilt wie vorher eine Kraft nach O zu. In der eben erklärten Betrachtungsweise der Wirkung der Spannungen erteilt die vertikale Kraft durch die Schwere eine Massenbeschleunigung mg vertikal nach unten, und diese nun wird von der durch die Spannung im Faden bewirkten Massenbeschleunigung nach oben aufgehoben. Die durch diese Spannung bewirkte horizontale Massenbeschleunigung wird durch die horizontale Kraft K aufgehoben. Wenn wir also G für die Massenbeschleunigung durch den Faden setzen, so haben wir

Fig. 102.



$$G = mg/\cos\theta, \quad K = G\sin\theta = mg\,tg\,\theta \quad \ldots \quad (2)$$

Dieses nennt man die Gleichgewichtsgleichungen des Pendels. Sie besagen nur, daß die Massenbeschleunigungen, deren einzelne Symbole K, G auf der linken Seite stehen, die auf der rechten Seite stehenden Werte haben, d. h. daß die Kräfte, wenn sie jede einzeln wirksam wären, die festgestellte Massenbeschleunigung in dem Pendel hervorrufen würden. Die Vorstellung, daß K, G auf der linken Seite Kräfte im Sinne von Bewegungsursachen, und die Ausdrücke auf der rechten Seite Wirkungen bezeichnen, wäre eine Täuschung. Natürlich können wir von Kräften als Bewegungsursachen sprechen, wie wir es auch oben getan haben, aber das, was wir hier betonen, ist, daß die Wirkungen von Spannungen nur im Sinne solcher Betrachtungen wie die oben gegebenen in dynamische Gleichungen eingeführt werden können.

Wenn die Kraft K nicht vorhanden ist, und das Pendel sich in der Ebene OAB bewegt, so ändert das Teilchen B (§ 137) in jedem Augenblick seine Bewegungsgröße im Verhältnis $mg\sin\theta$ längs der Tangente an die Kreisbahn, wo θ der Ablenkungswinkel des Fadens vom Lot in diesem Augenblicke ist. Wenn θ immer klein und im Bogenmaße genommen wird, ist $mg\sin\theta$ annähernd gleich $mg\theta$. Folglich ist die Beschleunigung $g\theta$, sie ist stets nach der Gleichgewichtslage A des Pendels gerichtet und zwar längs einer Bahn, die als horizontale Linie durch A gedacht werden kann. Die lineare Verrückung von B von A aus längs dieser Linie ist $l\theta$, wenn l die Länge des Fadens bezeichnet. Daher ist numerisch

$$\frac{\text{Beschleunigung}}{\text{Verrückung}} = \frac{g}{l},$$

und es ist nach § 53 die Bewegung eine einfache Schwingung in einer durch die Gleichung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

gegebenen Periode. Indessen gilt diese Gleichung nur für kleine Schwingungsbögen. Die vollständige Theorie wird unter „Maße und Instrumente" gegeben werden.

139. Bedeutung von auf ein einzelnes Teilchen wirkenden Kräften. Ferner bezeichnen in Gleichungen wie die folgenden

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

die Symbole X, Y, Z, wie man allgemein sagt, auf das Teilchen m in in den Richtungen x, y, z wirkende Kräfte, und die Größen auf der linken Seite bedeuten die Massenbeschleunigungen, also die Änderungsgrade der Bewegungsgrößen, welche sie erzeugen, und man spricht oft von den ersteren, als ob sie von den letzteren gänzlich wesensverschiedene Dinge wären. Diese letztere Meinung scheint ebenfalls durchaus irrig zu sein. Die Größen X, Y, Z werden nur zeitweilig für diejenigen Werte von $m\ddot{x}$, $m\ddot{y}$, $m\ddot{z}$ gesetzt, die aus den gegebenen Bewegungsumständen gefunden werden sollen, d. h. aus den festgestellten Angaben und Beziehungen (s. § 140).

Abgesehen von der Kürze des Ausdruckes und einer — doch nur äußerlichen — Befriedigung des Kausalitätsbedürfnisses hat es keinen Sinn und Zweck, X, Y, Z als Ursachen und $m\ddot{x}$, $m\ddot{y}$, $m\ddot{z}$ als Wirkungen anzunehmen.

140. Dynamisches Beispiel: durch ein Gewicht ausgezogene Spiralfeder. Daß die Ausdrücke Ursache und Wirkung zu erwünschter Kürze führen können, kann an einem Beispiele gezeigt werden. Denken

wir uns ein Teilchen aufgehängt an einer Spiralfeder (deren Masse vernachlässigt werden kann), welche die auf das Teilchen wirkende Schwerkraft im Gleichgewichte hält, wenn sie um eine Länge s gestreckt ist. Dann wissen wir 1. daß nach der oben gegebenen Deutung des zweiten Bewegungsgesetzes die Spannung in der Feder dem Teilchen gerade eine Massenbeschleunigung nach oben mg erteilt und daher, wenn sie allein wirksam wäre, dem Teilchen eine tatsächliche Beschleunigung nach oben g erteilen würde. Außerdem, da das Experiment erweist, daß verschiedene an die Feder gehängte Gewichte sie um Beträge, die ihnen proportional sind, verlängern, wissen wir 2. daß, wenn die Feder um einen Betrag $s + x$ gestreckt würde, die elastische Reaktion eine Beschleunigung nach oben $g(s + x)/s$ erzeugen würde. Folglich wird bei der Verlängerung $s + x$ die resultierende Aufwärtsbeschleunigung des Teilchens gx/s sein; und, wenn $\ddot{x}$ die Beschleunigung nach unten darstellt, erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - mg \frac{x}{s},$$

an deren Lösung ohne weiteres gegangen werden kann.

Wir kürzen diese Darlegungen erheblich ab, wenn wir sagen, daß im ersten Falle die durch die Feder nach aufwärts ausgeübte Kraft mg ist, und im zweiten (nach dem experimentellen Ergebnis)

$$mg \frac{s + x}{s}.$$

Die auf das Teilchen wirkende resultierende Kraft ist also nach oben mgx/s, oder, nach unten, $-mgx/s$. Wenn man also $-mgx/s$ statt X in die Bewegungsgleichung einsetzt, so ergibt sich die oben aufgestellte Gleichung.

Wir können also die Ausdrücke Ursache und Wirkung gebrauchen und gebrauchen sie fortwährend, sollten uns aber immer dabei erinnern, daß, wenn ein Gegenstand auf die Lösung eines dynamischen Problems zurückgeführt ist, wir einen rein mathematischen Prozeß abzuwickeln haben, durch den wir nur das explizite darstellen, was schon in unseren Gleichungen implizite enthalten war.

Diese Anschauung kollidiert keineswegs mit der Betrachtung der Spannungen als physikalische Realitäten, sie stellt nur fest, was in der Anwendung der Dynamik auf physikalische Probleme substantiell enthalten ist. Die Objektivität der Kraft, über die so viel geschrieben worden ist, geht uns hier nichts an.

Um die Lösung des oben aufgestellten Problems zu vervollständigen, sei bemerkt, daß wir die Gleichung

$$-\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{g}{s}$$

haben. Die Bewegung ist daher nach § 53 eine einfache Schwingung von einer durch die Gleichung

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{s}$$

oder

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{s}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

gegebenen Periode. Daher schwingt die Feder, nach § 138, mit der Periode eines Pendels von einer Länge gleich der Strecke, durch die die Feder ausgezogen ist, wenn sie mit dem angehängten Teilchen im Gleichgewichte ist.

141. Relativität der Kraft. Es muß bemerkt werden, daß, da das Maß der Kraft im zweiten Newtonschen Gesetz, nämlich $m\ddot{x}$, relativ ist, die betrachteten Kräfte ebenfalls relativ sein müssen. Nun wird manchmal behauptet, daß, da unsere Idee der Kraft (also, wie gesagt, unser Gewahrwerden der Existenz einer Spannung in einem Körper, z. B. in unseren Muskeln) von der Empfindung abgeleitet werde, die Kraft nicht relativ sei. Unser Muskelsinn belehrt uns zweifellos darüber, daß eine Spannung in einem Körper, getrennt von der Massenbeschleunigung, existiert, aber keineswegs darüber, was die auf einen beschleunigten Körper wirkenden Kräfte in einem absoluten Sinne sind. Die Kraft, die wir fühlen, hängt nicht von unserem Standpunkte ab; sie wird uns kund gemacht durch eine durch die Verrückung gewisser Teile des Muskel- oder Nervensystems relativ zu anderen oder vielleicht durch relative Bewegungen verschiedener Teile des Muskel- oder Nervengewebes erregte Empfindung; die Kraft, die wir als auf den Körper wirkend ansehen, hängt sicherlich von der Beschleunigung ab, die der Körper dem Augenschein nach hat. Eine Beschleunigung, die wir beobachten, ist eine durchaus reale Sache, aber die Beschleunigung eines Teilchens ist in ihrem Werte vollkommen abhängig von dem System, auf das die Rechnung bezogen wird. Wenn verschiedene Teile eines menschlichen Körpers verschiedene Beschleunigungen erfahren, wenn z. B. bei einem rasch fahrenden Zuge, in dem er sitzt, die Bremse plötzlich angezogen wird, so wird der betreffende Mensch des Vorhandenseins einer Spannung inne, die tatsächlich stark fühlbar sein kann; indessen wird er sich der für alle Teilchen eines Körpers gleich starken Beschleunigung nach der Sonne zu oder gegen den Mittelpunkt des Kreises, in dem er sich infolge der Erdrotation bewegt, nicht bewußt. Wie man sieht, hängt die auf irgend ein Teilchen seines Körpers wirkende Kraft von dem Punkte ab, auf den man die Bewegung bezieht. Wenn wir die Gesamtheit der auf ein Teilchen als Teil der Allmaterie wirkenden Spannungen erschöpfen könnten, möchten wir berechtigt sein, von der absoluten Beschleunigung des Teilchens zu reden, aber diese Gesamtheit ist vielleicht unbestimmt.

142. Zusammensetzung und Auflösung von Kräften. Es ist einleuchtend, daß die oben gegebenen Theoreme der Auflösung und Zusammensetzung von Geschwindigkeit und Beschleunigung und von Richtungsgrößen im allgemeinen ebenso für Kräfte gelten. So erhalten wir die Theoreme des Dreiecks oder Parallelogrammes der Kräfte, des Polygons der Kräfte und umgekehrt die der Ersetzung von nach Größe und Richtung gegebenen Kräften durch Komponenten in verschiedenen Richtungen.

Das Dreieck der Kräfte stellt nur fest, daß, wenn zwei auf ein Teilchen wirkende Kräfte nach Größe und Richtung durch die beiden Seiten AB, BC eines Dreieckes (s. oben Fig. 5, § 17) dargestellt sind, ihre Resultante, die Massenbeschleunigung des Teilchens, auf dieselbe Weise durch die dritte Seite AC dargestellt wird.

Das Parallelogramm der Kräfte ist tatsächlich derselbe Satz in einer leicht veränderten Form. Von A (Fig. 5) wird eine Linie AD in demselben Sinne und von derselben Länge wie BC gezogen, die folglich ebenso wie BC die Kraft in dieser Richtung darstellt. Die Resultante AC ist alsdann die durch A gelegte Diagonale des Parallelogramms $ABCD$.

Das Polygon der Kräfte ist der in § 17 für Strecken aufgestellte Satz. Wenn eine beliebige Anzahl von auf ein Teilchen wirkenden Kräften durch die Seiten OA, AB..., NP eines offenen Polygons dargestellt wird, so wird ihre Resultante durch die Schlußseite OP dargestellt. Die Folge der Richtungen von O nach A, von A nach B u. s. w. wird gewöhnlich dadurch ausgedrückt, daß man die Seiten OA, AB... als der Reihe nach genommen bezeichnet. Die Resultante wird, wie genau zu beachten ist, vom Anfangspunkte O nach dem Endpunkte P gezogen. Fällt P mit O zusammen, so ist die Resultante natürlich null.

Es sei bemerkt, daß der Satz auch für Kräfte, die nicht in einer Ebene liegen, gilt. Jedes aufeinander folgende Seitenpaar des Polygons liegt natürlich in einer Ebene, aber es brauchen nicht ihrer drei in einer Ebene zu liegen.

Alle diese Sätze drückt man auch so aus, daß man sagt: die resultierende Kraft ist die geometrische Summe der Einzelkräfte.

143. Wirkung von Kräften auf ein, eine beliebige Bahn beschreibendes Teilchen. Da sich die Beschleunigung eines auf beliebiger Bahn fortschreitenden Teilchens in zwei Komponenten auflösen läßt, deren eine längs der Tangente an die Bahn, deren andere nach dem Krümmungsmittelpunkte zu wirkt, so erfährt das Teilchen die Wirkungen entsprechender Kräfte in diesen Richtungen, die der jedesmaligen Beschleunigung mal der Größe m der Masse des Teilchens gleich sind. So haben in § 55 die Kräfte die Werte

$$m\frac{d^2s}{dt^2}, \quad m\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{R},$$

wo $\dot{s}$, $\ddot{s}$ die Geschwindigkeit und Beschleunigung längs der Tangente sind und R der Krümmungsradius ist.

Dagegen gibt es keine Beschleunigung senkrecht zur Schmiegungsebene in irgend einem Punkte, und die Kräfte sind deshalb in allen Punkten auf jene Ebene beschränkt. Dies folgt aus der Tatsache, daß die Bewegung längs zwei aufeinander folgenden Bahnelementen in der Schmiegungsebene erfolgt; es ist aber leicht, es auch analytisch zu beweisen, indem man aus den Richtungskosinus $\dot{x}/\dot{s}$, $\dot{y}/\dot{s}$, $\dot{z}/\dot{s}$ der Tangente in P die der Tangente in einem anstoßenden Punkte und folglich die der Normalen zur Schmiegungsebene findet; es wird sich dabei zeigen, daß $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ parallel zu dieser Normalen aufgelöst, das Resultat null ergibt. Dieselbe Rechnung wird erweisen, daß die Kraft nach dem Krümmungsmittelpunkte zu $m\dot{s}^2/R$ ist.

144. Die Massen der Körper sind ihren Gewichten proportional. Es ist sehr schwierig, die oben erklärte dynamische Methode zur Vergleichung von Massen mit einiger Genauigkeit auszuführen; aber die Vergleichung kann mit äußerster Exaktheit durch die Methode des Wägens geschehen, da, wie zuerst durch Galilei gezeigt und später in feinerer Weise durch Newton bewiesen worden ist, die Massen der Körper den Anziehungen zwischen ihnen und der Erde proportional sind. Galileis Experiment ist allbekannt. Es war die von den damaligen Gelehrten stark verteidigte Meinung, daß von zwei verschiedenen Gewichten, die man gleichzeitig vom selben Punkte herunterfallen ließe, das größere zuerst den Boden erreichen würde. Galilei wich von dieser Meinung ab und behauptete, sie würden gemeinsam den Boden erreichen. Um die Sache in Gegenwart seiner Opponenten zu beweisen, nahm er eine Anzahl Stücke von sehr verschiedenem Gewichte und ließ sie gleichzeitig von der obersten Galerie des schiefen Turmes von Pisa auf das Pflaster herunterfallen. Das Ergebnis war eine glänzende Bestätigung von Galileis Vorhersage.

Da die Körper nicht nur den Boden gleichzeitig erreichten, sondern auch während des Fallens Schritt gehalten hatten, war die Beschleunigung in jedem Augenblicke die gleiche für alle gewesen. Bezeichnen wir mit $G_1, G_2 \ldots$ die durch die Erde auf die Körper ausgeübten Gravitationskräfte, relativ zu einem mit Bezug auf die Fixsterne (§ 130) festgesetzten Axensystem gerechnet, d. h. den Änderungsgrad der Bewegungsgröße, den die Körper in irgend einem Augenblick erfuhren; mit m_1, $m_2 \ldots$ die Massen der Körper, wie wir sie durch die dynamische Vergleichung erhalten, und mit g die gemeinsame Beschleunigung nach unten in irgend einem Augenblick, so haben wir die Gleichung

$$G_1 = m_1 g, \quad G_2 = m_2 g$$

u. s. w., d. h. G_1, G_2 ... waren den Massen m_1, m_2 ... proportional. Aber nach den oben gemachten Annahmen über die Gleichheit der Umstände und die Unabhängigkeit der Kräfte waren G_1, G_2 ... sehr annähernd (s. w. u.) jene Kräfte, welche durch die Wirkung gleicher und entgegengesetzter Kräfte aufgehoben waren, als die Körper, relativ zur Erde, in Ruhe waren. Also haben Körper, die sich in den Schalen einer guten Wage aufwägen, gleiche Trägheiten oder Massen, und die Massen verschiedener Körper können durch den Prozeß des wägens verglichen werden.

Newton bewies dasselbe, indem er zeigte, daß Pendel von gleicher Länge, aus verschiedener Masse, und an gleich langen Fäden aufgehängt, in derselben Periode schwingen. Er berichtet einiges aus seinen Experimenten im Scholium Generale am Ende der Sectio VI des zweiten Buches der Principia. Es scheint, daß er eine runde Holzbüchse an einem 11 Fuß langen Faden aufhängte, der mittels eines Ringes am oberen Ende an einem Haken befestigt wurde. Die gehöhlte Hakenoberfläche wurde, wo sie den Ring berührte, zu einer Schneide geschärft. Das Pendel wurde in Schwingung versetzt in der vertikalen Ebene senkrecht zur Ebene des Hakens, derart, daß die Berührungspunkte von Ring und Haken nahezu unveränderlich waren. Die Büchse wurde der Reihe nach mit verschiedenen Metallen gefüllt und der Faden sorgfältig reguliert, um in jedem Falle die gleiche Länge zu haben. Newton fand, daß die Perioden die gleichen waren und ferner, daß die Größe der Abnahme der Schwingungen der Masse des Pendelkörpers genau proportional war. In zwei Reihen von Experimenten 1. mit der leeren Büchse, 2. mit der so gefüllten Büchse, daß ihr gesamtes Gewicht 78 mal das der leeren Büchse betrug, fand er, daß in 2. bei gleicher Anfangsamplitude 77 Schwingungen vergingen, ehe die Schwingungsweite um denjenigen Betrag abgenommen hatte, der bei der leeren Büchse in einer Schwingung erreicht wurde. So zeigte sich, daß die Wirkung der Luft auf die schwingende Masse in beiden Reihen von Experimenten die gleiche war und also nur von der Oberfläche des Körpers abhängt.

In Prop. XXIV, Cor. 1 desselben Buches wird die Schlußfolgerung aus der Gleichheit der Periode klar ausgesprochen, nämlich der Satz, daß die Stoffmengen sich verhalten wie die Gewichte der Pendelkörper. Diese Gleichheit der Perioden kann der Leser leicht feststellen, wenn er eine Anzahl von Kugeln von ungefähr gleicher Größe, z. B. eine Holzkugel, eine Eisenkugel, eine Bleikugel an Fäden von gleicher Länge in Punkten einer horizontalen Reihe aufhängt; er wird auf diese Weise eine Reihe gleicher Pendel nebeneinander mit ihren Kugeln in einer Linie erhalten. Diese Pendel müssen alle gleich weit abgelenkt werden, indem man die Kugeln durch einen gegen sie gelegten flachen Holzstreifen nach einer Seite wegschiebt, und müssen dann durch

rasches Wegziehen des Holzes sich selbst überlassen werden. Dann wird man sehen, daß die Pendel durch viele Schwingungen sehr genau Schritt halten werden; nach einer größeren Zahl von Perioden aber wird eine oder mehrere anfangen wegen größerer Störung ihrer Bewegung durch die Luft zurückzubleiben.

Es mögen wie vorher G_1, G_2 ... die Wirkungen der Schwere auf die Kugeln sein, und die Neigung aller Fäden zur Vertikalen in irgend einem Augenblicke sei θ. Die Komponenten von G_1, G_2 ... längs der Bewegungslinie sind (§ 137) $G_1 \sin\theta$, $G_2 \sin\theta$ ... Die gemeinsame Beschleunigung sei α und die Massen der Kugeln gemäß der dynamischen Vergleichung seien m_1, m_2 ... Alsdann haben wir, bei Vernachlässigung der Bewegung der Pendel mit der Erddrehung

$$G_1 \sin\theta = m_1 \alpha, \qquad G_2 \sin\theta = m_2 \alpha \ldots,$$

d. h. wiederum ist G_1, G_2 ... proportional mit m_1, m_2 ...

Im dritten Buche seiner Principia (De Mundi Systemate), Prop. VI, Theor. VI beschreibt Newton Pendelexperimente, die nach den soeben dargelegten Ergebnissen beweisen, daß alle Körper von gleicher Schwere gleiche Masse haben, oder, wie er es ausdrückt, gleiche Mengen von Materie enthalten. Das folgende ist eine Übersetzung der betreffenden Stelle.

„Daß alle Körper (wenn man sich den geringen Widerstand der Luft aufgehoben denkt) in gleichen Zeiten herabfallen, war ein längst bekanntes Ergebnis der Beobachtung; sehr genau kann man diese gleiche Länge der Zeit an Pendeln wahrnehmen. Ich habe den Versuch mit Gold, Silber, Blei, Glas, Sand, gewöhnlichem Salz, Holz, Wasser und Weizen angestellt. Ich verglich zwei gleiche hölzerne Büchsen miteinander; die eine füllte ich mit Holz und hängte dasselbe Gewicht Goldes, so genau ich konnte, im Schwingungspunkte der anderen auf. An gleichen, 11 Fuß langen Fäden hängend, bildeten die Büchsen Pendel, die in Bezug auf Gewicht, Gestalt und Widerstand der Luft durchaus gleich waren und, mit gleichen Schwingungen nebeneinander aufgehängt, sehr lange in gleichem Tempo hin- und herschwangen. Folglich verhielt sich die Menge der Materie im Golde zur Menge der Materie im Holze wie die Wirkung der bewegenden Kraft auf das ganze Gold zu ihrer Wirkung auf das ganze Holz, d. h. wie die Schwere des Goldes sich zu der Schwere des Holzes verhält, und ebenso bei den übrigen. Bei diesen Experimenten hätte man bei Körpern von derselben Schwere einen Unterschied der Materie, der selbst kleiner als $^1/_{1000}$ der letzteren wäre, noch wahrnehmen können."

145. Drittes Newtonsches Bewegungsgesetz. Diskussion der Wirkung und Gegenwirkung. Wir kommen jetzt zum dritten Bewegungsgesetze, das von Newton in folgender Form ausgesprochen wurde:

Actioni contrariam semper et aequalem reactionem, sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Jeder Wirkung entspricht eine gleiche und entgegengesetzte Gegenwirkung, oder: die wechselseitigen Wirkungen zweier Körper aufeinander sind gleich und entgegengesetzt.

Hierzu fügte er die folgende Erklärung:

Jeder Gegenstand, der einen anderen drückt oder zieht, wird ebenso stark durch diesen gedrückt oder gezogen. Drückt jemand einen Stein mit dem Finger, so wird dieser vom Steine gedrückt. Zieht ein Pferd einen an ein Seil befestigten Stein fort, so wird es gleich stark gegen den Stein zurückgezogen, denn das nach beiden Seiten gespannte Seil wird durch dasselbe Bestreben schlaff zu werden, das Pferd gegen den Stein und diesen gegen jenes drängen; es wird ebenso stark das Fortschreiten des einen verhindern, als das Fortrücken des anderen befördern. Wenn irgend ein Körper auf einen anderen stößt und die Bewegung des letzteren irgendwie verändert, so wird ersterer in seiner eigenen Bewegung dieselbe Änderung nach entgegengesetzter Richtung durch die Kraft des anderen (wegen der Gleichheit des wechselseitigen Druckes) erleiden; die durch diese Wirkungen hervorgerufenen Änderungen nicht der Geschwindigkeiten, sondern der Bewegungen sind gleich (vorausgesetzt, daß die Körper nicht noch anderweitig beeinflußt werden). Da nun die Bewegungen sich in gleichem Maße ändern, so sind die Änderungen der Geschwindigkeiten nach entgegengesetzten Richtungen den Massen der Körper umgekehrt proportional. Dieses Gesetz gilt auch bei den Anziehungen, wie in der nächsten Anmerkung gezeigt werden wird.

Die eben angeführte Newtonsche Erklärung des dritten Bewegungsgesetzes ist häufig mißverstanden worden, und viele jener seltsamen Leute, die man Widerspruchsgeister nennt, haben das Gesetz für offensichtlich unwahr erklärt. Weil Wirkung und Gegenwirkung in dem Falle eines Pferdes, das einen Stein zieht (um bei Newtons Beispiel zu bleiben), gleich und entgegengesetzt sind, stellen sich diese Kritiker dynamischer Prozesse vor, daß in diesem Falle weder Pferd noch Stein in Bewegung geraten könnten. Die Verwirrung entsteht daraus, daß die eine Wirkung, nämlich die den Stein vorwärts treibende Kraft, als etwas betrachtet wird, was durch etwas aufgehoben werden könnte, was doch (wenn wir für den Augenblick die Masse der Kette oder des Strickes zwischen den beiden Körpern vernachlässigen) eine nicht auf den Stein, sondern auf das Pferd wirkende Kraft ist, und infolgedessen die Bewegung des Steines gar nicht berührt.

Es können außer den Wirkungen durch den Strick noch andere auf den Stein und wieder noch andere auf das Pferd ausgeübt werden, und die Bewegung jedes Körpers wird durch die Wirkungen auf diesen Körper und nur durch diese Wirkungen beeinflußt. Es gibt also zwei Gruppen von Wirkungen, eine auf den Stein, die andere auf das Pferd bezügliche Gruppe, und alles, was in diesem Beispiele mit der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung besagt wird, ist nur, daß diejenige

besondere Wirkung der ersten Gruppe, welche die durch das Pferd auf den Stein ausgeübte Kraft ist, derjenigen Wirkung der zweiten Gruppe gleich ist, welche die durch den Stein auf das Pferd ausgeübte Kraft ist (wobei nur vorausgesetzt ist, daß entweder nur die Masse des Steins oder die Beschleunigung vernachlässigt werden darf).

Die im Newtonschen Gesetz als gleich und entgegengesetzt hingestellte Wirkung und Gegenwirkung sind nur die beiden Seiten einer zwischen den Körpern vorhandenen Spannung; die eine Seite ist eine Kraft auf den einen, die andere eine Kraft auf den anderen Körper. Diese Kräfte wirken also auf verschiedene Körper, und die von ihnen herrührenden Bewegungsänderungen können doch nur für ein System, das beide Körper einschließt, als einander aufhebend betrachtet werden. Es ist auffallend, daß Leute, denen es schwer fällt, diesen einfachen Gedankengang zu verstehen, gar keine Schwierigkeit dabei finden, eine völlig analoge, aber finanzielle Transaktion vollkommen zu verstehen. Jemand leiht von einem dieser Leute eine Summe, sagen wir von 1000 Mk. Es findet eine Transaktion zwischen den beiden Parteien statt, und diese Transaktion hat zwei Seiten, deren eine den Verleiher, deren andere den Entlehner betrifft. Der Entlehner hat 1000 Mk. erhalten, der Verleiber hat 1000 Mk. hergegeben. Wenn jetzt der Entleiher sagen wollte: „Die Tatsache, daß ich 1000 Mk. empfangen habe, ist gerade aufgehoben durch die Tatsache, daß Du sie hergegeben hast", so können wir uns die Art von Antwort des Verleihers leicht vorstellen. Er würde sagen: „Mit dem Empfang des Geldes habe ich gar nichts zu tun; die Seite des Geschäftes, die mich angeht, ist nur die Hergabe des Geldes, und diese kann nur durch die Rückgabe des Geldes (zusammen mit der in unserem Vertrage erwähnten Vergütung für seinen Gebrauch) aufgehoben werden", eine Ansicht, in der er, wie er andeuten würde, vermutlich durch richterliche Entscheidung unterstützt werden würde. Es ist erstaunlich, in wie hohem Grade die Urteilsklarheit der Leute vom Gegenstande der Beurteilung abhängt, ganz zu schweigen von der Mitwirkung persönlicher Erwägungen.

Es ist indessen sehr wichtig zu beachten, daß man am besten Wirkung und Gegenwirkung als an derselben Stelle, obgleich nicht auf dasselbe Ding wirksam annimmt. Es wirkt in dem Newtonschen Beispiele durch einen beliebigen Querschnitt des Seiles hindurch eine Spannung; die eine Seite dieser Spannung ist eine Kraft nach vorn auf den direkt hinter dem Querschnitt liegenden Teil des Seiles, die andere eine Kraft nach rückwärts auf den direkt vor dem Querschnitt liegenden Teil des Seiles. Ein vortreffliches Beispiel ist die Wirkung und Gegenwirkung zwischen zwei Gliedern einer Kette, die durch die Kontaktfläche zwischen den Kettengliedern hindurch stattfindet, wo die Wirkung eine Kraft auf ein Kettenglied, die Gegenwirkung eine Kraft auf das andere Kettenglied vorstellt. Hier wie in allen den anderen Fällen heben Wirkung und Gegenwirkung einander nicht auf, einfach, weil

sie auf etwas ausgeübt werden, was wir hier als gänzlich getrennte Dinge ansehen. Natürlich, wenn wir die Bewegung, die ein aus verschiedenen Teilen bestehendes System als Ganzes haben kann, betrachten, so heben die Wirkungen und Gegenwirkungen zwischen diesen Teilen einander allerdings auf.

Es wird vielleicht den Gegenstand noch klarer machen, wenn wir Wirkung und Gegenwirkung in dem Querschnitte 1. eines Stabes oder Drahtes unter Längszug, z. B. eines vertikalen Drahtes, der am unteren Ende ein Gewicht trägt, 2. eines Balkens unter Endzwang (d. h. eines Trägers) oder einer eine Last tragenden vertikalen Säule betrachten. Nehmen wir im ersten Falle einen Querschnitt A als eine gedachte Trennungsebene, die die Materie auf der einen Seite dieser Ebene von der auf der anderen Seite scheidet. Durch A hindurch wird von der Materie auf jeder Seite eine Zugkraft auf die Materie der anderen Seite ausgeübt, und diese beiden Kräfte sind gleich und entgegengesetzt. So zieht in dem vertikalen Draht der Teil über A an dem Teil unter A, und der untere Teil übt einen ebenso starken und entgegengesetzten Zug auf den Teil über A aus. Diese beiden Zugkräfte heben einander nicht auf, da sie sich an verschiedenen Teilen von Materie betätigen.

Wenn wir zwei Drahtquerschnitte A und B nehmen, so wird das Drahtstück zwischen A und B an seinem oberen Ende durch den Teil über dem oberen Querschnitt nach oben, an seinem unteren Ende durch den unteren Teil nach unten gezogen. Also streben die das mittelste Stück des Drahtes an seinen Enden durch die beiden Endstücken angreifenden Kräfte die Strecke AB zu verlängern, und wir sagen von ihm, daß es unter Dehnung oder Zug stehe, d. h., daß die Wirkung der Kräfte eine Dehnung in dem Drahte hervorrufen muß. Das gleiche gilt natürlich für jeden Draht oder Stab, dessen Enden unter Zug stehen.

Im Falle des Trägers oder der Säule stößt der Teil auf jeder Seite des Querschnittes gegen den Teil auf der anderen Seite; die so erteilten Stöße sind gleich und entgegengesetzt und dürfen gerade wie vorher nicht als einander aufhebend angesehen werden. Gegen das Stück zwischen zwei Durchschnitten AB wird durch die jenseits liegenden Teile der Säule in jedem Falle gedrückt, so daß die auf den Teil AB an seinen Enden wirkenden entgegengesetzten Kräfte ihn gemeinsam zu verkürzen streben. Von diesem Teile sagt man, daß er sich unter Endzwang oder Kompressionsdruck befindet.

In den in diesem Buche gegebenen Besprechungen physikalischer Theorien wird versucht, mit Nachdruck die Ansicht zu vertreten, daß jede Wirkung auf einen Körper dem Vorhandensein von Spannung in der mit dem Körper in Kontakt befindlichen Materie zuzuschreiben ist; wenn sich also herausstellt, daß aus der Anwesenheit eines Körpers sozusagen in dem Felde eines anderen eine auf den letzteren wirkende Kraft entsteht, so kann diese Wirkung nur vermöge eines in einem

Medium zwischen den beiden Körpern oder in ihnen selbst, wenn sie in Kontakt stehen, neu auftretenden Spannungszustandes statthaben. Ferner, wenn wir irgend eine Grenzfläche (geometrisch, nicht physikalisch trennende Fläche) in dem Medium oder der Schicht zwischen den Körpern nehmen, dann wird jedwede Wirkung, die vermöge der Spannung durch irgend ein Flächenstück dieser Grenzfläche hindurch von der auf einer Seite *a* gelegenen Materie auf die auf der anderen Seite *b* gelegene Materie ausgeübt wird, durch eine gleiche und entgegengesetzte Wirkung der auf der Seite *b* gelegenen auf die auf der Seite *a* gelegene Materie erwidert.

Eine andere Anschauung von Wirkung und Gegenwirkung, die wir ebenfalls Newton verdanken, wird durch die im vierten Kapitel behandelte Theorie von Arbeit und Energie dargestellt werden. Hierin wird die Wirkung eines Agens (ein Körper oder System von Körpern), die in jeder von dem Agens einem anderen Körper oder System erteilten Kraft enthalten ist, durch das Produkt der durch das Agens erteilten Kraft und der nach der Richtung der Kraft aufgelösten Geschwindigkeit des Angriffspunktes auf den anderen Körper oder System gemessen. Die Gegenwirkung ist das Produkt der von dem zweiten Körper oder System dem Agens erteilten gleichen und entgegengesetzten Kraft und der ebenso wie vorher aufgelösten Geschwindigkeit des Angriffspunktes auf das Agens.

Die Bedeutung dieses Satzes wird in allen Fällen verständlich sein, wenn wir den Standpunkt einnehmen, wonach dann und nur dann, wenn die Kraft als auf einen Körper wirkend angesehen wird, das, was eigentlich Gegenwirkung genannt wird, dem anderen Körper erteilt wird; tatsächlich also der Standpunkt, wonach alle gegenseitige Wirkung zwischen zwei Körpern durch eine Grenzfläche zwischen beiden Körpern bezw. in dem Medium zwischen ihnen stattfindet. Dann hat die Fläche die gleiche Geschwindigkeit für beide durch sie hindurchwirkende Kräfte, und da diese gleich und entgegengesetzt sind, so ist das Produkt eines Elementes der einen Kraft in die Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes dem Produkte der entsprechenden Gegenwirkung in dieselbe Geschwindigkeit gleich und entgegengesetzt.

Das Produkt einer Kraft in die Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes heißt aber die Arbeitsstärke oder der Effekt der Kraft, und also ist der Effekt der einen Seite einer durch eine Grenzfläche hindurchwirkenden Spannung dem Effekt der anderen Seite der Spannung genau gleich und entgegengesetzt. Auch hier hebt der eine Effekt den anderen nicht auf. Es sind wieder die beiden Seiten einer Transaktion, die verschiedene Körper betreffen, gerade wie zwei Personen betroffen sind, wenn Geld ausgezahlt wird: die eine bezahlt, die andere empfängt, das Geld aber geht von einer zur anderen über. In vielen Fällen von gleichem und entgegengesetztem Effekt werden wir den Übergang der sog. kinetischen Energie (§ 214) von einem Körper auf den anderen

verfolgen können, in anderen liegt das Geschehnis des Überganges nicht so klar, obgleich zweifellos eine Neuverteilung der Energie stattfindet.

Nehmen wir als Beispiel den Fall zweier Billardbälle, von denen der eine in Ruhe ist, der andere (ohne Drehung) auf der die Mittelpunkte der Bälle verbindenden Linie entlang läuft. Sie karambolieren und werden beide an der Berührungsstelle zusammengedrückt. Wie in den vom Stoß handelnden § 671, 672 (Kap. XV) bewiesen werden wird, bewegt sich die Berührungsfläche der beiden Bälle während der ganzen Stoßdauer mit einer Geschwindigkeit, die halb so groß ist, wie die Annäherungsgeschwindigkeit der beiden Bälle vor dem Anfang des Zusammenstoßes war. Außerdem vergrößert, solange der Stoß dauert, infolge des Entlastungsstrebens beider Bälle von dem Zustande der in ihnen entstandenen elastischen Spannung, der getroffene Ball seine Geschwindigkeit, während der treffende Ball die seinige verringert und schließlich in Ruhe bleibt. Zuletzt bewegt sich der erstere mit einer nur sehr wenig kleineren Geschwindigkeit, als die des zweiten vor dem Zusammenstoße war, weiter, während der zweite in Ruhe bleibt.

Hier sind gleiche und entgegengesetzte Effekte während des Zusammenstoßes vorhanden gewesen, folglich ist auch die kinetische Energie von dem treffenden Balle auf den anderen übertragen worden. Der ganze Prozeß der Übertragung und Neuverteilung der Energie durch die gegenseitigen Wirkungen der Körper aufeinander bietet wirklich das gültige Beispiel für das dritte Bewegungsgesetz; in den Gesetzen dieses Prozesses ist der ganze Inhalt unseres Wissens von der Physik enthalten. Die Theorie von Arbeit und Energie wird im vierten Kapitel betrachtet werden.

Die wahre Schwierigkeit bei diesem Bewegungsgesetze tritt erst mit der Wahl eines geeigneten Systems von Beziehungsaxen auf. Keiner von den gegenseitig aufeinander wirkenden Körpern kann als Teil des für fest geltenden Bezugssystems gedacht werden; sonst müßte nämlich dieser Körper als frei von Beschleunigung und folglich als von unendlicher Masse oder als nicht unter der Wirkung der Kraft stehend betrachtet werden. Keine dieser Annahmen ist zulässig: die Wirkung des Körpers (z. B. seine Anziehung) auf andere Körper muß endlich sein, und wenn die auf ihn wirkende Kraft null ist, gilt das Gesetz von Wirkung und Gegenwirknng nicht für ihn (s. auch § 195).

146. Dynamisches Beispiel. Atwoodsche Maschine. Als Beispiel nehmen wir hier den Fall eines dünnen biegsamen Fadens von sehr geringer Masse, der so über ein in horizontaler Lage befestigtes glattes Brett geführt ist, daß seine beiden, nicht auf dem Brette befindlichen Enden durch zwei an ihnen aufgehängte Gewichte in vertikalen Linien gestreckt erhalten werden. Wir wollen die Länge des Fadens als unveränderlich annehmen.

m, m' seien die Massen der beiden Körper, und m sei größer als

m'. Der Faden übt auf jede der beiden Massen einen Zug nach oben aus und dieser muß, wenn keine Reibung am Brette stattfindet, die gleiche durch den ganzen Faden sein. Denn, betrachten wir den Faden auf der einen Seite: Wenn, wie wir hier annehmen, die Masse des Fadens gegen m und m' zu vernachlässigen ist, so ist die aufwärtswirkende Kraft am oberen Ende in dieser Annährung gleich der herunterziehenden Kraft am unteren Ende. Der einzig vorhandene Unterschied ist nur das, was für die Beschleunigung des betrachteten Stückes vom Faden erforderlich ist. Wir wollen hier annehmen, was später unter Statik gerechtfertigt werden wird, daß die streckende Kraft in den beiden Teilen des Fadens an beiden Seiten des Brettes die gleiche ist.

Wenn wir T für die Massenbeschleunigung jeder Masse durch den Faden und G für den Zahlenwert der Beschleunigung nach unten von m und der Beschleunigung nach oben von m' setzen, so haben wir

$$mG = mg - T, \qquad m'G = T - m'g.$$

Daraus ergibt sich, je nachdem G oder T eliminiert wird:

$$T = \frac{2mm'}{m + m'}g, \qquad G = \frac{m - m'}{m + m'}g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Wenn die Massen gleich wären, würde G gleich null sein, und der Wert von T würde, was ohne Rechnung klar ist, den Wert mg annehmen.

Die hier dargelegte Anordnung ist eine elementare Form der Atwoodschen Maschine zur Veranschaulichung der Bewegungsgesetze. In dieser Maschine geht das Seil über die Rinne im Reifen eines vertikal stehenden Rades, dessen Axen auf Friktionsrädern (§ 230) aufliegen. Die Masse des Rades läßt nicht zu, daß die streckende Kraft im Seile auf beiden Seiten des Rades die gleiche werde, so daß die für den Faden auf dem Brette gegebene einfache Theorie nicht anwendbar ist. Indessen kann die beschleunigende Wirkung der Masse des Rades in die Rechnung einbezogen werden, indem man ein Massenäquivalent μ für das Räderwerk zu $m + m'$ in dem Ausdruck für G hinzufügt, so daß die zweite Gleichung von (6) die Form

$$G = \frac{m - m'}{m + m' + \mu}g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,a)$$

annimmt; ferner hat man, da die Spannungen nach der absteigenden und nach der aufsteigenden Seite, T_1 und T_2, nicht mehr gleich sind, an Stelle der obigen die folgenden Gleichungen:

$$mG = mg - T_1, \qquad m'G = T_2 - m'g$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 - T_2 &= \mu G \\ T_1 &= \frac{2mm' + m\mu}{m + m' + \mu}G \\ T_2 &= \frac{2mm' + m'\mu}{m + m' + \mu}G \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,b)$$

Die Bedeutung der Größe μ (die nicht etwa schlechthin die Masse des Rades ist) wird dem Leser vollkommen klar werden, wenn er den folgenden Abschnitt über Rotationsbewegung gelesen haben wird. Die mit Hilfe der Atwoodschen Maschine erlangten Ergebnisse können indessen hier ausgesprochen werden.

Anfangs sind zwei gleiche Massen an dem Faden befestigt. Wir wählen dafür zwei mit Schrot gefüllte Hohlzylinder, so daß die Gesamtmasse leicht verändert werden kann. Die Differenz $m - m'$ wird durch Auflegen eines Übergewichtes von eben dieser Masse auf eines von den Gewichten hervorgerufen. Dieses Übergewicht ragt über das Gewicht heraus und wird durch einen Ring zurückbehalten, der an einem Punkte R einer vertikalen Skala befestigt werden kann, an der das Gewicht herunterfällt. Das schwere Gewicht wird an einen höher an der Skala belegenen Punkt S gebracht und durch einen Anschlag gestützt, der entweder mit der Hand oder durch Schließung des Stromkreises eines Elektromagneten entfernt wird. Das oberste Ende des Zylinders möge bei S sein, und der Anschlag möge in einem Augenblicke weggezogen werden, der durch einen Registrierapparat für die Zeit (z. B. einen elektrischen Chronographen) markiert wird. Die Massen kommen allmählich in Bewegung, und derjenige Augenblick, in welchem das schwerere Gewicht soweit heruntergefallen ist, daß sein oberstes Ende auf das Ringniveau gebracht ist, wird wiederum durch den Chronographen verzeichnet. Das Übergewicht wird durch den Ring zurückbehalten, und durch die Beobachtung, daß die von jetzt ab zur Zurücklegung weiterer Fallstrecken gebrauchten Zeiten diesen Strecken porportional sind, wird die Gleichförmigkeit der weiteren Bewegung konstatiert. Die erreichte Geschwindigkeit ergibt sich nun selbstverständlich aus jeder weiteren Strecke und der zu ihrer Zurücklegung gebrauchten Zeit. Also wird experimentell bestätigt, daß die erreichte Geschwindigkeit mit der Fallzeit von S nach R proportional ist.

Auch wenn man verschiedene Fallhöhen s_1, s_2 ... zwischen S und R nimmt und die Zeiten, die gebraucht werden, um sie zu durchfallen, t_1, t_2 ... beobachtet, bestätigt es sich, daß

$$s_1 = ct_1^2, \qquad s_2 = ct_2^2 \ldots$$

ist, wo c eine Konstante ist. Diese Konstante ist nach (6a, s. oben) gleich $\frac{1}{2} G$ (s. § 90).

Ferner kann durch Anwendung verschiedener Übergewichte $m - m'$ unter Beibehaltung des an dem Faden befestigten Gesamtgewichtes $m + m'$, sowie durch Beibehaltung von $m - m'$ und Variation von $m + m'$, der dem oben gegebenen entsprechenden Wert für G bestätigt werden.

Indessen kann die Maschine nicht als ein ebenso einwandfreies Mittel zur Bestimmung der Beschleunigung durch die Schwere benutzt werden. Zu diesem Zwecke bedient man sich am besten der Methode

der Beobachtung der Schwingungsperiode eines Pendels von bekannter Länge, nach der kurz unter Gravitation beschriebenen Art und Weise. Resultate von sehr annähernder Richtigkeit erreicht man indessen, wenn man ein aus einem Bleikügelchen und einem dünnen Faden bestehendes einfaches Pendel in einem gewöhnlichen Zimmer aufhängt und beobachtet. Das Auge des Beobachters muß sich in der zur Schwingungsebene senkrechten, durch den Aufhängungspunkt gelegten Vertikalebene befinden, die durch die Kanten eines hochgestellten Bücherpaares auf einem Tische hergestellt werden kann. Das Pendel wird in Schwingung versetzt, deren Bereich einen Bogen von 10° nicht überschreiten darf; der Beobachter gibt durch einen scharfen Schlag ein Signal in dem Augenblicke, wo das Pendel durch die Ebene, in der sich das Auge befindet, hindurchgeht, während ein anderer Beobachter die Zeit nach dem Sekundenzeiger einer Uhr angibt. Das Pendel schwingt weiter, und es werden die Augenblicke verzeichnet, in denen die 10., die 20., die 30. u. s. w. Schwingung vollendet sind. Daraus kann die Periode T mit sehr beträchtlicher Genauigkeit gefunden werden, und aus dieser und l kann g nach Gl. (3) ermittelt werden.

147. Massenmittelpunkt; Schwerpunkt. Wir können jetzt einige Schlüsse von großer Wichtigkeit aus den Bewegungsgesetzen ableiten. Die meisten von ihnen beziehen sich auf den sogenannten Massenmittelpunkt eines Systems von Teilchen, und wir müssen daher zunächst die Bedeutung dieses Ausdruckes erklären.

Der Massenmittelpunkt eines Systems von Teilchen kann als ein Punkt definiert werden, dessen Entfernung ξ von einer beliebigen Ebene durch die Gleichung

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

gegeben ist, wo $m_1, m_2, m_3 \ldots$ die Massen der Teilchen und $x_1, x_2, x_3 \ldots$ ihre bezw. Entfernungen von jener Beziehungsebene sind.

Der Massenmittelpunkt fällt also zusammen mit dem Mittelpunkte eines Systems von Punkten von Multiplizitäten m_1, m_2, $m_3 \ldots$, wie es oben § 19 erklärt worden ist.

Um die Lage des Punktes zu definieren, können wir drei zueinander senkrechte Ebenen nehmen, eine, von der aus die Entfernungen gleich x_1, x_2, $x_3 \ldots$, eine zweite, von der aus sie y_1, y_2, $y_3 \ldots$, und eine dritte, von der aus sie z_1, z_2, $z_3 \ldots$ betragen. Die Entfernung ξ des Massenmittelpunktes von der ersten ergibt sich aus Gl. (7), seine Entfernungen η, ζ von den anderen ergeben sich aus:

$$\eta = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$

$$\zeta = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$

Wir können diese Gleichungen einigermaßen abkürzen, indem wir schreiben:

$$\xi = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \quad \eta = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \quad \zeta = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wo z. B. Σm die Summe der Massen $m_1 + m_2 + \cdots$, Σmx die Summe aller Produkte $m_1 x_1$, $m_2 x_2 \ldots$ u. s. w. bezeichnet und ebenso für Σmy und Σmz. Diese Größen Σmx, Σmy, Σmz kann man als Massenmomente des Systems in Bezug auf die x-, y-, z-Axe bezeichnen. Ferner heißen die daraus abgeleiteten Größen

$$\Sigma m \frac{dx}{dt}, \quad \Sigma m \frac{dy}{dt}, \quad \Sigma m \frac{dz}{dt}$$

die Bewegungsmomente oder Bewegungsgrößen, und die Größen

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2}$$

die Beschleunigungsmomente oder Massenbeschleunigungen des Systems.

Vom Begriff des Massenmittelpunktes prinzipiell gänzlich verschieden ist der Begriff des Schwerpunktes als des Angriffspunktes der Schwere; da aber beide Punkte in fast allen tatsächlich vorkommenden Fällen identisch sind, wollen wir im folgenden der Kürze halber, wo ein Mißverständnis ausgeschlossen ist, immer Schwerpunkt sagen[1]).

148. Die Momente eines materiellen Systems relativ zum Schwerpunkte sind gleich null. x', y', z' seien die Koordinaten des Punktes x, y, z, bezogen auf durch den Schwerpunkt gelegte, mit den Axen von x, y, z parallele Axen; dann haben wir $x = \xi + x'$, $y = \eta + y'$, $z = \zeta + z'$, also:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d\xi}{dt} + \frac{dx'}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\eta}{dt} + \frac{dy'}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} + \frac{dz'}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{d^2y'}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{d^2z'}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Folglich ist nach Gl. (8):

$$\Sigma mx' = 0, \quad \Sigma my' = 0, \quad \Sigma mz' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

in Worten: Die Massenmomente eines Systems in Bezug auf Axen, die durch den Massenmittelpunkt gehen, sind gleich null.

Aus den Gleichungen (10) folgt übrigens des weiteren:

---

[1]) Der in englischen Werken gebrauchte Ausdruck „Centroid" ist nicht übernommen worden, da unter Worten dieser Form bei uns stets Flächen verstanden werden.

$$\left.\begin{array}{lll}\Sigma m \dfrac{dx'}{dt} = 0, & \Sigma m \dfrac{dy'}{dt} = 0, & \Sigma m \dfrac{dz'}{dt} = 0 \\ \Sigma m \dfrac{d^2x'}{dt^2} = 0, & \Sigma m \dfrac{d^2y'}{dt^2} = 0, & \Sigma m \dfrac{d^2z}{dt^2} = 0\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (11)$$

Auf den Schwerpunkt bezogen sind also auch die Bewegungsgrößen und die Beschleunigungsmomente null.

149. Theorem der Gruppierung von Teilchen. Bestimmung von Schwerpunkten. Wie oben § 20 bewiesen worden ist, kann man die Teilchen in Gruppen einteilen, den Massenmittelpunkt einer jeden Gruppe auffinden und die Gruppe durch ein Teilchen ersetzen, dessen Masse der Summe der Massen der Gruppenteilchen gleich ist. Der Massenmittelpunkt des neuen Systems ist derselbe wie der des ursprünglichen Systems.

Dieses Theorem ist von großem Nutzen bei der Bestimmung der Schwerpunkte der Körper, denn es ist gewöhnlich das richtigste Verfahren, den Körper nach einem bestimmten Plane in Teilchengruppen einzuteilen. Es kann z. B. eine dünne, dreieckige Platte, deren auf die Flächeneinheit entfallende Masse überall dieselbe ist, in schmale Streifen von gleicher Breite, mit einer von den Seiten parallel, geteilt werden. Der Schwerpunkt jedes Streifens liegt natürlich in seinem Mittelpunkte, und so kann das Dreieck durch eine Gruppe von Teilchen ersetzt werden, die in den Mittelpunkten dieser Streifen liegen und deren jedes eine Masse gleich der des Streifens, den es ersetzt, hat. Da diese Teilchen auf der geraden Linie liegen, die den Mittelpunkt der Seite, mit der die Streifen parallel sind, mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte verbindet, so liegt der Schwerpunkt der Platte auf dieser Linie. Das Dreieck hätte aber auch in schmale Streifen parallel mit einer von den beiden anderen Seiten geteilt werden können; er liegt also auf den Linien, die den Mittelpunkt einer jeden der beiden Seiten mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte verbinden, er liegt also im Kreuzungspunkte dieser Linien. Wir gelangen damit gelegentlich auch zu dem wohlbekannten Satze aus der Geometrie, daß die drei die Ecken eines Dreiecks mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten verbindenden Linien sich in einem Punkte schneiden. Wenn D der Halbierungspunkt der Seite BC gegenüber von A ist, wird der Leser sehen, daß der Schwerpunkt der Platte auf AD in G liegt, wo $DG = \frac{1}{3} DA$ ist.

Betrachten wir ferner ein Tetraeder, das ist ein vierseitiger Körper, dessen Seiten Dreiecke sind. Dieses kann in Teilchengruppen geteilt werden, die dünne Platten parallel mit einer von den Seiten bilden, der Schwerpunkt einer jeden kann wie im vorigen Beispiel gefunden werden, und die Reihe von Platten kann durch Teilchen in ihren Schwerpunkten, wie beschrieben, ersetzt werden. Diese liegen in der den

Schwerpunkt der Basis mit der Gegenecke verbindenden Linie; daher liegt der Schwerpunkt des Tetraeders auf dieser Linie. Auf dieselbe Weise kann bewiesen werden, daß der Schwerpunkt auf der den Schwerpunkt einer jeden der drei anderen Seitenflächen mit den gegenüberliegenden Ecken verbindenden Linie liegt; folglich liegt er im Schnittpunkte dieser vier Linien. Wir gelangen damit zu dem anderen wohlbekannten Satze aus der Geometrie, daß die, die Schwerpunkte der Seitenflächen eines Tetraeders mit den gegenüberliegenden Eckpunkten verbindenden Linien sich in einem und demselben Punkte schneiden; dieser Punkt ist der Schwerpunkt des Tetraeders. Der Leser mag beweisen, daß dieser Punkt um drei Viertel der Länge der den Scheitelpunkt mit dem Schwerpunkte der gegenüberliegenden Seite verbindenden Linie von jedem Scheitelpunkte des Tetraeders entfernt ist. Es ist dies mit Hilfe der Eigenschaften ähnlicher Dreiecke leicht zu machen.

Ferner können wir, um den Schwerpunkt, sagen wir einer gleichförmigen Halbkugelschale zu bestimmen, die Schale in eine Reihe von Ringen aufteilen, die alle der kreisförmigen Basis der Halbkugel parallel sind. Der Schwerpunkt jedes Ringes wird in seinem Mittelpunkte sein, und so kann die Schale ersetzt werden durch eine Reihe von Massenteilchen gleich denen der entsprechenden Ringe, längs der Linie verteilt, die den Mittelpunkt der kreisförmigen Basis mit dem Mittelpunkte der gewölbten Oberfläche verbindet. Diese Rechnung kann vollständig durchgeführt werden mit Hilfe der Integralrechnung, und es würde sich alsdann zeigen, daß der Schwerpunkt im Mittelpunkte dieser Linie liegt. Man könnte aber auch ohne Rechnung zu diesem Ergebnis gelangen von der bekannten Tatsache aus, daß das zwischen zwei parallelen Platten eingeschlossene gewölbte Stück einer Kugel genau gleich ist dem zwischen eben diesen Platten eingeschlossenen gewölbten Oberflächenstück des die Kugel umschreibenden Zylinders mit den Axen senkrecht zu den Platten.

Ferner könnte der Schwerpunkt einer Halbkugel von gleichförmiger Dichte dadurch gefunden werden, daß man sie in eine Reihe dünner kreisförmiger Platten teilt, die alle mit der ebenen Basis der Halbkugel parallel sind; so würde die Kugel wie im vorigen Falle durch eine Reihe von Teilchen ersetzt sein und man würde durch Rechnung finden, daß der Schwerpunkt auf der Linie nach dem Mittelpunkte der kreisförmigen Basis in drei Achtel des Radius von diesem Punkte liegt.

150. Methode der Integration. Die Bestimmung von Massenmittelpunkten muß mit Ausnahme einiger leichter und klar liegender Fälle nach den Methoden der Integralrechnung ausgeführt werden. Einen Körper von stetiger Masse und bekannter Verteilung der Materie denken wir uns in eine große Anzahl von Teilen oder Elementen zerlegt, die so klein sind, daß jeder Punkt jedes dieser Teile von einer gewählten Beziehungsebene gleich weit entfernt angenommen werden

kann und jedes Element von durchaus gleicher Dichte, nämlich der in irgend einem seiner inneren Punkte vorhandenen Dichte gedacht werden kann. Wenn also dv das Volumen eines dieser Elemente des Systems, ϱ seine Dichte und x seine Entfernung von einer Beziehungsebene ist, so haben wir

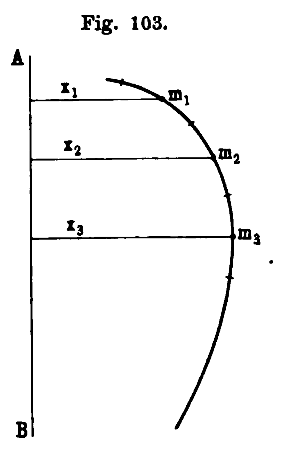
$$\xi = \frac{\int \varrho x dv}{\int \varrho dv} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

wo der Zähler die für den Körper oder das System von Körpern genommene Summe der Produkte von der Form $\varrho x dv$ (d. h. die Masse ϱdv des Elementes multipliziert mit x, der Entfernung des Elementes von der Beziehungsebene) und der Nenner die Summe der Produkte von der Form ϱdv, d. h. die Gesamtmasse des Körpers oder Systems bedeutet.

151. Pappussche Theoreme. Die folgenden Theoreme ermöglichen es, für eine große Anzahl häufig vorkommender Fälle die Massenmittelpunkte sehr leicht zu finden.

Eine gleichförmige lineare Verteilung von Materie in einer Ebene, d.h. eine Verteilung längs einer Kurve, in der der Betrag von Materie für jede Längeneinheit der Kurve in jedem Punkte der gleiche ist, wird um einen beliebigen Winkel um eine Axe in der Kurvenebene gedreht. Der Flächeninhalt der durch die Drehung entstandenen Oberfläche ist gleich der Länge der Kurve mal der Länge der durch den Massenmittelpunkt der linearen Verteilung beschriebenen Bahn. Dies kann folgendermaßen bewiesen werden. Teilen wir die Kurve in aufeinander folgende kurze Elemente ds_1, ds_2 ... und ersetzen wir diese durch Teilchen m_1, m_2 m_3 ..., deren Massen gleich den Massen in den Elementen ds_1, ds_2, ds_3 ... in ihren Mittelpunkten sind. x_1, x_2, x_3 ... seien die Entfernungen dieser Teilchen von der Axe AB, wie in Fig. 103, dann ist der Massenmittelpunkt dieser Teilchen, der auch der Massenmittelpunkt der Kurve ist, in einer Entfernung ξ von der Axe durch

Fig. 103.



$$\xi = \frac{\Sigma(mx)}{\Sigma m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

gegeben. Lassen wir die Kurve sich um einen Winkel θ um die Axe AB drehen; der von m_1 beschriebene Bogen ist $x_1 \theta$ u. s. w., während der vom Massenmittelpunkt beschriebene $\xi \theta$ ist. Es ist aber

$$\xi = \frac{\Sigma(mx\theta)}{\theta\Sigma m}.$$

Wenn aber σ die Masse pro Längeneinheit in der Kurve ist, haben wir $m_1 = \sigma ds_1$, $m_2 = \sigma ds_2$ ... u. s. w. $\Sigma m = \sigma s$, wo s die Länge der Kurve und $\Sigma(m\theta) = \sigma\Sigma(x\theta ds)$ ist. Folglich lautet die Gleichung:

$$s\xi\theta = \Sigma(x\theta ds) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Nun ist aber $x\theta ds$ die Länge $x\theta$ der von einem Teilchen beschriebenen Bahn multipliziert in das Kurvenstück zwischen diesem und dem nächsten Teilchen, d. h. der Flächeninhalt der zwischen den beiden Bahnen gelegenen Zonen der Drehungsoberfläche. Die Summe dieser auf der rechten Seite von Gl. (14) ist der Flächeninhalt der Oberfläche, und der Ausdruck auf der linken Seite ist die Länge der Kurve s, in die Länge $\xi\theta$ der von dem Massenmittelpunkte beschriebenen Bahn multipliziert.

Es gibt ein hierzu zugehöriges Theorem, das der Leser leicht in ähnlicher Weise erproben kann. Wenn ein Flächenstück von einer ebenen Kurve eingeschlossen ist, so ist das Volumen des durch Drehung dieses Stückes um einen Winkel um eine in seiner eigenen Ebene gelegenen Axe entstehenden Körpers gleich dem Produkte der gedrehten Ebene in die Länge der von dem Schwerpunkte der Ebene (die zu diesem Zwecke als gleichförmige ebene Verteilung von Materie, also als eine dünne Platte mit überall pro Flächeneinheit gleichem Betrage von Materie zu betrachten ist) beschriebenen Bahn.

Diese Sätze sind bekannt als die Theoreme des **Pappus** von Alexandrien, eines griechischen Geometers aus dem Ende des vierten Jahrhunderts unserer Zeitrechnung. Sie werden manchmal auch **Paul Guldin**, einem französischen Mathematiker vom Anfange des 17. Jahrhunderts, zugeschrieben.

152. Beispiele der Pappusschen Theoreme. Als ein Beispiel für den Gebrauch dieser Theoreme wollen wir den Schwerpunkt eines den Zentriwinkel α umspannenden Bogens AB eines gleichmäßig mit Materie erfüllten Kreises, wie in Fig. 104, aufsuchen.

Fig. 104.

Es ist nach der Symmetrie klar, daß der Massenmittelpunkt auf der Linie liegt, die O mit dem Mittelpunkte C des Bogens verbindet. Lassen wir den Bogen eine vollständige Drehung um eine in der Bogenebene senkrecht zu OC gelegene Axe ausführen; er erzeugt eine Zone einer Kugeloberfläche vom Radius r. Wenn dann S der Schwerpunkt ist und OS durch ξ bezeichnet wird, ist $2\pi x$ die Länge der von S beschriebenen Bahn. Wenn r der Radius ist, so ist die Länge des Bogens $r\alpha$ und die entstandene Ebene ist

$r\alpha \times 2\pi\xi$. Der Flächeninhalt der Kreisoberflächenzone ist aber gleich der Länge der Sehne AB mit $2\pi r$ multipliziert, d. h.: $2r \sin\frac{1}{2}\alpha . 2\pi r$.

Setzt man diese beiden Werte gleich, so erhält man:

$$\xi = \frac{2r}{\alpha} \sin\frac{\alpha}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Ist der Bogen ein vollständiger Halbkreis, so ergibt sich speziell:

$$\xi = \frac{2r}{\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Ferner sei die Aufgabe gestellt, den Massenmittelpunkt einer dünnen gleichförmigen Lamelle von der Form eines Kreissegments ACB (Fig. 105) zu bestimmen, dessen Peripherie vom Mittelpunkte O aus einen Winkel α umspannt. Das Segment möge eine ganze Umdrehung um eine mit mit der Sehne AB parallele Axe durch den Mittelpunkt ausführen. Der Massenmittelpunkt ist in einem Punkte S auf der das Segment halbierenden Linie OC; die von S beschriebene Bahn ist $2\pi\xi$; der Flächeninhalt des Segments ist

$$\tfrac{1}{2}\alpha r^2 - \tfrac{1}{2} r^2 \sin\alpha.$$

Fig. 105.

Folglich ist das durch die Drehung erzeugte Volumen: $\pi r^2 \alpha\xi - \pi r^2 \xi \sin\alpha$. Dieses Volumen ist aber das aus der Drehung des Sektors $OACB$ erzeugte minus dem durch das Dreieck OAB erzeugten Volumen, d. h.:

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 \sin\tfrac{1}{2}\alpha\,(1 - \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha).$$

Folglich gilt die Gleichung:

$$\xi = \tfrac{4}{3} r \frac{\sin^3\frac{1}{2}\alpha}{\alpha - \sin\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Ist das Segment die vollständige Halbkreisfläche, so ist $\alpha = \pi$, und es wird:

$$\xi = \frac{4r}{3\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

153. Gesamte Bewegungsgröße eines Systems von Teilchen. Wenn wir jetzt zur Gl. (8) zurückkehren, so wollen wir mit $\dot{x}_1, \dot{x}_2 \ldots$ die Geschwindigkeiten der Teilchen $m_1, m_2 \ldots$ parallel zur x-Axe, mit $\dot{y}_1, \dot{y}_2 \ldots$ ihre Geschwindigkeiten parallel zur y-Axe und mit $\dot{z}_1, \dot{z}_2 \ldots$ ihre Geschwindigkeiten parallel zur z-Axe bezeichnen; dann folgt aus diesen Gleichungen, daß $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ die Komponenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes, durch die Gleichungen

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\Sigma m \frac{dx}{dt}}{\Sigma m}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\Sigma m \frac{dy}{dt}}{\Sigma m}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\Sigma m \frac{ds}{dt}}{\Sigma m} \quad \ldots \quad (19)$$

gegeben sind. Zum Beweise dafür betrachten wir ein einzelnes Teilchen von der Masse m und der Entfernung x von der Beziehungsebene. In einem kleinen Zeitraume τ wird sich diese Entfernung in $x + \dot{x}\tau$ und ξ wird sich in $\xi + \dot{\xi}\tau$ verwandelt haben. Also haben wir nach den Gleichungen für die Lage des Schwerpunktes

$$\xi + \left(\frac{d\xi}{dt}\right)\tau = \frac{\Sigma m\left[x + \left(\frac{dx}{dt}\right)\tau\right]}{\Sigma m}.$$

Wenn wir hiervon die Gleichung

$$\xi = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}$$

abziehen, so erhalten wir

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\Sigma m \frac{dx}{dt}}{\Sigma m}$$

u. s. f. für die anderen Komponenten.

Wenn wir den so gefundenen Gleichungen die Form

$$\frac{d\xi}{dt}\Sigma m = \Sigma m \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}\Sigma m = \Sigma m \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt}\Sigma m = \Sigma m \frac{dy}{dt} \quad \cdot \cdot (20)$$

geben, so sehen wir, daß die Summe der Bewegungsgrößen des Systems von Teilchen in irgend einer Richtung derjenigen Bewegungsgröße gleich ist, welche das System haben würde, wenn seine ganze Masse in einem einzigen Teilchen im Schwerpunkte vereinigt wäre und sich mit der Geschwindigkeit des Schwerpunktes bewegte. Ferner folgt daraus, daß, wie auch immer die Bewegungen der einzelnen Teilchen sein mögen, der Schwerpunkt in Ruhe ist, wenn die Summe ihrer Bewegungsgrößen in jeder Richtung null ist.

154. Änderungsgrad der Bewegungsgröße eines Systems von Teilchen. In genau derselben Weise erhalten wir, wenn wir die mit x, y, z parallelen Beschleunigungen des Teilchens durch die Symbole $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2 \ldots, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2 \ldots, \ddot{z}_1, \ddot{z}_2 \ldots$ und die Komponenten der Schwerpunktsbeschleunigung mit $\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}$ bezeichnen, die Gleichungen:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}}{\Sigma m}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\Sigma m \frac{d^2y}{dt^2}}{\Sigma m}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{\Sigma m \frac{d^2z}{dt^2}}{\Sigma m} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot (21)$$

oder, wie wir schreiben können:

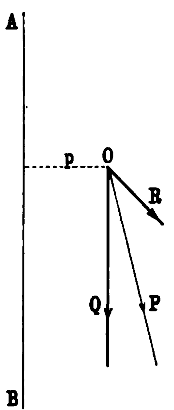
$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2}, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot (22)$$

In diesen beiden Formen besagen diese Gleichungen, daß die Summe der Änderungsgrade der Bewegungsgröße eines Systems von Teilchen bezw. seine Beschleunigung in jeder Richtung derjenigen gleich ist, welche das System erfahren würde, wenn es in einem einzigen, in den Schwerpunkt fallenden Teilchen konzentriert wäre.

Die Sätze der beiden letzten Paragraphen heißen die Schwerpunktssätze, der letzte insbesondere der Satz von der Erhaltung des Schwerpunktes.

155. Momente von Richtungsgrößen. Das Moment einer in einer bestimmten Linie wirkenden Richtungsgröße in Bezug auf eine Axe wird folgendermaßen definiert. Die Richtungsgröße wird in einem Punkte ihrer Wirkungslinie in zwei Komponenten aufgelöst, eine mit der Axe parallel, die andere senkrecht zu ihr, aber natürlich in der durch die Größe selbst und ihre erste Komponente bestimmten Ebene. Es sei also AB (Fig. 106) die Axe und P die Richtungsgröße; die Auflösung nehmen wir in dem Punkte O, der die kleinste Entfernung von AB hat, vor. P wird bei O aufgelöst in Q, parallel mit AB und R senkrecht zu AB und in der Ebene von Q und P; R liegt im allgemeinen nicht in der durch AB und O bestimmten Ebene. p sei die senkrechte Entfernung zwischen AB und der Wirkungslinie von R, dann ist das Moment von P in Bezug auf AB gleich Rp. Dies gilt als positiv oder negativ, je nachdem für einen der Axe entlang von A nach O blickenden Beobachter R den Arm p in der in der Zeichnung angegebenen oder in der entgegengesetzten Richtung zu drehen scheint.

Fig. 106.



Das Moment kann graphisch dargestellt werden durch eine Strecke längs AB und auf den Beobachter zukommend oder sich von ihm entfernend, je nachdem es positiv oder negativ ist.

Die Richtungsgröße kann alles mögliche sein; meist ist es eine Kraft, dann ergibt die obige Definition das Moment einer Kraft in Bezug auf eine Axe. Ist die Größe die Bewegungsgröße eines Teilchens, so ergibt sich das Moment der Bewegungsgröße des Teilchens in Bezug auf die Axe u. s. w.

Das Moment in Bezug auf P (Fig. 96) jeder einzelnen von den Komponenten der Richtungsgröße ω in § 118, die durch Projektion der Zeichnung auf eine beliebige Ebene erhalten werden, ist das Moment der betreffenden Komponente um eine durch P senkrecht zu jener Ebene gezogene Axe. Es wird dort gezeigt, daß das Moment von ω um jede beliebige Axe der Summe der Momente ihrer Komponenten um dieselbe Axe gleich ist. Wir werden jetzt beweisen, daß es der Summe der Momente der Größe um Axen von x, y, z, die durch einen

Axenpunkt durchgehen, gleich ist, und werden die Werte dieser Momente darlegen.

X, Y, Z seien die Komponenten der Richtungsgröße, gleichviel ob es eine Kraft, eine Bewegungsgröße oder eine andere physikalische Größe ist. Wenn P ihre Resultante ist, so sind X/P, Y/P, Z/P die Kosinus der Winkel, die sie mit den Axen von x, y, z bildet. Die Axe AB möge durch den Anfangspunkt gehen und λ, μ, ν seien die Kosinus der Winkel, die sie mit den Axen von x, y, z bildet; auch mögen die Koordinaten des Punktes $O: x$, y, z sein. Es ist klar, daß eine mit P parallele Ebene durch die Axe gelegt werden kann; ψ sei der Winkel zwischen einer in dieser Ebene parallel zu P gezogenen Linie und der Richtung der Axe. Die Länge p eines von einem Punkte (x, y, z) der P-Linie auf diese Ebene gefällten Lotes ist nach den Lehrbüchern der analytischen Geometrie:

$$\frac{[x(Y\nu - Z\mu) + y[Z\lambda - X\nu) + z(X\mu - Y\lambda)]}{P \sin \psi}.$$

Nach der Definition ist das gesuchte Moment das Produkt dieser Senkrechten in die zu AB senkrechte Komponente $P \sin \psi$ von P, d. h.:

$$H = Pp \sin \psi = x(Y\nu - Z\mu) + y(Z\lambda - X\nu) + z(X\mu - Y\lambda) \quad (23)$$

Wenn wir dieses Moment nach dem oben ausgeführten Muster längs der Linie AB graphisch darstellen, löst es sich in drei Komponenten $Zy - Yz$, $Xz - Zx$, $Yx - Xy$ längs den Axen von x, y, z auf, die die Momente von P um diese Axen sind. Der Leser mag sich davon überzeugen, daß, wenn diese Momentkomponenten mit H_1, H_2, H_3 bezeichnet werden,

$$H = \lambda H_1 + \mu H_2 + \nu H_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23\text{a})$$

ist.

Sind z. B. die Komponenten der Bewegungsgröße eines Teilchens $m\dot{x}$, $m\dot{y}$, $m\dot{z}$, dann sind die Komponenten H_1, H_2, H_3 des Momentes der Bewegungsgröße

$$m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right), \quad m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right), \quad m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right).$$

Betrachten wir jetzt ein ganzes System von Teilchen. Die Größen

$$\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right), \quad \Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right), \quad \Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

sind die Summen der Momente der Bewegungsgröße der Teilchen des Systems bezw. um die x-, y- und z-Axe. Denn ein Teilchen m in dem durch die Koordinaten x, y, z bestimmten Punkte hat Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, und es ist leicht nach der oben gegebenen Definition zu zeigen, daß das Moment einer Größe um eine Axe gleich der Summe der Momente ihrer Komponenten um die Axe ist. Die erste

dieser Komponenten hat nach der Definition kein Moment um die x-Axe, die Momente der anderen (für wie in Fig. 3 gerichtete x-, y- und z-Axe) sind $- m\dot{y}z$ und $+ m\dot{z}y$, so daß das Moment der Bewegungsgröße des Teilchens m $(\dot{z}y - \dot{y}z)$ ist u. s. f. für die anderen Axen. Es muß bemerkt werden, daß die zeitlichen Änderungsgrade

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2}\right), \quad \Sigma m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2}\right),$$
$$\Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}\right)$$

sind, und diese werden weiter unten in den Bewegungsgleichungen, die von großer Wichtigkeit sind, erscheinen.

Wenn wie oben, § 148, $x = \xi + x'$, $y = \eta + y'$, $z = \zeta + z'$ ist, so daß x', y', z' die Koordinaten eines Teilchens bezogen auf parallele Axen durch den Schwerpunkt sind, so ist das Moment der Bewegungsgröße des Systems in Bezug auf die x-Axe

$$\Sigma m \left[\left(\frac{d\xi}{dt} + \frac{dz'}{dt}\right)(\eta + y') - \left(\frac{d\eta}{dt} + \frac{dy'}{dt}\right)(\zeta + z')\right].$$

Nun wissen wir aber aus den Eigenschaften des Schwerpunktes, daß $\Sigma m \dot{\xi} z = 0$, $\Sigma m \dot{\eta} z = 0$ ist u. s. w., so daß aus diesem Moment der Bewegungsgröße der Ausdruck

$$\Sigma m \left(y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt}\right) + \Sigma m \left(\eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt}\right)$$

wird. Dies ist die Summe des Moments der Bewegungsgröße des Systems, bezogen auf eine parallel zur x-Axe durch den Schwerpunkt gelegten Axe, und des Moments der Bewegungsgröße des ganzen Systems um die x-Axe, wenn man sich dasselbe im Schwerpunkte vereinigt und mit der Geschwindigkeit dieses Punktes fortschreitend denkt.

Da die x-Axe in beliebiger Richtung gewählt werden kann, so gilt dies für alle Axen. Durch geeignete Wahl der Koordinatenaxen kann das Moment der Bewegung (oder ihr Änderungsgrad) um jede Axe aus dem eben gefundenen Ausdrucke berechnet werden. Oder, wenn H_1, H_2, H_3 die Komponenten des Moments der Bewegungsgröße um die x-, y-, z-Axe, d. h. $\Sigma m (\dot{y}z - \dot{z}y)$ u. s. w. bezeichnen, so ist, wie wir für die Richtungsgröße P gefunden haben, das Moment der Bewegungsgröße bezogen auf eine Axe durch den Anfangspunkt, deren Richtungskosinus λ, μ, ν sind:

$$\lambda H_1 + \mu H_2 + \nu H_3.$$

156. Gleichungen der Bewegung eines Systems von Teilchen. Äußere und innere Kräfte. Erhaltung der Bewegungsgröße. Betrachten wir jetzt irgend ein System von Teilchen, gleichviel, ob sie einen starren Körper bilden oder nicht. Die Teilchen mögen mit m_1, m_2, m_3 ..., ihre Koordinaten mit x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 ... bezeichnet

werden, so daß $\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{z}, \ddot{x}_2, \ddot{y}_2, \ddot{z}_2 \ldots$ die Beschleunigungskomponenten der Teilchen sind. Diese Beschleunigungen rühren von den Komponenten der Wirkungen auf die Teilchen in den Richtungen der Axen her. Jede Wirkung ist die Resultante der von außerhalb des Systems und der von den anderen Teilchen des Systems aus wirkenden Kräfte. So wirkt auf das Teilchen m_1 in der x-Richtung eine Kraft $X_1 + X_1'$, worin X_1 den Änderungsgrad der Bewegungsgröße längs x bezeichnet, die die äußere Wirkung auf m_1 hervorrufen würde, und X_1' dieselbe Sache für die innere Wirkung auf m_1 bezeichnet. So erhalten wir:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1 + X_1'.$$

Ebensolche Gleichungen ergeben sich für die anderen Richtungen und die anderen Teilchen. Also haben wir:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1 + X_1', \quad m_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = Y_1 + Y_1', \\ \qquad\qquad m_1 \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} = Z_1 + Z_1' \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = X_2 + X_2', \quad m_2 \dfrac{d^2 y_2}{dt^2} = Y_2 + Y_2', \\ \qquad\qquad m_2 \dfrac{d^2 z_2}{dt_2} = Z_2 + Z_2' \end{array}\right\} \ldots (24)$$

. . . .

für jedes Teilchen gibt es also eine Gruppe von drei Gleichungen. Wir werden die Kräfte $X_1, Y_1, Z_1 \ldots$ die **äußeren Kräfte**, die Kräfte $X_1', Y_1', Z_1' \ldots$ die **inneren Kräfte** nennen. Wenn wir zuerst alle Gleichungen für x, dann alle für y und dann alle für z addieren, so erhalten wir:

$$\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma X, \quad \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = \Sigma Y, \quad \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = \Sigma Z \quad \ldots (25)$$

worin die Größen auf den rechten Seiten nur die Summen der **äußeren** Kräfte sind; denn die Summen der inneren Kräfte verschwinden nach dem dritten Bewegungsgesetze, da die „innere Kraft" auf irgend ein Teilchen, etwa m_1, die Resultante der von den anderen Teilchen des Systems auf es ausgeübten Kräften ist. Nun ist jede durch ein Teilchen m_2 auf m_1 ausgeübte Kraft von einer von m_1 auf m_2 ausgeübten, gleichen und entgegengesetzten Kraft begleitet, und das kommt in Rechnung, wenn die Gesamtwirkung auf m_2 betrachtet wird. Wenn also die Kräfte wie oben addiert werden, so verschwinden die Summen der inneren Kräfte auf die Teilchen identisch.

Die Kraft X, Y, Z wird hier auf ein Teilchen im Punkte x, y, z wirkend gedacht u. s. f. für die anderen Kräfte. Natürlich gibt es viele Teilchen des Systems, auf die eine äußere Kraft nicht direkt einwirken

mag; für diese alle ist Y, Y, Z gleich null. Anderseits wird in manchen Fällen die Kraft X, Y, Z nicht direkt auf ein Teilchen des betrachteten Systems wirken, kann aber irgendwie auf den äußeren Rand oder auf ein mit dem System, dessen Bewegung ermittelt werden soll, zusammenhängendes Glied einwirken; man kann z. B. eine Kraft als in einem Punkte eines Seiles, durch das ein Zug auf das System ausgeübt wird, angreifend betrachten. In der Tat sind, wie der Leser wohl beachten sollte, alle weiter unten gegebenen Theoreme, die die Wirkung von Kräften betreffen, unabhängig von dem Punkte in der Wirkungslinie einer Kraft, der als Angriffspunkt der Kraft gilt. Dieses, häufig als die Grundlage der Statik angenommene Ergebnis folgt selbstverständlich aus der von Newton gegebenen dynamischen Methode.

Aus § 153 ersieht man, daß die Gleichungen (24) auch in der Form

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}\,\Sigma m = \Sigma X, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2}\,\Sigma m = \Sigma Y, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2}\,\Sigma m = \Sigma Z \quad . \; . \; (26)$$

geschrieben werden können, wo sie besagen, daß die Beschleunigung des Schwerpunktes des Systems diejenige ist, welche ein Teilchen von der Masse Σm, gleich der Gesamtmasse des Systems, haben würde, wenn die äußeren Kräfte ohne Änderung von Größe und Richtung auf es einwirkten.

Also haben die inneren Kräfte keinerlei Wirkung, die Bewegungsgröße eines Systems von Teilchen zu ändern. Wenn die äußeren Kräfte für eine Richtung null sind, so bleibt die Bewegungsgröße in dieser Richtung ungeändert.

157. Momentengleichungen. Multiplizieren wir jetzt die erste x-Gleichung der Gl. (24) mit y_1, die zweite x-Gleichung mit y_2 ... und addieren wir die resultierenden Gleichungen; multiplizieren wir dann die y-Gleichungen mit x_1, x_2 ... und addieren wir wiederum die resultierenden Gleichungen; ziehen wir endlich die erste Summe von der zweiten ab, so erhalten wir:

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma[(Y + Y')\,x - (X + X')\,y].$$

Behandelt man die übrigen Gleichungen in derselben Weise, so erhält man zwei weitere Gleichungen von derselben Form. Nun ist zu beachten, daß man aus demselben Grunde wie der oben festgestellte, ebenso $\Sigma Y'x = 0$, $\Sigma X'y = 0$ u. s. w. haben muß. Folglich lauten die sich schließlich ergebenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \Sigma\,(Zy - Yz) \\ \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \Sigma\,(Xz - Zx) \\ \Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \Sigma\,(Yx - Xy) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (27)$$

Die Größen auf der rechten Seite von Gl. (27) sind nach § 155 die Momente der äußeren Kräfte in Bezug auf die x-, y- und z-Axe, die durch den Anfangspunkt der Koordinaten hindurchgehen; die Größen auf der linken Seite sind die Momente der Änderungsgrade der Bewegungsgröße der Teilchen in Bezug auf dieselbe Axe; oder da

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\dots$$

ist, so sind die Größen der linken Seite (s. § 155) die Änderungsgrade der Momente der Bewegungsgröße des Systems in Bezug auf die Axen. Also besagen die Gleichungen, daß der Änderungsgrad der Bewegungsgröße des Systems (oder, wie man manchmal sagt, die Summe der Momente der Effektivkräfte) um eine Axe den Summen der Momente der äußeren Kräfte um diese selbe Axe gleich ist. Da der Anfangspunkt nach Belieben und die Axe in jeder Richtung gewählt werden kann, so gilt das Theorem auch für jede Axe.

158. Momentengleichungen. Eigenschaften des Schwerpunktes. Nach § 148 können die Gleichungen (27) auch in der Form

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma m\left[\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{d^2z'}{dt^2}\right)(\eta + y') - \left(\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{d^2y'}{dt^2}\right)(\zeta + z')\right] \\ \qquad = \Sigma\left[Z(\eta + y') - Y(\zeta + z')\right] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}\dots(28)$$

geschrieben werden. Da aber diese Gleichungen für alle Axen gelten, so müssen sie auch für die soeben als durch den Massenmittelpunkt hindurchgehend angenommenen Axen gelten, und folglich zerfallen die eben geschriebenen Gleichungen in zwei Gruppen:

1. Die Gruppe

$$\Sigma m\left[\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{d^2z'}{dt^2}\right)y' - \left(\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{d^2y'}{dt^2}\right)z' = \Sigma(Zy' - Yz')\right],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

welche, da $\Sigma m\ddot{\eta}x' = \ddot{\eta}\Sigma mx'$ und $\Sigma mx' = 0\dots$ ist, in der Form

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma m\left(y'\frac{d^2z'}{dt^2} - z'\frac{d^2y'}{dt^2}\right) = \Sigma(Zy' - Yz') \\ \Sigma m\left(z'\frac{d^2x'}{dt^2} - x'\frac{d^2z'}{dt^2}\right) = \Sigma(Xz' - Zx') \\ \Sigma m\left(x'\frac{d^2y'}{dt^2} - y'\frac{d^2x'}{dt^2}\right) = \Sigma(Yx' - Xy') \end{array}\right\}\dots.(29)$$

geschrieben werden kann, und

2. Die Gruppe

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma m\left(\eta \frac{d^2 z}{dt^2} - \zeta \frac{d^2 y}{dt^2}\right) = \Sigma\,(Z\eta - Y\zeta) \\ \Sigma m\left(\zeta \frac{d^2 x}{dt^2} - \xi \frac{d^2 z}{dt^2}\right) = \Sigma\,(X\zeta - Z\xi) \\ \Sigma m\left(\xi \frac{d^2 y}{dt^2} - \eta \frac{d^2 x}{dt^2}\right) = \Sigma\,(Y\xi - X\eta)\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (30)$$

Gl. (29) besagen, daß die Summe der Momente (in Bezug auf jede Axe durch den Schwerpunkt des Systems) der Änderungsgrade der Bewegungsgröße der Teilchen des Systems in Bezug auf den Schwerpunkt der Summe der Momente der wirkenden Kräfte in Bezug auf dieselbe Axe gleich ist. Es ist zu beachten, daß die Beschleunigungen des Massenmittelpunktes nicht in das Ergebnis eingehen.

Gl. (30) besagen, daß die Summe der Momente (um irgend eine Axe) der sogenannten Effektivkräfte auf die Teilchen des Systems, wenn man sie sich ohne Änderung der Größe oder Richtung in den Schwerpunkt übertragen denkt, gleich ist der Summe der Momente (in Bezug auf dieselbe Axe) der äußeren, ebenfalls in den Schwerpunkt übertragen gedachten Kräfte.

Es sei nun $r_z = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Länge eines von irgend einem Teilchen auf die z-Axe gefällten Lotes, und ψ sei der Winkel, den dieses Lot mit der x-Axe bildet. Dann ergibt sich: $x = r_z \cos\psi$, $y = r_z \sin\psi$, und man erhält durch doppelte Differentiation nach t und geeignete Kombination:

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 2\, r_z \frac{dr_z}{dt} \frac{d\psi}{dt} + r_z^2 \frac{d^2\psi}{dt^2}.$$

Sind φ, χ die Winkel, die die Lote von dem Teilchen auf die x- bezw. y-Axe in derselben Weise mit der y- und z-Axe bilden, r_x, r_y die Längen dieser Lote, so haben wir

$$\Sigma m\left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2}\right) = \Sigma m\left(2\, r_x \frac{dr_x}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r_x^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)$$

mit zwei entsprechenden Gleichungen.

Da aber $Yx - Xy = r_z(Y\cos\psi - X\sin\psi) = r_z R_z$ ist, wo R_z die senkrecht zu r_z und der z-Axe auf das Teilchen wirkende Kraft ist, und entsprechend für die anderen, so sehen wir, daß Gl. (27) in der Form

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma m\left(r_x^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\, r_x \frac{dr_x}{dt} \frac{d\varphi}{dt}\right) = \Sigma\, R_x r_x \\ \Sigma m\left(r_y^2 \frac{d^2\chi}{dt^2} + 2\, r_y \frac{dr_y}{dt} \frac{d\chi}{dt}\right) = \Sigma\, R_y r_y \\ \Sigma m\left(r_z^2 \frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\, r_z \frac{dr_z}{dt} \frac{d\psi}{dt}\right) = \Sigma\, R_z r_z\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (31)$$

geschrieben werden können.

Daß diese Ergebnisse auch für parallele Axen durch den Schwerpunkt gelten, kann selbstverständlich aus Gl. (29) abgeleitet werden. Dieselben genügen freilich nicht, um die Bewegung eines nicht starren Systems zu bestimmen; zu diesem Zwecke muß man entweder alle auf jedes Teilchen wirkenden Kräfte oder, was in Wahrheit dasselbe ist, die geometrischen Beziehungen zwischen den Lagen der Teilchen kennen.

Der Leser möge wohl beachten, daß, wenn es in Bezug auf eine Axe kein Kräftemoment gibt, es auch keinen Änderungsgrad des Moments der Bewegungsgröße um diese Axe geben kann. Es kann eine Winkelbeschleunigung um eine solche Axe geben; aber der von ihr herrührende Änderungsgrad des Moments der Bewegungsgröße wird durch den von der Bewegung des Körpers herrührenden aufgehoben. Dieses einfache Ergebnis ist von großem Nutzen in der Erklärung des Verhaltens rotierender Körper wie Kreisel, Gyrostaten u. s. w.

159. Momentengleichungen für einen starren Körper. Erhaltung des Moments der Bewegungsgröße. Denken wir uns nun das System von Teilchen als ein starres System und nehmen wir Axen durch den Schwerpunkt. Wenn dann ϱ_x, ϱ_y, ϱ_z die Entfernungen eines Teilchens von den durch den Schwerpunkt gelegten x'-, y'-, z'-Axen sind, so werden sie die Strecken r_x, r_y, r_z ersetzen. Da aber das System starr ist, so ist der Schwerpunkt relativ zu ihm fest, so daß $\dot{\varrho}_x$, $\dot{\varrho}_y$, $\dot{\varrho}_z$ für jedes Teilchen null sind. Auch müssen $\dot{\varphi}$, $\dot{\chi}$, $\dot{\psi}$ und $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\chi}$, $\ddot{\psi}$ für jedes Teilchen in einem gegebenen Augenblicke gleich sein. Folglich ergibt sich:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,\Sigma m\varrho_x^2 = \Sigma R_x\varrho_x, \qquad \frac{d^2\chi}{dt^2}\,\Sigma m\varrho_y^2 = \Sigma R_y\varrho_y,$$
$$\frac{d^2\psi}{dt^2}\,\Sigma m\varrho_z^2 = \Sigma R_z\varrho_z.$$

Aus den Gleichungen (31) wird ferner:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2}\,\Sigma m r_x^2 = \Sigma R_x r_x, \qquad \frac{d^2\chi}{dt^2}\,\Sigma m r_y^2 = \Sigma R_y r_y,\\ \frac{d^2\psi}{dt^2}\,\Sigma m r_z^2 = \Sigma R_z r_z \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (32)$$

Da die Axe fest ist, so sind ihre Richtungskosinus (s. oben § 24 $\dot{\varphi})/\omega$, $\dot{\chi}/\omega$, $\dot{\psi}/\omega$, wo ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die Axe, nämlich $\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\chi}^2 + \dot{\psi}^2}$ ist. Die Winkelbeschleunigungen $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\chi}$, $\ddot{\psi}$ müssen offenbar den Komponenten der Winkelgeschwindigkeiten proportional sein, d. h. die Richtungskosinus der Axe sind auch $\ddot{\varphi}/\dot{\omega}$, $\ddot{\chi}/\dot{\omega}$, $\ddot{\psi}/\dot{\omega}$. Hieraus könnte man ableiten, daß der Änderungsgrad des Momentes der Bewegungsgröße des Systems um die Axe der Summe der Momente der äußeren Kräfte um die Axe gleich ist; aber man erzielt dasselbe Ergebnis direkt, indem man die Axe etwa mit der

x-Axe zusammenfallen läßt. Dann sind $\dot{\chi}$, ψ, $\ddot{\chi}$, $\ddot{\psi}$ null, und man hat nur die eine Gleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,\Sigma m r^2 = \Sigma R r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (33)$$

worin die Indizes als fortan überflüssig unterdrückt sind.

Die oben mehr als einmal erwähnten, hieraus zu ziehenden Schlüsse, daß die inneren Kräfte des Systems keine Wirkung haben, die Bewegungsgröße des Systems in irgend einer Richtung oder das Moment seiner Bewegungsgröße um eine Axe zu ändern, können nicht genug betont werden. Beispielsweise bleibt die gesamte irgendwie gerichtete Bewegungsgröße der Körper des Sonnensystems durch ihre gegenseitigen Anziehungen ungeändert, ebenso wie das Gesamtmoment der Bewegungsgröße um eine Axe; sie können nur durch die Wirkung von außerhalb des Systems befindlichen Körpern geändert werden.

Ferner, wenn einer von den Körpern des Systems unter der Wirkung nur innerer Kräfte an Volumen zu- oder abnimmt (man kann für gewiß annehmen, daß sie sich alle zusammenziehen und daß die nicht gasförmigen sich auch noch beständig abkühlen), so wird seine Rotationsperiode im ersten Falle größer, im anderen kleiner werden, insofern sein Drehungsmoment um seine Rotationsaxe konstant bleiben muß. So muß die Abkühlung der Erde und ihre fortwährende Zusammenziehung die Tendenz haben, die Länge des Tages zu verkürzen.

160. Moment der Bewegungsgröße als Flächengeschwindigkeit. Axe des größten Moments. Das Moment der Bewegungsgröße eines Systems um eine durch den Anfangspunkt gelegte Axe kann folgendermaßen als Summe von Flächengeschwindigkeiten dargestellt werden. Nehmen wir eine durch den Anfangspunkt und senkrecht zur Axe gelegte Fläche; dann lassen wir ein Teilchen des Systems in einem Zeitelement dt ein Bahnelement ds beschreiben, projizieren wir diese elementare Verrückung auf die erwähnte Ebene und verbinden wir ihre Endpunkte mit dem Koordinaten-Anfangspunkte. Diese Verbindungslinien sind von ganz annähernd gleicher Länge, etwa ϱ. Die zwischen den Linien und der Verlängerung des Bahnelementes eingeschlossene Fläche ist $\frac{1}{2}\varrho^2\dot{\theta}\,dt$, wo $\dot{\theta}$ die Winkelgeschwindigkeit des Teilchens um die Axe ist; wenn anderseits m die Masse des Teilchens ist, so ist $m\varrho^2\dot{\theta}$ offenbar das Moment der Bewegungsgröße des Teilchens um die Axe. Das gesamte Moment der Bewegungsgröße des Systems um die Axe ist folglich $\Sigma m\varrho^2\dot{\theta}$, d. h. es ist die doppelte Summe der mit den Massen multiplizierten Flächengeschwindigkeiten, wobei aber mit den Flächen ihre Projektionen auf die zur Drehungsaxe senkrechte Ebene gemeint sind.

Jetzt nehmen wir diese Summe von Momenten der Geschwindigkeiten um jede der zueinander senkrechten Axen durch den Anfangs-

punkt x, y, z und bezeichnen die erlangten Summen mit H_1, H_2, H_3. Diese ergeben dann, in der üblichen Weise aufgelöst, eine Resultante H um eine Axe, die mit den Koordinatenaxen Winkel bildet, deren Richtungskosinus H_1/H, H_2/H, H_3/H sind. Aus der oben § 118 erwiesenen Tatsache, daß Flächen durch Strecken dargestellt werden können, folgt daß H die direkt für die Ebene senkrecht zu der so definierten Axe erhaltenen Summe von Momenten der Geschwindigkeiten ist. Der Leser kann indessen einen besonderen analytischen Beweis erbringen (siehe § 155).

Die Summe dieser Projektionen dieser Geschwindigkeiten auf eine Ebene, deren Normale die Richtungskosinus l, m, n hat, ist $lH_1 + mH_2 + nH_3$ oder $H \cos \varphi$, wenn φ der Winkel zwischen der Richtung von H und der Linie l, m, n ist. Also ist H der größte Wert der Summe der in der Zeiteinheit beschriebenen Flächen, d. h. des Moments der Bewegungsgröße.

161. Erhaltung des Moments der Bewegungsgröße. Unveränderliche Ebene. Unveränderliche Linie. Betrachten wir jetzt das System als sich selbst überlassen, d. h. es werden keine äußeren Kräfte als vorhanden angenommen. Die Kräfte sind also nur Wirkungen und Gegenwirkungen zwischen den Teilchen, und die Summe der Momente aller Kräfte zwischen verschiedenen Teilen des Systems sind für jede Axe null. Folglich bleibt das Drehungsmoment des Systems um jede Axe ungeändert, und H, das größte Moment für den Anfangspunkt (der jeder Punkt sein kann), ist sowohl in Richtung als Größe konstant. Die Ebene durch den Anfangspunkt senkrecht zur Axe von H heißt die unveränderliche Ebene oder Laplacesche Ebene. Sie bleibt während aller Veränderungen der Konfiguration des Systems in ihrer Lage unverändert.

Die Linie durch O senkrecht zur unveränderlichen Ebene heißt die unveränderliche Linie.

162. Unveränderliche Ebene für verschiedene Punkte. Die unveränderliche Ebene ist für verschiedene Punkte im Raume nicht dieselbe. Um sie für irgend einen Punkt als Anfangspunkt zu finden, seien l, m, n die Richtungskosinus von ds für das gewählte Teilchen. Wir werden, um Verwechselungen mit dem Richtungskosinus m zu vermeiden, die Masse dieses Teilchens mit m' bezeichnen. Seine Projektion auf irgend eine Ebene ist $ds \sin \psi$, wenn ψ der Winkel zwischen der Linie l, m, n und der Normalen zur Ebene ist. Nun sei p die Länge des der Axe von H und der Linie ds gemeinsamen Lotes; das Produkt $p \sin \psi\, ds$ ist $r^2 d\theta$. Wenn aber x, y, z die Koordinaten des das Bahnstück ds beschreibenden Teilchens und λ, μ, ν die Kosinus der Normalen zur unveränderlichen Ebene sind, so ist p die Länge des der durch x, y, z hindurchgehenden Linie l, m, n und der durch den An-

fangspunkt hindurchgehenden Linie λ, μ, ν gemeinsamen Lotes. Die Länge dieser Linie ist, wie leicht ersichtlich:

$$\frac{[x\,(m\nu - n\mu) + y\,(n\lambda - l\nu) + z\,(l\mu - m\lambda)]}{\sin\psi.}.$$

Folglich ist (da $\dot{s}l = \dot{x}$, $\dot{s}m = \dot{y}$, $\dot{s}n = \dot{z}$ ist):

$$p\,\frac{ds}{dt}\sin\psi = x\left(\nu\,\frac{dy}{dt} - \mu\,\frac{dz}{dt}\right) + y\left(\lambda\,\frac{dz}{dt} - \nu\,\frac{dx}{dt}\right)$$
$$+ z\left(\mu\,\frac{dx}{dt} - \lambda\,\frac{dy}{dt}\right).$$

Setzen wir jetzt $\lambda = 1$, $\mu = \nu = 0$, so erhalten wir

$$\Sigma\left(m'p\,\frac{ds}{dt}\sin\psi\right) = H_1 = \Sigma m'\left(y\,\frac{dz}{dt} - z\,\frac{dy}{dt}\right),$$

und ebenso $H_2 = \Sigma m'\,(z\dot{x} - x\dot{z})$, $H_3 = \Sigma m\,(x\dot{y} - y\dot{x})$, Ausdrücke, die sich schon in § 155 ergeben haben.

Ferner, wenn für λ, μ, ν jetzt H_1/H, H_2/H, H_3/H gesetzt wird, wo H die Resultante von H_1; H_2, H_3 ist, d. h. wenn die Axe durch den Anfangspunkt in der Richtung dieser Resultante genommen wird, so erhalten wir für $\Sigma\,(m'p\dot{s}\sin\psi)$ den Wert H, der bestätigt, daß die Summe der Flächenprojektionen auf die Ebene durch den Anfangspunkt senkrecht zur Linie $(H_1, H_2, H_3)/H$ die Resultante der gedachten Komponenten ist.

Wenn statt x, y, z jetzt $\xi + x'$, $\eta + y'$, $\zeta + z'$ gesetzt wird, so wird aus $\Sigma m\,(y\dot{z} - z\dot{y})$ oder H_1 jetzt

$$\Sigma m\,(\eta\dot{\zeta} - \zeta\dot{\eta}) + \Sigma m\,(y'\dot{z}' - z'\dot{y}')$$

und entsprechend für die anderen Komponenten H_2, H_3; d. h. es ist das Moment der Bewegungsgröße des Systems um die Axe durch den Anfangspunkt gleich dem Moment der Bewegungsgröße der ganzen, im Schwerpunkte vereinigt gedachten Masse, vermehrt um das Moment der Bewegungsgröße des Systems um eine parallele Axe durch den Schwerpunkt, ein ebenfalls schon oben gefundenes Ergebnis.

Für verschiedene Lagen des Anfangspunktes werden die Werte von x', y', z' und ihre Veränderungsgrade, und folglich auch die Werte von H_1, H_2, H_3 verschieden sein. So ändern wir durch Verlegung des Anfangspunktes in denjenigen Punkt, dessen Koordinaten in Bezug auf den früheren Anfangspunkt f, g, h sind, H_1 in

$$\Sigma\,[m\,(y - g)\,\dot{z} - (z - f)\,\dot{y}],$$

welches der frühere Wert von H_1 minus dem Wert von H_1 für eine Axe durch den früheren Anfangspunkt und ein mit der Geschwindigkeit $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ fortschreitendes Teilchen von der Masse Σm in f, g, h ist. Die Richtung der unveränderlichen Ebene ändert sich also, ebenso wie der Wert von H, von Punkt zu Punkt.

Es ist einleuchtend, daß, wenn x', y', z' mit ξ, η, ζ proportional sind, d. h. wenn der Punkt auf der durch den Schwerpunkt des Systems (das als sich selbst überlassen gilt, so daß der Schwerpunkt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit längs einer geraden Linie bewegt) beschriebenen Linie liegt, die unveränderliche Ebene parallel zur unveränderlichen Ebene für den Schwerpunkt liegt, und daß für alle Punkte auf einer durch einen festen Punkt f, g, h hindurchgehenden geraden Linie die Richtungen der unveränderlichen Ebene gleich sein werden, vorausgesetzt, daß $x - f$, $y - g$, $z - h$ mit ξ, η, ζ proportional sind, d. h. wenn die Linie mit der Bahn des Schwerpunktes parallel ist.

163. Unveränderliche Ebene des Sonnensystems. Wenn wir das Sonnensystem als sich selbst überlassen annehmen, d. h. wenn wir glauben, die Anziehungen der Fixsterne auf die Sonne und die Planeten vernachlässigen zu können, so muß die Ebene senkrecht zur Axe des resultierenden Moments der Bewegungsgröße in ihrer Richtung unveränderlich sein. Die Lage der unveränderlichen Ebene durch den Schwerpunkt des Systems wird keine Änderung als Folge der gegenseitigen Wirkungen der verschiedenen Teile des Systems aufeinander erleiden.

Die Lage dieser unveränderlichen Ebene kann nicht völlig bestimmt werden mangels der Kenntnis derjenigen Daten, welche zur Berechnung der Momente der Bewegungsgröße der das Sonnensystem bildenden Körper notwendig sind. Aber wenn die verschiedenen Körper als mit ihren Massenmittelpunkten zusammenfallende Teilchen betrachtet und nur die Bahnbewegungen in Rechnung gezogen werden, so kann das Moment der Bewegungsgröße annähernd geschätzt werden. Wären die Körper Kugeln und wäre jeder von symmetrisch um den Mittelpunkt verteilter Dichte, so würden ihre Rotationsbewegungen nicht durch die Anziehungskräfte geändert werden, da, wie unter Anziehung gezeigt werden wird, jeder Körper so anziehen und angezogen werden würde, als ob seine ganze Masse in seinem Massenmittelpunkte vereinigt wäre. So würden die Rotationsbewegungen durch alle Änderungen der Konfiguration einen konstanten Teil des Moments der Bewegungsgröße liefern. Also kann eine unveränderliche Ebene für den Rest gefunden werden, und diese ist die astronomische unveränderliche Ebene genannt worden. Das maximale Moment wird durch Projizierung der Planetenbahnen auf diese Ebene, Multiplikation der Masse jedes Planeten mit dem Doppelten der von seinem Radiusvektor in der Zeiteinheit durch die projizierte Bahn beschriebenen Fläche und Addition sämtlicher Produkte erhalten.

Laplace[1]) hat die Lage dieser Ebene für zwei Epochen, 1750 und 1950, 200 Jahre auseinander, berechnet; für andere Zeitpunkte bietet die Berechnung ebenfalls keine Schwierigkeit. Hier mögen die für 1750 (Laplace) und für 1900 (Gegenwart) gültigen Werte für die

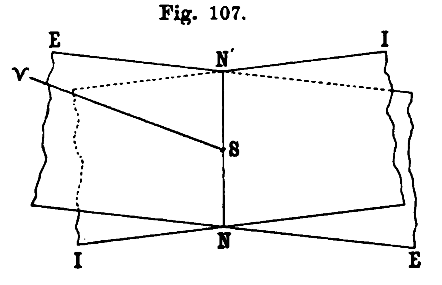
[1]) Mécanique Céleste 3, 163.

Neigung der unveränderlichen Ebene gegen die Ebene der Ekliptik und die Länge des aufsteigenden Knotens Platz finden:

1750 : 1° 35′ 31″ bezw. 102° 57′ 30″
1900 : 1° 35′ 4″ „ 104° 22′ 1″

Dieses Ergebnis ist in Fig. 107 dargestellt, die die beiden Ebenen (EE die Ebene der Ekliptik, JJ die unveränderliche Ebene) mit starker Übertreibung des Winkels zwischen ihnen zeigt. Die Linie NN' (hier als bei S durch die Sonne hindurchgehend angenommen), in der die beiden Ebenen sich schneiden, heißt die Knotenlinie. Wenn ein Planet sich auf einer Bahn in der Richtung, in der er sich um die Sonne bewegt, in der unveränderlichen Ebene bewegte, so würde er von der „unteren“ oder südlichen Seite der Ebene der Ekliptik nach der N-Seite der Zeichnung und von der Nordseite nach der N'-Seite übergehen; die erstere wird daher der aufsteigende Knoten, die letztere der absteigende Knoten genannt. Der Winkel zwischen einer von S nach dem mit ♈ bezeichneten ersten Stern des Widders gezogenen Linie und der Linie SN, d. h. der Winkel ♈SN ist die Länge des aufsteigenden Knotens und ist nach der Laplaceschen Feststellung ungefähr 103°. Es ist indessen zu bedenken, daß dies nicht die wahre unveränderliche Ebene ist, da namentlich die Nichtberücksichtigung der Rotation um ihre Axe einen großen Fehler bedingt. Dies ist nur eins von verschiedenen äußerst wichtigen Ergebnissen, die Laplace und Lagrange in Betreff der Stabilität des Sonnensystems gefunden haben; für das Nähere muß auf Werke über physikalische Astronomie, z. B. Tisserands Mécanique Céleste, verwiesen werden.

Fig. 107.

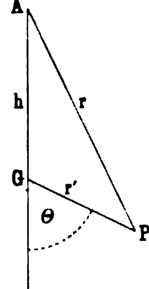


164. Trägheitsmoment. Die Größen $\Sigma m r_x^2$, $\Sigma m r_y^2$, $\Sigma m r_z^2$ und $\Sigma m \varrho_x^2$, $\Sigma m \varrho_y^2$, $\Sigma m \varrho_z^2$ auf den linken Seiten der Gl. (32) und (33) werden die Trägheitsmomente des Systems um die betreffenden Axen genannt. Es dürfte ratsam sein, hier das Trägheitsmoment eines Systems einigermaßen näher zu betrachten. Es seien m_1, m_2, m_3 ... die Massen der Teilchen, r_1, r_2, r_3 ... ihre Entfernungen von der Axe, dann ist die Summe $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots$ oder, wie man kurz schreiben kann, $\Sigma m r^2$ das Trägheitsmoment des Systems um die gegebene Axe. Diese Größe ist sehr wichtig in der Behandlung der Rotationsbewegungen der Körper.

165. Trägheitsmoment eines Systems. Eigenschaft des Schwerpunktes. Gyrationsradius. Das folgende Theorem ist stän-

dig im Gebrauche. Das Trägheitsmoment eines Systems um eine Axe ist gleich dem Trägheitsmoment des Systems um eine parallele Axe durch den Schwerpunkt plus dem Trägheitsmoment eines einzelnen, im Schwerpunkte befindlichen Teilchens von der Gesamtmasse des Systems um die gegebene Axe. Zum Beweis dieses Satzes sei r (Fig. 108) die Entfernung eines Teilchens m von der gegebenen Axe, h die Entfernung des Schwerpunktes von der Axe und r' die Entfernung des Teilchens von einer parallelen Axe durch den Schwerpunkt. Alsdann sei P die in der Papierebene angenommene Lage des Teilchens, A der Durchschnitt der Axe mit der Papierebene und G die Projektion des Schwerpunktes auf dieselbe Ebene. AP ist alsdann r, AG ist h und GP ist r'. Wenn θ der Winkel zwischen dem verlängerten AG und GP ist, so haben wir nach dem bekannten trigonometrischen Satz:

Fig. 108.



$$r^2 = h^2 + r'^2 + 2hr' \cos\theta.$$

Nun ist aber $r' \cos\theta$ gleich der Entfernung des Teilchens von einer Ebene, die durch den Schwerpunkt senkrecht zu der Linie AG gelegt ist. Bezeichnen wir sie mit x, dann ist $r^2 = h^2 + r^2 + 2hx$, und folglich ist:

$$mr^2 = mh^2 + mr'^2 + 2hmx.$$

Wenn man diese Gleichung für jedes Teilchen bildet und addiert, so ergibt sich für das System:

$$\Sigma mr^2 = h^2\Sigma m + \Sigma mr'^2 + 2h\Sigma mx.$$

Nun ist aber Σmx die Summe der Produkte jeder Masse in ihre Entfernung von einer Ebene durch den Schwerpunkt und muß daher null sein; folglich ergibt sich die Gleichung

$$\Sigma mr^2 = h^2\Sigma m + \Sigma mr'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

also das oben aufgestellte Theorem.

Bezeichnen wir Σm, die Masse des Systems, mit M, dann ist es möglich, eine Größe k zu finden derart, daß $Mk^2 = \Sigma mr'^2$ wird. Daraus ergibt sich

$$\Sigma mr^2 = M(h^2 + k^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

welches ebenfalls das Theorem ausdrückt. Die Größe k heißt der Trägheitsradius oder Gyrationsradius des Systems um die parallele Axe durch den Trägheitsmittelpunkt.

166. Beispiele des Trägheitsmoments. Die Anwendung des Trägheitsmoments wird durch die Tatsache erläutert, daß das Moment der Bewegungsgröße eines einen starren Körper bildenden Systems um eine Axe, wenn es die Winkelgeschwindigkeit ω hat, dem Produkte $\omega\Sigma mr^2$, d. h. der Winkelgeschwindigkeit mal dem Trägheitsmoment gleich ist. Zum Beweise dessen ist zu beachten, daß das Moment der Bewegungsgröße eines Systems um eine Axe gleich Σmrv ist, wo v die lineare Geschwindigkeit des Teilchens von der Masse m ist, dessen

Entfernung von der Axe den Wert r hat. Da aber die Teilchen des Systems eine gemeinsame Winkelgeschwindigkeit ω haben, so ist $v = \omega r$, und somit

$$\Sigma m v r = \omega \Sigma m r^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

Die **kinetische Energie** eines Systems ist die Summe der Werte von $\frac{1}{2} m v^2$ für alle Teilchen des Systems, wo m die Masse eines Teilchens und v seine Geschwindigkeit mit Rücksicht auf das gewählte Bezugssystem ist. Im Falle eines um eine feste Axe rotierenden starren Systems ist $v^2 = \omega^2 r^2$, wo ω die allen Teilchen des Systems gemeinsame Geschwindigkeit ist. Folglich ist, da die Entfernungen r konstant sind:

$$\frac{1}{2} \Sigma m v^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \Sigma m r^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

Die kinetische Energie wird weiter unten ausführlicher behandelt werden.

Die Berechnung des Trägheitsmoments für verschiedene Körper kann im allgemeinen nur durch die Methoden der Integralrechnung durchgeführt werden. Die hier folgende Regel genügt für eine große Anzahl praktischer Fälle.

Das Trägheitsmoment eines Körpers von gleichförmiger Dichte von der Form eines rechteckigen Prismas, einer elliptischen Scheibe oder eines Ellipsoids um eine durch den Schwerpunkt gelegte Symmetrieaxe A ist gleich der Masse des Körpers mal der Summe der Quadrate der zu A senkrechten Halbaxen und, je nach der Form des Körpers, mit 3, 4 oder 5 dividiert.

Z. B. ist das Trägheitsmoment eines Stabes von rechteckigem Querschnitt von der Länge $2l$ und der Dicke $2a$ um eine Axe durch den Trägheitsmittelpunkt senkrecht zu diesen Dimensionen:

$$T = M k^2 = \frac{1}{3} M (l^2 + a^2) \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

$$k = \sqrt{\frac{l^2 + a^2}{3}}.$$

Im Falle einer gleichförmigen elliptischen Platte um eine Axe durch den Mittelpunkt der Platte senkrecht zu ihrer Ebene, deren Halbaxen die Längen a und b haben, ist:

$$T = M k^2 = \frac{1}{4} M (a^2 + b^2) \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

$$k = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Handelt es sich um das Trägheitsmoment, um eine Axe in der Ebene der Scheibe, und fällt diese Axe etwa mit der Halbaxe b zusammen, so ergibt sich:

$$T = M k^2 = \frac{1}{4} M a^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

$$k = \frac{a}{2}.$$

Für den Fall eines Ellipsoids von gleichförmiger Dichte um eine mit einer der drei Hauptaxen zusammenfallenden Axe c:

$$T = Mk^2 = \tfrac{1}{5} M (a^2 + b^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

$$k = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}},$$

wo a, b die Längen derjenigen Halbaxen sind, welche auf denjenigen, um welche das Trägheitsmoment gesucht wird, senkrecht stehen.

Für eine Kugel, die nichts weiter ist als ein Ellipsoid mit lauter gleichen Axen, ist für einen Durchmesser als Axe:

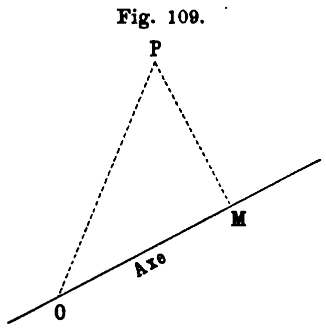
$$T = Mk^2 = \tfrac{2}{5} Ma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

$$k = a \sqrt{\tfrac{2}{5}}$$

wo a der Radius ist.

167. Trägheitsellipsoid. Poinsotsches Momentenellipsoid. Es seien α, β, γ die Richtungskosinus einer Axe durch den Anfangspunkt O (Fig. 109); betrachten wir das Trägheitsmoment eines Teilchens im Punkte P, Koordinaten x, y, z, Masse m, um diese Axe. Das Quadrat der Entfernung ist $OP = x^2 + y^2 + z^2$ und die Projektion OM dieser Strecke auf die Axe ist $\alpha x + \beta y + \gamma z$. Das Quadrat der Entfernung PM des Teilchens von der Axe ist daher:

Fig. 109.



$$PM^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2.$$

Folglich ist das Trägheitsmoment eines Systems um die Axe:

$$T = \Sigma m (x^2 + y^2 + z^2) - \Sigma m (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2.$$

Wenn man dies entwickelt und sich erinnert, daß $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ ist, so kann man schreiben:

$$T = \alpha^2 \Sigma m (y^2 + z^2) + \beta^2 \Sigma m (z^2 + x^2) = \gamma^2 \Sigma m (x^2 + y^2) - 2 \beta\gamma \Sigma myz - 2 \gamma\alpha \Sigma mzx - 2 \alpha\beta \Sigma mxy.$$

Wenn jetzt

$$A = \Sigma m (y^2 + z^2),\ B = \Sigma m (z^2 + x^2),\ C = \Sigma m (x^2 + y^2),$$

und ferner

$$D = \Sigma myz, \quad E = \Sigma mzx, \quad F = \Sigma mxy$$

gesetzt wird, so wird aus obigem Ausdruck:

$$T = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2 D\beta\gamma - 2 E\gamma\alpha - 2 F\alpha\beta.$$

Es ist klar, daß das Trägheitsmoment des Systems um die x-Axe A, um die y-Axe B, um die z-Axe C ist. Die Größen D, E, F heißen die Deviationsmomente oder Trägheitsprodukte um die x-, bezw. y-, bezw. z-Axe.

Nun möge eine Fläche zweiten Grades, auf der ein beliebiger Punkt die Koordinaten ξ, η, ζ hat, die Gleichung

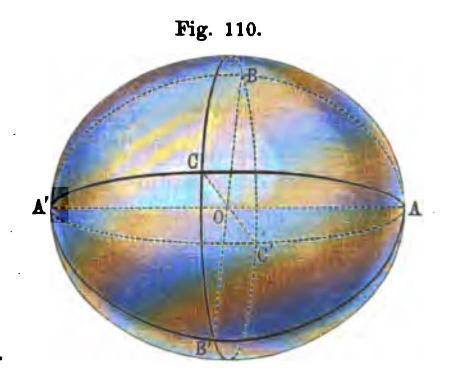
$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\eta\zeta - 2E\zeta\xi - 2F\xi\eta = 1 \quad . \quad . \quad (43)$$

haben. Wenn $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, also das Quadrat der Entfernung eines Punktes der Fläche ξ, η, ζ vom Anfangspunkt ist, und α, β, γ die Richtungskosinus von ϱ sind, dann kann, da $\alpha = \xi/\varrho$, $\beta = \eta\ \varrho$, $\gamma = \zeta/\varrho$ ist, die Flächengleichung in der Form

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta = \frac{1}{\varrho^2} \cdots (44)$$

geschrieben werden. Folglich ist nach dem oben gefundenen Ausdrucke das Trägheitsmoment eines Systems um eine Axe, die durch den Anfangspunkt in der Richtung α, β, γ verläuft, umgekehrt proportional dem Quadrat des nach dieser Richtung gezogenen Radiusvektors der quadratischen Fläche (43); oder der Trägheitsradius um eine Axe ist dem Radiusvektor umgekehrt proportional. Also stellt die quadratische Fläche durch ihre Radienvektoren graphisch die Werte des Trägheitsradius des Systems um die Axe durch den Anfangspunkt dar.

Fig. 110.



Der Wert des Trägheitsmoments um eine Axe ist offenbar positiv; folglich ist die linke Seite von Gl. (43) eine positive Größe, d. h. die Oberfläche ist ein Ellipsoid um den Anfangspunkt. Diese Fläche heißt **Trägheitsellipsoid** oder **Momentenellipsoid**.

Fig. 110 stellt ein Ellipsoid dar, dessen Hauptaxen OA, OB, OC sind, also die drei zueinander senkrechten Linien, die, wie in § 160 gezeigt wurde, so gezogen werden können, daß sie die Oberfläche bei A, B, C senkrecht treffen. Jede Linie trifft die Oberfläche also in zwei Punkten, so daß es drei Punktpaare AA', BB', CC' gibt, und sämtliche Linien treffen und halbieren sich in einem Punkte O, der deshalb der Mittelpunkt der Oberfläche genannt wird. Die Axen OX, OY, OZ, auf die die Oberfläche bezogen wird Gl. (43), sind beliebige drei andere, aufeinander rechtwinklige Richtungen durch O.

168. Hauptaxen des Trägheitsellipsoids. Es wird in den Lehrbüchern der Geometrie gezeigt, daß die Richtungskosinus einer nach den Enden eines Radiusvektors senkrecht zu einer quadratischen Fläche in der Richtung α, β, γ gezogenen Linie, wenn die Fläche die durch Gl. (43) dargestellte ist, proportional sind den Größen

$$A\alpha - F\beta - E\gamma, \quad -F\alpha + B\beta - D\gamma, \quad -E\alpha - D\beta + C\gamma.$$

Fallen diese Werte mit α, β, γ zusammen, so trifft der Radiusvektor die Fläche senkrecht. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür sind:

$$\left.\begin{aligned} A\alpha - F\beta - E\gamma &= \varkappa\alpha \\ -F\alpha + B\beta - D\gamma &= \varkappa\beta \\ -E\alpha - D\beta + C\gamma &= \varkappa\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

wo $\varkappa$ eine Konstante ist. Durch Eliminierung von α, β, γ ergibt sich eine kubische Gleichung:

$$\left.\begin{vmatrix} A-\varkappa, & -F, & -F \\ -F, & B-\varkappa, & -D \\ -E, & -D, & C-\varkappa \end{vmatrix} = 0 \right\} \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

zur Bestimmung von $\varkappa$, deren sämtliche Wurzeln als reell und positiv nachgewiesen werden können. Jede dieser Wurzeln ermöglicht es, wenn sie für $\varkappa$ in Gl. (45) benutzt wird, α, β, γ zu finden, und also erhält man (wenn nicht die kubische Gleichung gleiche Wurzeln hat) drei Richtungen, in denen die vom Anfangspunkte gezogenen Linien die Oberfläche im rechten Winkel treffen. Es kann leicht nachgewiesen werden, daß diese drei Richtungen zueinander senkrecht sind.

Denn: es seien a^2, b^2, c^2 die — alle als ungleich angenommenen — Wurzeln der kubischen Gleichung und α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 die Werte der von zwei beliebigen von ihnen, etwa a^2, b^2 gegebenen Richtungskosinus; dann setze man a^2 für $\varkappa$ in Gl. (45) und α_1, β_1, γ_1 für α, β, γ ein und multipliziere die erste Gleichung mit α_2, die zweite mit β_2, die dritte mit γ_2. Dies ergibt drei Gleichungen, die $\alpha_1\,\alpha_2$, $\beta_1\,\beta_2$, $\gamma_1\,\gamma_2$ und andere Produkte enthalten. Wenn man in derselben Weise b^2 für $\varkappa$, und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ für α, β, γ einsetzt und die drei erhaltenen Gleichungen mit α_1, β_1, γ_1 multipliziert, so erhält man drei weitere Gleichungen. Die von der Summe der ersten drei abgezogene Summe der letzten drei ergibt die Beziehung:

$$(b^2 - a^2)\,(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = 0,$$

oder:

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0,$$

d. h. die Richtungen α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 sind aufeinander senkrecht. Ebenso kann gezeigt werden, daß auch die dritte Richtung zu den beiden ersten senkrecht ist.

Wenn unter den Wurzeln gleiche sind, versagt diese Art der Behandlung; die Richtungen können dann nicht aus Gl. (45) bestimmt werden. Wenn zwei von den Wurzeln gleich sind, ergibt sich aus Gl. (45) eine bestimmte Richtung, die beiden anderen Richtungen sind unbestimmt. Die Lösung ist indessen, daß alle Linien durch den Anfangspunkt und senkrecht zur bestimmten Richtung die Oberfläche im rechten Winkel treffen, d. h. die Oberfläche ist eine Rotationsfläche um die bestimmte Axe. Wenn alle Wurzeln gleich sind, treffen alle durch den Anfangspunkt gezogenen Linien die Oberfläche im rechten Winkel, die Oberfläche ist eine Kugel.

Jetzt möge die ξ-Axe mit derjenigen Richtung zusammenfallen, deren Kosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ durch Einsetzen von a^2 für $\varkappa$ in Gl. (45) gegeben sind. Unter dieser Voraussetzung wird $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$. Dann ergibt Gl. (45) $A = a^2$, $F = 0$, $E = 0$. Die Oberflächengleichung lautet alsdann:

$$a^2\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\eta\zeta = 1.$$

Wenn auch die η-Axe mit der $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$-Linie zusammenfällt, so erhält man $B = b^2$ und $D = 0$. Die noch übrige Axe wird dann mit der $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$-Linie zusammenfallen, und Gl. (45) wird das Ergebnis $C = c^2$ liefern. Also hat die auf die drei Axen durch den Anfangspunkt und senkrecht zur Oberfläche (die sogenannten **Hauptaxen**) bezogene Gleichung die einfache Form:

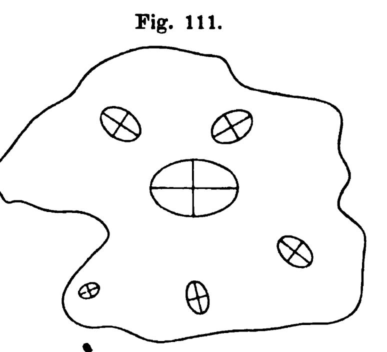
$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

wo ξ, η, ζ die Koordinaten eines auf die Hauptaxen bezogenen Punktes sind.

Man kann sich jetzt, mit Hilfe des Trägheitsellipsoids Gl. (47), eine sehr anschauliche Vorstellung von den Trägheitsverhältnissen eines Körpers um denjenigen seiner Punkte, der mit dem Mittelpunkte des Ellipsoids zusammenfällt, machen. Zieht man nämlich von diesem Punkte irgend einen Strahl bis zur Ellipsoidoberfläche, so ist das Trägheitsmoment um eine Axe dieser Richtung gleich dem reziproken Quadrat des Strahles. Die drei Axen des Ellipsoids heißen die **Hauptträgheitsaxen** des Körpers für jenen Punkt, das Trägheitsmoment um die kleinste Axe ist das größte, das um die größte Axe das kleinste von allen; die Momente in Bezug auf die drei Axen heißen die **Hauptträgheitsmomente** des Körpers.

Um jeden Punkt des Körpers gibt es natürlich ein Trägheitsellipsoid für sich; besonderes Interesse beansprucht dasjenige um den Schwerpunkt des Körpers: es heißt **Zentralträgheitsellipsoid** und ist, da für den Schwerpunkt die Trägheitsmomente am kleinsten sind, von allen am größten (Fig. 111).

Fig. 111.



In besonderen Fällen, d. h. bei speziellen Körperformen und Massenverteilungen, kann das Trägheitsellipsoid, wie wir sahen, zu einem verlängerten oder abgeplatteten Rotationsellipsoid oder gar zu einer Kugel werden; letzteres tritt, bei gleichförmiger Dichte, bei der Kugel und den fünf regulären Körpern (Würfel u. s. w.) ein.

Jeden zentralen Schnitt des Trägheitsellipsoids kann man als **Trägheitsellipse** für diesen Schnitt bezeichnen.

Die überaus merkwürdige Tatsache, daß die Trägheitsmomente eines Körpers um alle durch einen seiner Punkte gehenden Axen bei beliebiger Gestalt und Dichteverteilung des Körpers durch die Strahlen eines Ellipsoids dargestellt werden können, ist von Poinsot gefunden worden, dem zu Ehren man das Trägheitsellipsoid zuweilen als Poinsotsches Ellipsoid bezeichnet.

---

169. Bewegung eines starren Körpers um eine feste horizontale Axe. Wir wollen jetzt einige Beispiele der oben ausgesprochenen Prinzipien betrachten.

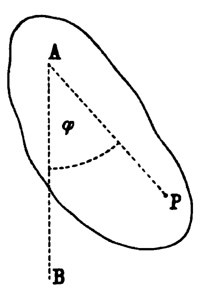
1. Die Bewegung eines starren Körpers, der unter der Wirkung der Schwerkraft steht und sich frei um eine horizontale feste Axe drehen kann, soll bestimmt werden.

Benutzt man Gl. (32) und nimmt an, daß die Axe die x-Axe ist, so hat man Gl. (33), nämlich:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}\Sigma m r^2 = \Sigma R r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Hier ist φ der Winkel, welchen eine senkrecht zur Axe nach einem Punkte des Körpers gezogene Linie mit einem anderen Lot bildet, das von demselben Punkte der Axe ausgeht und im Raume fest ist. Die Beschleunigung $\ddot{\varphi}$ ist die gleiche für alle solche von der Axe nach irgend welchen Punkten des Körpers gezogenen Linien. Die Größe auf der rechten Seite ist die Summe der Momente der wirksamen Kräfte um die Axe.

Fig. 112.



Die äußeren Kräfte, die auf den Körper wirken, sind die Gravitationskräfte auf die den Körper bildenden Teilchen und die an der Axe auf den Körper wirkenden Kräfte. Die letzteren haben kein Moment um die Axe, folglich braucht man in $\Sigma R r$ nur die Gravitationskräfte in Rechnung zu ziehen. Diese sind Kräfte, die mit den Massen der Teilchen proportional sind und senkrecht nach unten wirken.

Wenn dann φ der Winkel zwischen einer senkrecht zur Axe nach einem Teilchen P von der Masse m gezogenen Linie und einer festen Linie senkrecht zur Axe ist, wie in Fig. 112, so ergibt sich für R, die auf m wirkende Schwerkraft, der Wert mg. Das Moment Rr ist also $mgr \sin\varphi$, und $\Sigma R r$ ist $\Sigma m g r \sin\varphi$. Es ist aber $r \sin\varphi$ die Entfernung — die wir y nennen wollen — des Punktes P von einer vertikalen, die Axe enthaltenden Ebene, und folglich $\Sigma m r \sin\varphi = \Sigma m y$, oder, wenn h die Länge eines von der Axe auf den Schwerpunkt gefällten Lotes und θ der Winkel ist, den dieses Lot mit der Vertikalen bildet, so ist $\Sigma m r \sin\varphi = h \sin\theta \Sigma m$. Wenn dann M die ganze Masse

des Körpers bezeichnet, so ist $\Sigma Rr = Mgh \sin\theta$. Wenn θ so genommen wird, so wirkt $Mgh \sin\theta$ immer in der Richtung θ zu verkleinern, so daß die Gleichung in der Form

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\Sigma mr^2 + Mgh \sin\theta = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$

geschrieben werden muß.

Wie wir oben gesehen haben, ist $\Sigma mr^2 = M(h^2 + k^2)$, wo k der Gyrationsradius des Körpers um eine parallele Axe durch den Schwerpunkt ist, und es kann folglich die eben gefundene Gleichung auch in der Form

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}(h^2 + k^2) + gh \sin\theta = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (50)$$

geschrieben werden.

170. Theorie des zusammengesetzten Pendels. Wenn θ immer klein ist, wird aus der Gl. (50):

$$-\frac{1}{\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2} = g\,\frac{h}{h^2 + k^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (51)$$

Wenn sowohl Zähler als Nenner auf der linken Seite mit h multipliziert werden, so wird daraus das Verhältnis der linearen Beschleunigung des Schwerpunktes längs des Kreises, in dem er sich bewegt, zu seiner linearen Verrückung aus der ungestörten Lage längs desselben Kreises. Die Bewegung ist daher (§ 53) einfach harmonisch in der Kreisbahn; ihre Periode T wird durch die Beziehung

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{gh}{h^2 + k^2}$$

gegeben. Wenn man diese mit der Gleichung (§ 138) für die Periode eines einfachen Pendels von der Länge l, nämlich mit

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l}$$

vergleicht, so sieht man, daß die Länge eines einfachen Pendels, das mit derselben Periode schwingen würde, mit der der starre Körper um die feste Axe schwingt, oder, wie man auch sagt, daß die Länge des korrespondierenden oder äquivalenten, einfachen Pendels durch die Gleichung

$$l = \frac{h^2 + k^2}{h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (52)$$

gegeben ist.

Ein starrer Körper, der auf diese Weise um eine feste horizontale Axe schwingt, heißt ein zusammengesetztes Pendel.

Wenn man die Gleichung für l in der Form

$$h^2 - hl + k^2 = 0$$

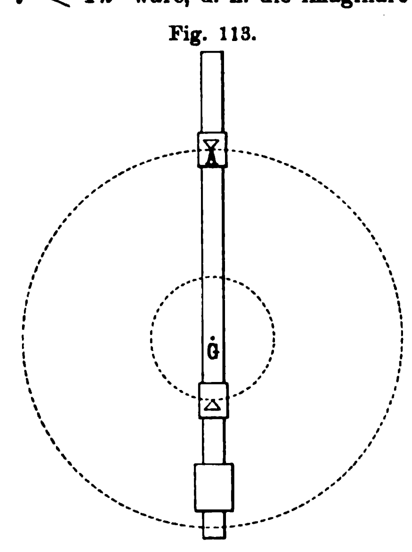
schreibt und nach h auflöst, so findet man:

$$h = \frac{1}{2} l \pm \frac{1}{2} \sqrt{l^2 - 4k^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

so daß es im allgemeinen für einen gegebenen Wert von l zwei Werte von h gibt.

Der Wert von h für den Körper ist natürlich immer reell, und k ist eine Konstante; darum müssen solche Werte von l, bei denen $l^2 < 4k^2$ wäre, d. h. die imaginäre Werte von h ergeben würden, ausgeschlossen werden. Der denkbar kleinste Wert von l für den Körper ist daher $l = 2k$. Dann ist k der Wert von h, und das Pendel hat sein Minimum von Periode für die gegebene Axenrichtung relativ zu dem Körper. Der Leser wird sich leicht überzeugen, daß, wenn h sehr groß ist (wobei der starre Körper durch ein masseloses, starres Gestänge mit der Axe verbunden gedacht wird), l auch sehr groß ist, und daß, wenn h sehr klein ist, l wieder sehr groß ist. Aber l ist endlich, wenn h endlich ist, und so ist das Vorhandensein eines Minimumwertes von l einleuchtend.

Fig. 113.



Es möge in Fig. 113 die Papierebene die senkrechte Ebene darstellen, in der sich der Schwerpunkt G des Körpers bewegt, und es möge in A jene Ebene die Axe schneiden. Nun sollen von G als Mittelpunkt zwei Kreise, mit den nach Gl. (53) gegebenen Werten von h als Radien in der Papierebene beschrieben werden. Wenn dann der Körper um eine parallele Axe durch irgend einen Punkt eines dieser Kreise schwingt, wird die Periode den Wert $2\pi \sqrt{l : g}$ haben.

Der Wert von l ist, wohl bemerkt, die Summe dieser beiden Radien, d. h. die Summe der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung. Die Länge des äquivalenten einfachen Pendels ist hiernach die Länge einer von einem Punkte in einem dieser Kreise durch den Schwerpunkt bis zu dem anderen Kreise jenseits des Schwerpunktes gezogenen Linie. Dasjenige Ende einer solchen Linie, an welchem die Axe liegt, wird manchmal der „Schwingungspunkt“ genannt, das andere Ende der „Aufhängungspunkt“ und die Möglichkeit der Vertauschung dieser beiden Punkte wird als die Vertauschbarkeit vom Schwingungs- und Aufhängungspunkte bezeichnet. Indessen ist das nicht eine geeignete Art, das erhaltene Ergebnis zu beschreiben, selbst wenn die Bezeich-

nungen einwandfrei wären, da es offenbar eine unendliche Anzahl von „Aufhängungspunkten“, für die die Periode denselben Wert hat, gibt, der die gleiche Anzahl von „Schwingungspunkten“ entspricht.

Ein Pendel, welches auf die erwähnte Vertauschung eingerichtet ist, heißt Reversionspendel.

171. Bestimmung der Beschleunigung durch die Schwere mittels des zusammengesetzten Pendels. In der Form eines offenbar unabhängig von de Prony, Bohnenberger und Kater[1]) erfundenen Pendels wird das hier gewonnene Ergebnis benutzt, um den Wert von g durch Pendelbeobachtungen an verschiedenen Stellen der Erdoberfläche zu bestimmen. Ein sogenanntes zusammengesetztes Pendel, das aus einem starren Stabe mit gleitenden Gewichten, die an beliebigen Stellen des Stabes festgeklammert werden können, und justierbaren Schneiden, an denen das Pendel aufgehängt werden kann, besteht, wird von Ort zu Ort getragen und in Schwingungen versetzt, wo immer g bestimmt werden soll. Die beiden Schneiden werden derart auf den entgegengesetzten Seiten des Schwerpunktes des Pendels adjustiert, daß die Schwingungsperiode um beide die gleiche ist; dann ist die Entfernung zwischen ihnen die Länge des äquivalenten einfachen Pendels, es sei denn, daß beide gleich weit vom Schwerpunkte entfernt sind. In diesem letzteren Falle ist die Entfernung das Doppelte von einer der Wurzeln der Gleichung, nicht die Summe der Wurzeln (außer in dem speziellen Falle, in dem sie der Minimalwert von l ist) und ergibt nicht den Wert von g.

Es ist ein nicht selten vorkommender Fehler, das Doppelte von einer der Wurzeln der Gleichung statt der Summe der Wurzeln zu nehmen; es kann das sehr leicht vorkommen, wenn der Schwerpunkt allzu nahe der Mitte zwischen den beiden Schneiden für ihre beiden Lagen liegt, d. h. wenn die Wurzeln nahezu gleich sind. Freilich zeigt sich im allgemeinen der einmal begangene Fehler sofort durch den sich ergebenden unmöglichen Wert von g an.

Wenn, wie es bei einigen Formen des Pendels der Fall ist, die Schneiden fest sind, während die Verteilung der Materie durch gleitende Gewichte verändert werden kann, muß, um die Adjustierung zu sichern, zwischen einem der gleitenden Gewichte und dem Schwerpunkte eine Schneide sein.

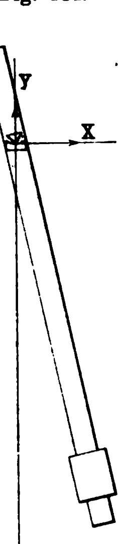
Die Wirkung der Luft auf das Pendel kann hier nicht in Betracht gezogen werden. Es entstehen Schwierigkeiten daraus, daß diese Wirkung nicht ganz dieselbe ist für Schwingungen um die eine, wie für Schwingungen um die andere Schneide. Diesem Übelstande wird indessen abgeholfen durch eine von Bessel erdachte und von Repsold konstruierte Form des zusammengesetzten Pendels, in der die Adjustie-

[1]) S. Mémoires Relatifs à la Physique, publiés par la Société Française de Physique. 4.

rungsgewichte sich im Inneren einer hohlen Röhre bewegen, so daß die äußere Gestalt des Pendels für die Aufhängung an beiden Schneiden die gleiche ist.

172. Kraftwirkungen von Lagern auf ein zusammengesetztes Pendel. Als ein anderes Beispiel für diese Gleichungen können wir die einem sich um eine feste horizontale Axe drehenden Körper durch die Lager erteilten Kräfte bestimmen; z. B. die auf die Schneiden eines zusammengesetzten Pendels durch die Lager, auf denen sie ruhen, ausgeübten Kräfte. Nehmen wir an, daß die Materie im Körper symmetrisch um die zur Axe senkrechte Ebene durch den Schwerpunkt verteilt sei, und daß die einzigen wirksamen Kräfte Gravitationskräfte seien. Dann können alle den Körper an der Axe angreifenden Kräfte auf eine einzige Kraft in jener Ebene zurückgeführt werden. X sei die horizontale, Y die vertikale Komponente dieser Kräfte, die nach rechts bezw. oben wirkend angenommen werden, wie in Fig. 114. Nach dem in § 154 aufgestellten Theorem ist die Beschleunigung des Schwerpunktes dieselbe, als ob sämtliche dort wirksamen Kräfte in diesen Punkt verlegt wären, und als ob der Körper ein im Schwerpunkte gelegenes Teilchen von der der Gesamtmasse des Körpers gleichen Masse wäre. Die Beschleunigung hat die Komponenten $h\ddot{\theta}$ längs dem Kreise, in dem der Schwerpunkt fortzuschreiten gezwungen ist und zwar nach dem tiefsten Punkte zu, und $h\dot{\theta}^2$ nach der Axe zu. Löst man die Kräfte dem Kreise entlang und nach dem Mittelpunkte zu auf, so hat man:

Fig. 114.



$$\left.\begin{aligned} Mh\frac{d^2\theta}{dt^2} &= X\cos\theta + Y\sin\theta - Mg\sin\theta \\ Mh\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= Y\cos\theta - X\sin\theta - Mg\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (54)$$

Man hat aber oben Gl. (50) gesehen, daß

$$(h^2 + k^2)\frac{d^2\theta}{dt^2} + gh\sin\theta = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (54\,a)$$

ist, so daß aus der ersten dieser Gleichungen

$$-\frac{Mgh^2}{h^2 + k^2}\sin\theta = X\cos\theta + Y\sin\theta - Mg\sin\theta$$

wird. Daraus ergibt sich:

$$X\cos\theta + Y\sin\theta = Mg\frac{k^2}{h^2 + k^2}\sin\theta \quad . \; . \; . \; . \quad (55)$$

Die Größe auf der linken Seite ist die Kraftkomponente auf die Schneide senkrecht zur Länge des Pendels.

Nun ist aber Gl. (54a), mit $\dot{\theta}$ multipliziert, der Änderungsgrad mit der Zeit von

$$\tfrac{1}{2}(h^2 + k^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - gh\cos\theta$$

und infolgedessen ist diese letztere Größe konstant. Wenn θ_1 der Winkel ist, den das Pendel in seiner äußersten Ablenkung mit der Vertikalen bildete, d. h. wenn $\dot{\theta} = 0$ ist, so ist dieser konstante Wert $- gh\cos\theta_1$. Folglich gilt die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}(h^2 + k^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = gh\,(\cos\theta - \cos\theta_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

folglich wird aus der zweiten der Gl. (54):

$$\frac{2\,Mgh^2}{h^2 + k^2}(\cos\theta - \cos\theta_1) = Y\cos\theta - X\sin\theta - Mg\cos\theta.$$

Dies führt zu der Gleichung:

$$Y\cos\theta - X\sin\theta = \frac{Mg}{h^2 + k^2}\left[(3\,h^2 + k^2)\cos\theta - 2\,h^2\cos\theta_1\right] \qquad (57)$$

Die Größe auf der linken Seite ist die auf die Schneiden nach oben parallel mit h wirkende Kraft. Aus Gl. (55) und (57) kann der Leser alsbald X, Y berechnen.

173. Materielles System unter der Wirkung paralleler Kräfte. Betrachten wir ein System von Teilchen, an welchem ein System von parallelen Kräften $P_1, P_2, P_3 \ldots$ in den Punkten $a_1, a_2 \ldots$ angreift; die Kosinus der Winkel, welche die Richtungen dieser Kräfte mit den x, y, z-Axen bilden, seien α, β, γ; dann sind die x-Komponenten der Kräfte $P_1\alpha$, $P_2\alpha \ldots$, die y-Komponenten $P_1\beta$, $P_2\beta \ldots$ und die z-Komponenten sind $P_1\gamma$, $P_2\gamma \ldots$ Gibt es keine anderen Kräfte als diese, so ist die Bewegung des Schwerpunktes des Körpers dieselbe, als ob die Kraftkomponenten

$$(P_1 + P_2 + \cdots)\,\alpha,\ (P_1 + P_2 + \cdots)\,\beta,\ (P_1 + P_2 + \cdots)\,\gamma$$

auf das im Schwerpunkte vereinigte System wirkten. Das bedeutet, daß die Gleichungen der Schwerpunktsbewegung lauten:

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2x}{dt^2} &= (P_1 + P_2 + \cdots)\,\alpha \\ M\frac{d^2y}{dt^2} &= (P_1 + P_2 + \cdots)\,\beta \\ M\frac{d^2z}{dt^2} &= (P_1 + P_2 + \cdots)\,\gamma \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Daraus ergibt sich, was, wie man einsieht, ohnedies der Fall sein muß:

$$M\frac{d^2s}{dt^2} = P_1 + P_2 + \cdots \quad \ldots \ldots \ldots (59)$$

wo $\ddot{s}$ die Beschleunigung des Schwerpunktes in der Kraftrichtung ist.

174. Momente paralleler Kräfte. Mittelpunkt paralleler Kräfte. Nach Gl. (27) hat man, wenn x, y, z die Koordinaten eines Teilchens von der Masse m (und zugleich eines Punktes auf der Wirkungslinie einer Kraft P, der als Angriffspunkt dieser Kraft gewählt ist), auf den Schwerpunkt des Systems bezogen, sind, die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \Sigma P(\gamma y - \beta z)\\ \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \Sigma P(\alpha z - \gamma x)\\ \Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \Sigma P(\beta x - \alpha y)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (60)$$

welche besagen, daß die Änderungsgrade des Moments der Bewegungsgröße des Systems um die durch den Schwerpunkt hindurchgehenden x, y, z-Axen den Momenten der äußeren Kräfte um diese Axen gleich sind. Betrachten wir jetzt eine der Größen auf der rechten Seite dieser Gleichungen, etwa $\Sigma P\beta x$; da β eine Konstante ist, kann man auch $\beta\Sigma Px$ schreiben. Bestimmen wir dann eine Größe ξ so, daß $\xi\Sigma P = \Sigma Px$ ist, so können wir $\xi\Sigma P$ an Stelle von ΣPx setzen. Ebenso kann ΣPy, ΣPz durch $\eta\Sigma P$. $\zeta\Sigma P$ ersetzt werden. Auf diese Weise wird aus den obigen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= (\eta\gamma - \zeta\beta)\,\Sigma P\\ \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= (\zeta\alpha - \xi\gamma)\,\Sigma P\\ \Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= (\xi\beta - \eta\alpha)\,\Sigma P\end{aligned}\right\} \quad \ldots (61)$$

Derjenige Punkt, dessen Koordinaten $\xi\eta\zeta$ sind, fällt zusammen mit dem Schwerpunkt eines Systems von Teilchen, deren Massen mit $P_1, P_2 \ldots$ proportional sind, und die an denjenigen Punkten sich befinden, welche als Angriffspunkte dieser Kräfte auf das System betrachtet werden. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt paralleler Kräfte. Die Gleichungen zeigen, daß die Momente der Kräfte um die Axen durch Ersetzung des Systems paralleler Kräfte durch eine einzige, ihrer Summe gleiche, und gleich gerichtete Kraft durch den Mittelpunkt der parallelen Kräfte nicht verändert wird.

Es ist ferner hervorzuheben, daß man dieselben Ergebnisse erhält, wo auch immer auf der Wirkungslinie paralleler Kräfte man den Angriffspunkt (x, y, z) jeder einzelnen von ihnen wählt. Denn jede solche Änderung in der Lage der Angriffspunkte kann die Lage des Mittel-

punktes der parallelen Kräfte immer nur auf einer den Kräften parallelen Linie verschieben, was das Resultat ihrer Ersetzung durch eine einzige, ihrer Summe gleiche Kraft von gleicher Richtung und durch den Mittelpunkt der parallelen Kräfte nicht beeinflußt. Dieses ist das sogenannte Prinzip der Übertragbarkeit der Kraft längs ihrer Wirkungslinie. Eine solche Kraft, die an Stelle eines Systems paralleler Kräfte gesetzt wird, heißt die Resultante des Systems paralleler Kräfte. So ist die Resultante zweier paralleler Kräfte P, Q eine Kraft $P + Q$ in derselben Richtung, welche die Linie AB (Fig. 115), die quer durch die Wirkungslinie der beiden Kräfte von einem Punkte A auf der Wirkungslinie der einen nach einem Punkte B auf der Wirkungslinie der anderen gezogen wird, so schneidet, daß die Segmente AC, CB den Kräften P, Q auf den angrenzenden Wirkungslinien umgekehrt proportional sind, d. h. daß

Fig. 115.

$$P : Q = CB : AC$$

ist.

Sind die Kräfte einander entgegengesetzt gerichtet, wie in Fig. 116, so ist die Resultante ebenfalls die algebraische Summe, in diesem Falle also die Differenz der Einzelkräfte, und wirkt in der Richtung der größeren Kraft. Ihre Wirkungslinie schneidet die verlängerte Linie AB in einem Punkte C jenseits der Wirkungslinie der größeren Kraft, und es gilt dieselbe Beziehung wie vorher.

175. Kräftepaare. Wir können jetzt den Fall betrachten, wo zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte auf ein System von Teilchen in verschiedenen Linien wirken. Ein solches Kräftesystem wird ein Kräftepaar genannt. Es wird durch Fig. 116 dargestellt, wenn

Fig. 116.

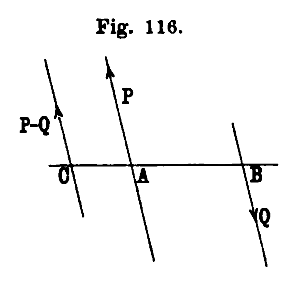
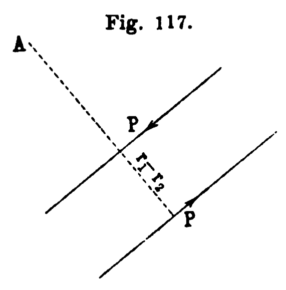


Fig. 117.



$P = Q$ ist. In diesem Falle ist aber C unendlich weit von A entfernt, da, wenn $P = Q$ ist, $AC = BC$ ist. Nach den oben bewiesenen Theoremen beeinflußt der Angriff eines Kräftepaares an einem Körper die Bewegung des Schwerpunktes nicht, da die an diesen Punkt übertragenen Kräfte die Kraft null auf das Ganze ergeben.

Ferner müssen wir nach Gl. (31) auch in diesem Falle

$$\Sigma m \left(2\, r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = \Sigma Pr$$

haben, wo r auf der linken Seite die Entfernung eines Teilchens m von einer Axe senkrecht zu der Ebene, in der die Kräfte P angreifen, und r auf der rechten Seite die Entfernung der Linie einer Kraft P von der Axe ist. Es ergibt sich alsdann $\Sigma Pr = P\,(r_1 - r_2)$, wo r_1, r_2 die Entfernungen der beiden Kräfte des Kräftepaares von der Axe sind. Also ist die Summe der Momente der Kräfte um die Axe gleich dem Produkte einer Kraft in die Entfernung zwischen den Kräften und ist folglich von der absoluten Entfernung der Kräfte von der Axe unabhängig, d. h. das Kräftemoment ist für alle parallelen Axen das gleiche.

Natürlich ist die Summe der Momente, nach der oben für die Rotationsbewegung als positiv angenommenen Richtung, dann positiv, wenn Kräfte und Strecken den in Fig. 117 (a. v. S.) dargestellten entsprechen.

Das Produkt $P\,(r_1 - r_2)$ heißt das Moment des Kräftepaares. Es wird graphisch dargestellt durch eine Linie, deren zahlenmäßige Länge dem Moment gleich ist, und welche senkrecht zu der Ebene, in der die Kräfte wirken, nach der Seite der Ebene, von der aus die Kräfte dem Beschauer so wie in Fig. 117 erscheinen, gezogen wird. Diese Linie heißt, wenn sie nach Größe und Richtung gegeben ist, die Axe des Kräftepaares. Man wird erkennen, daß die Axe durch ihre Größe und Richtung völlig bestimmt ist.

Es ist nach Gl. (25) und (29) oder (31) klar, daß es für das Gleichgewicht einer Gruppe von Kräften nötig ist, daß 1. die Summe der Kraftkomponenten in jeder Richtung verschwinde, 2. die Summe der Momente der Kräfte, um welche Axe auch immer ebenfalls null werde. Diese Bedingungen werden nicht für das Gleichgewicht genügen im Falle eines Systems von Teilchen (ob aufeinander wirkende oder nicht), die nicht ein starres System bilden, da in diesem Falle die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gl. (31) zwar verschwinden, dies aber nur deshalb tun, weil die Ausdrücke von der Form

$$\Sigma m \left(2\, r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

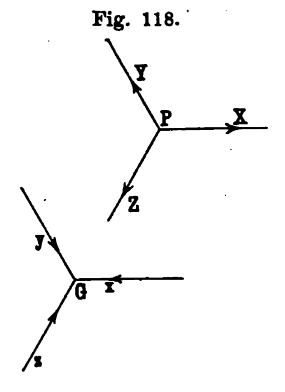
sämtlich verschwinden. In diesem Falle ist es notwendig, sowohl die inneren als die äußeren Kräfte zu kennen, sobald das System kein starres ist; ist es das aber, so sind die oben aufgestellten Bedingungen notwendig und hinreichend.

Es leuchtet ein, daß ein auf ein starres System wirkendes Kräftepaar nur durch ein Kräftepaar von gleichem und entgegengesetztem Moment in derselben oder einer parallelen Ebene aufgehoben werden kann. Denn nur dann wird die Summe der Kräftemomente um irgend eine gewählte Axe null sein. Darum kann ein Kräftepaar aus einer

gegebenen Ebene ohne Änderung der Wirkung in eine parallele Ebene übertragen werden, wenn sein Moment und seine Richtung unverändert gelassen werden. Auch sind zwei Kräftepaare äquivalent, wenn ihre Ebenen parallel und ihre Momente gleich groß und gleich gerichtet sind, d. h. wenn dieselbe Axe beide darstellt.

176. Poinsots Methode der Auflösung von Kräften. Die Gl. (29) können mit Hilfe von Kräftepaaren folgendermaßen ausgedrückt werden. Es mögen wie vorher (X, Y, Z) die auf ein Teilchen m wirksame, im Punkte P (x, y, z) angreifende Kraft darstellen (in beiden Teilen der Fig. 118 ist XYZ zu lesen). Dann werden im Schwerpunkte G zwei mit (X, Y, Z) gleiche und entgegengesetzte Kräfte eingeführt. Die auf diese Weise erhaltenen drei Kräfte bilden eine der gegebenen Kraft an Größe und Richtung gleiche, aber im Schwerpunkte angreifende Kraft, und ein Kräftepaar, dessen Momente in den yz, zx, xy-Ebenen

Fig. 118.



$$Zy' - Yz', \quad Xz' - Zx', \quad Yx' - Xy'$$

sind, wo x', y', z' die Koordinaten von m, auf den Schwerpunkt bezogen, sind. Diese Paare sind die Momente der gegebenen Kraft um die x, y, z-Axen durch den Schwerpunkt. Dieser für alle Kräfte des Systems durchgeführte Prozeß ergibt

$$\Sigma\,(Zy' - Yz'), \quad \Sigma(Xz' - Zx'), \quad \Sigma\,(Yx' - Xy')$$

für die Momente der Kräftepaare in den yz, zx, xy-Ebenen. Diese Summen der Momente der Kräftepaare sind die Summen der Momente der äußeren Kräfte um x, y, z-Axen durch den Schwerpunkt. Also kann man die Größen auf den rechten Seiten von Gl. (29), die die Winkelbeschleunigung des Körpers geben, als die auf diese Weise gewonnenen Summen der Momente der Kräftepaare ansehen [1]).

Es ist wichtig zu beachten, daß die Kräftepaare den Änderungsgrad der Momente der Bewegungsgröße um die Axen durch den Schwerpunkt liefern, während die den äußeren Kräften gleichen und parallelen Kräfte im Schwerpunkte die Bewegung des Schwerpunktes ergeben, so daß für einen starren Körper die Bewegung völlig bestimmt ist.

177. Poinsotsche Zentralaxe. Korkzieher-Kräftesystem oder „Renk". Dieselbe Methode kann angewandt werden, um die

[1]) Diese Auflösungsmethode ist mit großem Erfolge von Poinsot in seiner „Théorie nouvelle de la Rotation des corps" (Liouville J. 16, 1851) und anderen Schriften angewandt worden.

Kräfte in irgend einen Punkt zu übertragen, dessen Koordinaten ξ, η, ζ sind. Die Komponenten ΣX, ΣY, ΣZ bleiben dabei unverändert, aber die Momente derjenigen Kräftepaare, deren Axen den Koordinatenaxen parallel sind, werden jetzt:

$$\Sigma\,[Z\,(y - \eta) - Y\,(z - \zeta)],$$

u. s. w., oder, wenn L, M, N die Kräftepaare für den Fall der Übertragung der Kräfte in den Anfangspunkt und P, Q, R die Werte ΣX, ΣY, ΣZ bezeichnen:

$$L + Q\zeta - R\eta, \quad M + R\xi - P\zeta, \quad N + P\eta - Q\xi.$$

Nun seien ξ, η, ζ so gewählt, daß die Axe der Resultante G dieser Kräftepaare der resultierenden Kraft parallel ist; dann hat man:

$$\frac{L + Q\zeta - R\eta}{P} = \frac{M + R\xi - P\zeta}{Q} = \frac{N + P\eta - Q\xi}{R} \quad . \quad . \quad (62)$$

Dies sind die Gleichungen einer geraden Linie. Setzt man F für die Resultante von P, Q, R, so können diese Gleichungen auf die Form

$$QRF\xi + Q\,(MF - QG) = PRF\eta - P\,(LF - PG) = PQF\zeta$$

gebracht werden, welche zeigt, daß die Linie durch den festen Punkt geht, dessen Koordinaten

$$-\frac{MF - QG}{RF}, \quad \frac{LF - PG}{RF}, \quad 0$$

sind.

Die so gefundene Linie ist von Poinsot die Zentralaxe des Kraftsystems genannt worden. Die Wirkung der Kräfte wird auf die einer einzigen Kraft F längs der Zentralaxe und auf ein einziges Kräftepaar vom Moment G zurückgeführt, dessen Ebene senkrecht zur Zentralaxe liegt. Man kann ein solches Kräftesystem ein Korkziehersystem oder kurz ein „Renk“ (vom renken, verrenken) nennen.

Nach den Gleichungen der Zentralaxe (62) reduzieren sich die oben gegebenen Kräftepaar-Komponenten auf L, M, N, wenn der Anfangspunkt auf der Zentralaxe gegeben ist, so daß das Moment des resultierenden Kräftepaares G ist.

Man kann auch das System auf ein Kräftepaar und eine einzelne Kraft in einer geraden Linie parallel mit der Zentralaxe zurückführen, indem man in dieser geraden Linie zwei entgegengesetzte Kräfte, jede gleich F, einführt; eine von diesen wird zusammen mit F längs der Zentralaxe ein Kräftepaar in der Ebene der beiden parallelen Linien bilden, die andere wird die gewünschte Einzelkraft sein. Das nunmehr gewonnene Kräftepaar muß aber mit G verbunden werden, um das resultierende Kräftepaar zu ergeben, welches folglich größer ist als G. Die dafür angenommene Auflösungsmethode ergibt den Minimalwert, den G bei solcher Wahl der Axen haben kann.

Man wird finden, daß die Momente L, M, N der Kräftepaar-Komponenten ebenso von der Lage des Anfangspunktes wie von den Rich-

tungen der Axen abhängen, und daß die Zentralaxe nur eine mögliche Richtung und eine mögliche Lage im Raume haben kann.]

178. Impulsive Kräfte. Wir kommen jetzt zu den sogenannten impulsiven Kräften. Unter vielerlei Umständen — z. B. in Fällen von Zusammenstößen — wirkt eine sehr große Kraft während einer sehr kurzen Zeit auf einen Körper oder ein System und ruft eine endliche Bewegungsänderung des Körpers hervor. Da indessen der Zeitraum sehr kurz und die Geschwindigkeit jedes Teiles des Systems immer endlich ist, wird das System während des Zeitraumes in seiner Konfiguration nur sehr wenig geändert. Wird der Zeitraum verschwindend klein, so ist die Änderuug der Konfiguration null.

Ein gutes Beispiel von Impuls ist ein Hammerschlag. Die Erfahrung zeigt, daß der Betrag der impulsiven Kraft in einem solchen Falle sehr groß ist, da eine Wirkung, wie die Zertrümmerung eines Steins oder die Gestaltsänderung eines Stückes heißen Eisens hervorgerufen wird, eine Wirkung, die bei stetig angewandter Kraft nur mit Aufbietung sehr großer Kraft erreicht werden könnte. Die Bewegungsgröße des Hammerkopfes an sich ist nicht von sehr großem Betrage, aber beim Aufschlagen nimmt die Geschwindigkeit äußerst schnell ab, d. h. $m\dot{v}$ ist für den Hammerkopf numerisch sehr groß und kann deshalb den Widerstand des Materials überbieten.

Ferner, wenn ein Stück einer hölzernen oder eisernen Platte getroffen und dadurch ein Loch darein geschlagen wird (s. auch das bekannte Experiment der durch eine Scheibe geschossenen Kugel), so wird eine bedeutende Änderung der Bewegungsgröße an einer Stelle und plötzlich in dem getroffenen Stück Materie verursacht, ehe der Teil sich soweit aus seiner anfänglichen Lage fortbewegen konnte, daß er durch Dehnung des Körpers einen merklichen Druck hätte ausüben können, der einerseits der Bewegung des Teiles widerstanden und anderseits die übrige Materie zur Verrückung gebracht hätte. Infolge der Trägheit der Materie wird indessen bis zu der durch ihre Festigkeit gegebenen Grenze Widerstand geleistet.

Ein anderes Beispiel derselben Art ist das einer Münze, die auf einer, die Öffnung eines Glases bedeckenden Karte liegt. Wenn die Karte durch einen scharfen Schlag weggeschleudert wird, fällt die Münze in das Glas. Die Münze geht nicht mit der Karte mit, wenn die letztere plötzlich in Bewegung gesetzt wird, weil die äußerste Kraft, die die Karte auf die Münze ausüben kann — nämlich die von der Reibung herrührende — geringer ist, als die zur genügend schnellen Überwindung der Trägheit der Münze notwendige Kraft.

Das Zeitintegral einer impulsiven Kraft F, also $\int_0^\tau F dt$, über den sehr kurzen Zeitraum τ, während dessen sie wirkt, heißt der Impuls

der Kraft und ist natürlich das Maß der in dem Zeitraume durch die impulsive Kraft hervorgerufenen Änderung der Bewegungsgröße. Wir werden die in irgend einem Punkte angreifenden Impulskomponenten in den Richtungen x, y, z mit P, Q, R bezeichnen. Die Geschwindigkeitsänderung eines Teilchens m in x, y, z sei von $\dot{x}_0$ auf $\dot{x}$, dann ist die Änderung der Bewegungsgröße $m\,(\dot{x} - \dot{x}_0)$; ebenso sind die Änderungen der Bewegungsgröße in den anderen Richtungen $m\,(\dot{y} - \dot{y}_0)$, $m\,(\dot{z} - \dot{z}_0)$. An Stelle der Gl. (25) haben wir:

$$\Sigma m \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right) = \Sigma P, \quad \Sigma m \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_0}{dt}\right) = \Sigma Q,$$
$$\Sigma m \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_0}{dt}\right) = \Sigma R \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Daraus folgt selbstverständlich wie vorher:

$$\Sigma m \left(\frac{d\xi}{dt} - \frac{d\xi_0}{dt}\right) = \Sigma P, \quad \Sigma m \left(\frac{d\eta}{dt} - \frac{d\eta_0}{dt}\right) = \Sigma Q,$$
$$\Sigma m \left(\frac{d\zeta}{dt} - \frac{d\zeta_0}{dt}\right) = \Sigma R \quad . \quad . \quad . \quad (63\,\mathrm{a})$$

Aus den Momentengleichungen (27) wird:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma m \left[\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_0}{dt}\right) y - \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_0}{dt}\right) z\right] &= \Sigma (Ry - Qz) \\
\Sigma m \left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right) z - \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_0}{dt}\right) x\right] &= \Sigma (Pz - Rx) \\
\Sigma m \left[\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy^0}{dt}\right) x - \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right) y\right] &= \Sigma (Qx - Py)
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (64)$$

Diese Gleichungen besagen, daß die Änderungen in den Momenten der Bewegungsgröße des Systems um die Axen, nämlich:

$$\Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right), \quad \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}\right), \quad \Sigma m \left(z \frac{dy}{dt} - y \frac{dz}{dt}\right),$$

die in dem kurzen Zeitraume hervorgerufen werden, in dem der Impuls wirkt, den Summen der Momente der Impulse um die Axen gleich sind.

Wie vorher zerfallen die letzten drei Gleichungen in zwei Gruppen, in die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma m \left[\left(\frac{dz'}{dt} - \frac{dz'_0}{dt}\right) y' - \left(\frac{dy'}{dt} - \frac{dy'_0}{dt}\right) z'\right] &= \Sigma\,(Ry' - Qz') \\
\Sigma m \left[\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx'_0}{dt}\right) z' - \left(\frac{dz'}{dt} - \frac{dz'_0}{dt}\right) x'\right] &= \Sigma\,(Pz' - Rx') \\
\Sigma m \left[\left(\frac{dy'}{dt} - \frac{dy'_0}{dt}\right) x' - \left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx'_0}{dt}\right) y'\right] &= \Sigma\,(Qx' - Py')
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (65)$$

und in eine andere Gruppe, die nach Gl. (30) oben hingeschrieben werden kann, zu deren Benutzung aber hier kaum Gelegenheit sein dürfte.

Gl. (65) besagen, daß die Änderungen der Momente der Bewegungsgrößen um Koordinatenaxen durch den Schwerpunkt der Summe der Momente der angreifenden Impulse um die betreffenden Axen gleich sind. Diese Änderungen sind unabhängig von den in Gl. (63 a) gegebenen Änderungen der Bewegung des Schwerpunktes.

Für einen starren Körper verwandeln sich die Gl. (65) in:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m r_x^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\varphi_0}{dt}\right) &= \Sigma S_x r_x \\ \Sigma m r_y^2 \left(\frac{d\chi}{dt} - \frac{d\chi_0}{dt}\right) &= \Sigma S_y r_y \\ \Sigma m r_z^2 \left(\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\psi_0}{dt}\right) &= \Sigma S_z r_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (66)$$

wo (wenn φ, χ, ψ die in § 158 definierten Winkel sind)

$$S_x = (R\cos\varphi - Q\sin\varphi)\, r_x, \quad S_y = (P\cos\chi - R\sin\chi)\, r_y,$$
$$S_z = (Q\cos\psi - P\sin\psi)\, r_z$$

ist, d. h. die Impulse senkrecht zu den x-, bezw. y- und z-Axen sind.

Der Leser möge beachten, daß die zweiten Glieder in Klammern in Gl. (31) keine Glieder für die Impulsgleichungen liefern. Die Zeitintegrale dieser Glieder verschwinden, da jedes Integral von der Form $2(r\dot{r}\dot{\varphi})\tau$ sein muß, wo eckige Klammern den Mittelwert der eingeschlossenen Größe bezeichnen, und τ das Zeitintervall ist. Der Faktor von τ ist endlich und τ ist unendlich klein; folglich sind die Glieder unmerklich.

179. Ballistisches Pendel von Robins. Das folgende ist ein gutes Beispiel impulsiver Kräfte. Ein starres Pendel mit einem schweren Pendelkörper kann sich frei um eine horizontale Schneide drehen; die Lage seines Schwerpunktes und sein Trägheitsmoment um eine parallel mit der Schneide durch den Schwerpunkt gelegte Axe sind bestimmt worden. Eine Kugel von der Masse m, die sich in der senkrecht zur Schneide gelegenen Ebene durch den Schwerpunkt horizontal bewegt, wird von dem Pendelkörper aufgefangen und festgehalten, und der dadurch erzeugte Ablenkungswinkel des ursprünglich ruhenden Pendels wird beobachtet. Es ist daraus die Geschwindigkeit der Kugel zu bestimmen.

Es sei M die Masse des Pendels einschließlich der Kugel, h die Entfernung des Schwerpunktes von der Axe, k der Gyrationsradius des Pendels um die mit der Schneide parallele Axe durch den Schwerpunkt, z die Entfernung der Bewegungslinie der anderen Kugel von der Schneide und θ_1 der Gesamtwinkel, um den das Pendel gedreht wird. Das Moment der Bewegungsgröße der Kugel vor dem Zusammenstoß ist mvz um die Schneide, und das muß — nach dem oben aufgestellten Prinzip — dem Moment der Bewegungsgröße von Pendel und Kugel

um dieselbe Axe nach dem Zusammenstoß gleich sein. So erhält man, wenn $\dot{\theta}_0$ die Winkelgeschwindigkeit gleich nach dem Zusammenstoß ist:

$$mvz = M(h^2 + k^2)\frac{d\theta_0}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (67)$$

Nun wird aber im Herumschwingen die Winkelgeschwindigkeit des Pendels durch die Wirkung der Schwere vermindert. Tatsächlich hat man

$$-\frac{d^2\theta}{dt^2} = g\frac{h}{h^2+k^2}\sin\theta.$$

Daraus ergibt sich

$$-\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} = g\frac{h\frac{d\theta}{dt}}{h^2+k^2}\sin\theta,$$

oder, wenn man mit einem unendlich kleinen Zeitelement dt multipliziert:

$$-\frac{d\theta}{dt}d\frac{d\theta}{dt} = g\frac{h}{h^2+k^2}\sin\theta\, d\theta,$$

also:

$$-\tfrac{1}{2}d\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = g\frac{h}{h^2+k^2}\sin\theta\, d\theta,$$

woraus sich

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 = g\frac{h}{h^2+k^2}(1-\cos\theta_1) = 2g\frac{h}{h^2+k^2}\sin^2\frac{\theta_1}{2}$$

ergibt. Durch Substitution in Gl. (67) und eine kleine Reduktion erhält man:

$$v = 2\sqrt{\frac{gh}{h^2+k^2}}\left[\frac{M}{m}\,\frac{h^2+k^2}{z}\right]\sin\frac{\theta_1}{2} \quad \ldots\ldots \quad (68)$$

Manchmal wird der Winkel θ_1 durch ein Band gemessen, das an einem Punkte unter dem Pendelkörper befestigt ist und das gegen die durch eine leichte Feder ausgeübte Reibung von dem Pendel herausgezogen wird, derart, daß die Länge des herausgezogenen Bandes die Sehne des durch seinen Befestigungspunkt beschriebenen Bogens ist, während das Pendel den Winkel θ ausschwingt. Wenn l die Entfernung des Befestigungspunktes von der Schneide und s die Länge des herausgezogenen Bandes ist, so ist $s/l = 2\sin\frac{1}{2}\theta_1$. Folglich erhält man:

$$v = \sqrt{\frac{gh}{h^2+k^2}}\left[\frac{M}{m}\,\frac{h^2+k^2}{z}\right]\frac{s}{l} \quad \ldots\ldots \quad (69)$$

Wenn T die Periode der freien Schwingung des Pendels um seine Schneide ist, so hat man:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h^2+k^2}{gh}},$$

so daß sich schließlich ergibt:

$$v = \frac{2\pi}{T}\left[\frac{M(h^2 + k^2)}{mz}\right]\frac{s}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (70)$$

180. Beispiel für den Impuls: gerader gleichförmiger Stab auf glatter Tafel. Als ein weiteres Beispiel impulsiver Kräfte sei ein gerader gleichförmiger Stab betrachtet, der auf einem glatten horizontalen Tische liegt und dem an dem einen Ende, A, ein Impuls in der horizontalen Richtung senkrecht zu dem Stabe erteilt wird.

Es sei J die Stärke des Impulses, dann ist, wenn m die Masse des Stabes ist, die Bewegung des Schwerpunktes durch den Ausdruck

$$m\frac{dx_c}{dt} = J$$

gegeben, wo $\dot{x}_c$ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes senkrecht zu dem Stabe gleich nach Erteilung des Impulses ist, da der Stab vor der Erteilung des Impulses in Ruhe war.

Ferner ist nach Gl. (66) die Winkelgeschwindigkeit des Stabes um eine vertikale Axe durch den Schwerpunkt gegeben durch

$$m\frac{a^2}{3}\frac{d\theta}{dt} = Ja,$$

wo a die halbe Länge des Stabes ist. Dieses kann in der Form

$$ma\frac{d\theta}{dt} = 3J$$

geschrieben werden. Es ist daher die Geschwindigkeit des Stabendes A gleich $a\dot{\theta} + \dot{x}_c$ oder $4J/m$. Der Punkt in einer Entfernung $a + \frac{1}{3}a$ vom Ende A ist also in Ruhe, d. h. der Stab dreht sich um einen Punkt, der um zwei Drittel der Länge des Stabes von A entfernt ist. Dieser Punkt wird manchmal Stoßzentrum genannt.

Wir schließen hieraus, daß eine senkrecht in den Tisch gebohrte Nadel, wenn sie durch ein Loch im Stoßzentrum durch den Stab hindurchginge, keinen Impuls erfahren würde, was mit Leichtigkeit formal zu beweisen ist.

Der Stab möge sich frei um eine senkrechte Axe drehen, die in der Entfernung r vom Ende A, jenseits des Schwerpunktes, sich befindet; $P_1 P_2$ seien von der Axe aus erteilte horizontale Impulse, einer senkrecht zum Stabe, einer ihm entlang, während dem Ende A derselbe Impuls wie vorher erteilt wird. Dann lauten die Gleichungen für den Schwerpunkt:

$$m\frac{dx_c}{dt} = P_1 + J, \quad \frac{1}{3}ma^2\frac{d\theta}{dt} = Ja - P_1(r - a) \quad . \quad . \quad (71)$$

Es findet keine Bewegung des Stabes in seiner Längsrichtung statt;

der dem Stabe von der Axe aus infolge der plötzlichen Erzeugung der drehenden Bewegung erteilte Impuls ist

$$m\,(r-a)\int_0^{\tau}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 dt = P_2;$$

und da $\dot{\theta}^2$ immer endlich und τ unendlich klein ist, muß dieses Zeitintegral null sein. Folglich ist $P_2 = 0$.

Nun ist der Endwert von $\dot{\theta}$ gleich $\dot{x}_c/(r-a)$, so daß man für die zweite von Gl. (71) hat:

$$\frac{ma^2}{r-a}\,\frac{dx_c}{dt} = 3\,Ja - 3\,P_1\,(r-a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Wenn man $\dot{x}_c$ zwischen dieser Gleichung und der ersten von Gl. (71) eliminiert, so erhält man:

$$P_1 = -\frac{a\,(4\,a-3\,r)}{3\,(v-a)^2+a^2}\,J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

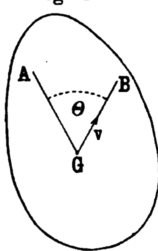
Wenn $r = 4\,a/3$ ist, so ist der Impuls P_1 gleich null, wie oben gesagt wurde.

Hieraus folgt, daß, wenn ein um eine Axe senkrecht zu seiner Länge, in einer Entfernung von zwei Dritteln seiner Länge von einem Ende sich drehender Stab plötzlich an eben diesem Ende auf ein Hindernis trifft, es keinen Impuls auf die Axe gibt. Oder anderseits, wenn ein um sein eines Ende sich drehender Stab in einer Entfernung von zwei Dritteln seiner Länge von diesem Ende auf ein Hindernis trifft, gibt es keinen Impuls in der Axe. Man kann sich leicht hiervon überzeugen, indem man das Ausbleiben des Schwirrens feststellt, wenn eine an einem Ende festgehaltene Eisenstange in ihrem Stoßzentrum auf einen Amboß aufgeschlagen wird.

Das Stoßzentrum kann für einen Körper von jeglicher Form durch eine der oben angedeuteten ähnliche Methode gefunden werden.

181. Weiteres Beispiel für den Impuls: auf glatter horizontaler Tafel sich bewegender Körper. Als ein anderes Beispiel sei eine dünne Scheibe von beliebiger Form betrachtet, die sich ohne Drehung auf einer glatten horizontalen Tafel bewegt, ihr Schwerpunkt sei G, und es werde ein Punkt A, Fig. 119, in der Entfernung x vom Schwerpunkt plötzlich festgehalten.

Fig. 119.



Der Punkt möge auf einer Linie des Körpers liegen, die mit seiner Bewegungsrichtung GB einen Winkel θ bildet. Die Geschwindigkeit des Punktes A ist v in der Richtung GB, und diese soll durch einen dem Punkte A in der entgegengesetzten Richtung erteilten Impuls P aufgehoben werden; letzterer aber, in Verbindung mit einem weiteren Impulse in der Richtung AG, hebt die Ge-

schwindigkeit von G längs GA auf. Wenn die Geschwindigkeit des Schwerpunktes gleich nach der Erteilung des Impulses v' ist, so hat man:

$$m\,(v \sin\theta - v') = P \sin\theta \quad \ldots\ldots \quad (74)$$

und für die augenblickliche Bewegung des Körpers um den Schwerpunkt G

$$m k^2 \frac{d\theta}{dt} = P x \sin\theta \quad \ldots\ldots \quad (75)$$

wo k^2 das Quadrat des Gyrationsradius des Körpers um eine vertikale Axe durch G und $\dot{\theta} = v'/x$ ist. Also verwandelt sich die vorige Gleichung unter Einsetzung des nach Gl. (74) gegebenen Wertes von P in

$$v' = \frac{x^2 \sin\theta}{k^2 + h^2}\, v \quad \ldots\ldots \quad (76)$$

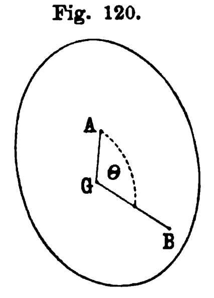
Also ist v' null für $\theta = 0$ oder $\theta = \pi$, und $vx^2/(k^2 + x^2)$ für $\theta = \pi/2$. Schließlich wird somit der Impuls:

$$P = \frac{mvk^2}{k^2 + x^2}.$$

In dem speziellen Falle einer sich in ihrer eigenen Ebene bewegenden gleichförmigen Scheibe vom Radius r muß man in den vorhergehenden Gleichungen $k^2 = \frac{1}{2} r^2$ setzen. In diesem Falle wird für $x = r$ und $\theta = \pi/2$, $v' = 2v/3$, d. h. die Geschwindigkeit des Scheibenzentrums wird auf zwei Drittel ihres früheren Wertes reduziert.

182. Weitere Beispiele für den Impuls. Wirkung des Freimachens und Festlegens von Rotationsaxen. Das folgende Beispiel ist besonders lehrreich. Es ist ein um eine Axe A rotierender Körper von beliebiger Form gegeben. Diese Axe wird plötzlich frei und eine parallele B wird fest: die Aufgabe ist, die Winkelgeschwindigkeit um die neue Axe zu finden. a, b seien die bezüglichen Entfernungen einer parallelen Axe durch den Schwerpunkt G von der ersten und zweiten Axe, θ sei der Winkel zwischen zwei vom Schwerpunkte nach den Axen gezogenen Senkrechten GA, GB (Fig. 120). Nach § 155 ist das Moment der Bewegungsgröße des um A rotierenden Körpers um den Raumpunkt B gleich $mk^2\omega + m\omega ab \cos\theta$, wo k der Gyrationsradius des Körpers um die Axe durch G ist; dieser kann durch den in B zum Zwecke des Festmachens dieser Axe erteilten Impuls nicht verändert werden. Wenn also ω' die neue Winkelgeschwindigkeit um B ist, so hat man:

Fig. 120.



$$m\,(k^2 + b^2)\,\omega' = m\,(k^2 + ab\cos\theta)\,\omega,$$

und folglich:

$$\omega' = \frac{k^2 + ab\cos\theta}{k^2 + b^2}\,\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Als spezieller Fall möge der Körper eine gleichförmige Scheibe vom Radius r mit ihrer Ebene senkrecht zu den Axen sein, dann ist:

$$\omega' = \frac{r^2 + 2ab\cos\theta}{(r^2 + 2b^2)}\,\omega.$$

Wenn ferner A im Mittelpunkte und B auf dem Rande der Scheibe ist, so ist $a = 0$, $\theta = 0$, $b = r$, so daß $\omega' = \frac{1}{3}\omega$ ist.

Das etwas schwierigere Problem, wo die Axen nicht parallel sind, kann in ähnlicher Weise behandelt werden.

183. Ein gegen die Schwere unterstützter Körper. Wirkung der Beseitigung einer Stütze. Es möge ferner ein gleichförmiger Balken in gleichen Entfernungen a vom Schwerpunkte an zwei senkrechten Seilen aufgehängt (oder durch zwei Stützen getragen) sein. Die auf den Balken durch jede Stütze wirkende Kraft ist $W/2$, wenn W das Gewicht des Balkens ist. Jetzt wird eine von den Stützen entfernt, und es soll die Anfangsbeschleunigung des Balkens und die jetzt von der übrig bleibenden Stütze ausgehende Kraft bestimmt werden.

Die Beseitigung der Stütze ist offenbar äquivalent der plötzlichen Aufhebung der durch die Stütze nach oben gerichteten Kraft $W/2$. So erhält man für die plötzliche Bewegung des Schwerpunktes unmittelbar nach der Entfernung der einen Stütze, wenn man m für die Masse des Balkens, F für die durch die verbleibende Stütze erteilte Kraft und $\ddot{x}$ für die Schwerpunktsbeschleunigung nach unten setzt:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = W - F.$$

Für die Winkelbeschleunigung um eine horizontale Axe im Schwerpunkte ergibt sich

$$mk^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = Fa.$$

Nun ist aber offenbar $\ddot{\theta} = \ddot{x}/a$, und folglich findet sich nach der ersten Gleichung:

$$F = \frac{k^2}{a^2 + k^2}\,W.$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{a^2}{a^2 + k^2}\,\frac{W}{m} = \frac{a^2}{a^2 + k^2}\,g$$

(g die Beschleunigung durch die Schwere), und die Bewegung ist somit bestimmt.

Ist die Länge des Balkens groß in Vergleich mit jeder der Querdimensionen, so ist $k^2 = \frac{1}{3}a^2$ und $F = \frac{1}{4}W$.

184. Kraft eines Strahles von Teilchen. Wenn ein Körper von einem Strome von Teilchen getroffen wird, so erfährt er eine Kraft, die durch den Änderungsgrad der Bewegungsgröße der Teilchen gemessen wird. Wenn also die mittlere Masse des Teilchens m ist und seine Geschwindigkeit vor dem Zusammenstoße v und nach dem Zusammenstoße v' in derselben Richtung, so ist die von dem Teilchen erfahrene Änderung der Bewegungsgröße $m(v - v')$. Wenn N solche Teilchen in derselben Richtung in jeder Sekunde den Körper treffen, so ist die von dem Körper erlittene mittlere Kraft $Nm\,(v - v')$.

Wenn z. B. jedes Teilchen seine Geschwindigkeit von v in $-v$ umkehrt, wenn also die Teilchen mit der Geschwindigkeit, mit der sie sich dem Körper nähern, zurückprallen, ist die Kraft von dem Betrage $2\,Nmv$.

Wenn sich die den Körper treffenden Teilchen über ein Flächenstück S von der Oberfläche des Körpers senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung verteilen, so wird die pro Flächeneinheit auf die Oberfläche ausgeübte mittlere Kraft gleich $Nm\,(v - v')/S$ sein. Diese Größe heißt der auf die Oberfläche ausgeübte mittlere Druck. Der von einem Gas auf die Wände des enthaltenden Gefäßes ausgeübte Druck wird in der sogenannten kinetischen Gastheorie auf diese Weise erklärt.

Ferner denken wir uns einen Körper, z. B. einen Rollwagen auf Schienen, der ein Gefäß mit Wasser trägt, und denken wir uns das Wasser in einem horizontalen Strahl aus dem einen Ende des Wagens austretend. Wenn a die wirkliche Fläche der Öffnung und v die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers, also die Geschwindigkeit relativ zur Öffnung ist, so ist das in einer Sekunde austretende Volumen Wasser av und seine Masse ist $\varrho a v$, wo ϱ die Dichte des Wassers ist. Welches auch immer die Geschwindigkeit des Wassers relativ zur Fahrgeschwindigkeit sein möge, die aus dem Wagen verlorene und auf das ausströmende Wasser übertragene Bewegungsgröße ist in der Zeiteinheit $\varrho a v^2$. Dieses ist die von dem Inhalt des Gefäßes und folglich von dem Wagen auf das austretende Wasser ausgeübte Kraft und zugleich das Maß der in der umgekehrten Richtung von dem Strahl auf den Wagen ausgeübten Kraft.

Folglich ist, selbst wenn der Wagen in Ruhe ist, die Kraft immer noch $\varrho a v^2$.

Es kann ferner ein Rad durch einen darauf treffenden Strahl getrieben werden. Denken wir uns ein Rad, das sich um eine horizontale Axe drehen kann, und auf das ein horizontaler Strahl von Teilchen (etwa die Kugeln eines schnell arbeitenden Magazingewehrs) in der Ebene des Rades und in der Entfernung h von der Axe trifft. Wenn m die Masse des Teilchens, v seine Geschwindigkeit und N die pro Sekunde von dem Rade empfangene Anzahl ist, so ist das pro Sekunde von dem Rade absorbierte Moment der Bewegungsgröße, wenn die Geschwindigkeiten der Teilchen beim Aufprall gerade null werden, $Nmvh$,

und das ist das Moment der die Bewegung des Rades beschleunigenden Kraft um die Axe. Die Kraft auf die Lager ist Nmv.

Kräfte von der hier angedeuteten Art werden im Zusammenhange mit ihren Anwendungen ausführlicher behandelt werden.

185. Dimensionen der Bewegungsgröße, der Kraft und des Impulses. Da die Bewegungsgröße das Produkt der Masse in die Geschwindigkeit ist, so ist die Einheit der Bewegungsgröße die der mit der Einheit der Geschwindigkeit sich bewegenden Masseneinheit; folglich können wir für eine gegebene Bewegungsgröße die Gleichung

$$\text{Bewegungsgröße} = mv \; [LMT^{-1}]$$

hinschreiben, wo m die Anzahl der im Körper enthaltenen Masseneinheiten, v die Anzahl der Geschwindigkeitseinheiten, L die Längeneinheit, M die Masseneinheit und T die Zeiteinheit ist. Wenn wir zu anderen Einheiten, L', M', T', übergehen, derart, daß $L = \lambda L'$, $M = \mu M'$, $T = \tau T'$ wird, so kann die Gleichung in der Form

$$\text{Bewegungsgröße} = mv\lambda\mu\tau^{-1} \; [L'M'T'^{-1}]$$

geschrieben werden, wo $\lambda\mu\tau^{-1}$ das Änderungsverhältnis ist.

Da die Kraft der Änderungsgrad der Bewegungsgröße ist, so ist die Krafteinheit diejenige, welche der Masseneinheit die Einheit der Beschleunigung erteilt, so daß die Krafteinheit mit $[LMT^{-2}]$ bezeichnet werden kann; also können wir die Gleichung für eine gegebene Kraft vom Zahlenwert F in der Form

$$\text{Kraft} = F \; [LMT^{-2}]$$

schreiben. Gehen wir wie oben zu anderen Einheiten L', M', T' über, so haben wir:

$$\text{Kraft} = F\lambda\mu\tau^{-2} \; [L'M'T'^{-2}],$$

wo $\lambda\mu\tau^{-2}$ das Änderungsverhältnis ist.

Ein Impuls ist das Zeitintegral einer Kraft und muß deshalb durch das Produkt einer Kraft in eine Zeit darstellbar sein; seine Dimensionsformel ist daher mit derjenigen der Bewegungsgröße identisch.

Viertes Kapitel.

Arbeit und Energie.

186. Definition und Maß der Arbeit. Wir wollen nun die sogenannte Arbeit betrachten, die von einer Kraft bei einer Verrückung eines Systems geleistet wird. Ist ds die Verrückung eines Teilchens, in welchem die Kraft K angreift, und ist θ (Fig. 121) der Winkel zwischen beiden, so heißt das Produkt $K \cos\theta . ds$ die von der Kraft bei der Verrückung geleistete Arbeit. Die Arbeit ist also das Produkt der Kraft in die in ihre Richtung fallende Verrückungskomponente.

Fig. 121.

Ist $\theta < \pi/2$, so fällt die Verrückungskomponente $ds \cos\theta$ in die Kraftrichtung, und die von der Kraft geleistete Arbeit ist positiv. Ist hingegen $\theta > \pi/2$, so fällt jene Komponente in die der Kraft entgegengesetzte Richtung, man hat alsdann:

$$-K \cos\theta \cdot ds = K \cos(\pi - \theta)\, ds,$$

jede dieser beiden Größen ist positiv, und es wird hier von anderen Kräften des Systems Arbeit in Bezug auf die Kraft K, also ihr entgegen, geleistet. Arbeit, die eine Kraft leistet, wird positiv, Arbeit, die gegen sie geleistet wird, negativ (von ihrem Standpunkte aus) gerechnet.

Es bewege sich z. B. ein Teilchen längs einer gegen den Horizont um θ geneigten Bahn abwärts, und es sei G die auf das Teilchen senkrecht nach unten wirkende Schwere, dann ist die von der Kraft G bei der Verrückung s geleistete Arbeit $G . s . \sin\theta$. Es sei bemerkt, daß dies nicht die ganze in Bezug auf das Teilchen geleistete Arbeit zu sein braucht; es können ja noch andere Kräfte auf es wirken, und diese sind nach der nämlichen Regel zu bestimmen.

187. Arbeit einer veränderlichen Kraft bei einer endlichen Verrückung. Wenn eine veränderliche Kraft auf einen Körper derart

wirkt, daß sich ihr Angriffspunkt längs einer Bahn bewegt, so muß man sich, um die ganze von der Kraft geleistete Arbeit zu ermitteln, die Bahn in unendlich kleine Elemente ds_1, ds_2 ..., ds_n zerlegt denken, für jedes dieser Elemente den Mittelwert der Kraft F_1, F_2 ..., F_n finden und schließlich, wenn θ_1, θ_2 ..., θ_n die Winkel zwischen den einzelnen Elementen und den entsprechenden Kräften sind, die Summe

$$K_1 \cos\theta_1 . ds_1 + K_2 \cos\theta_2 . ds_2 + \cdots + K_n \cos\theta_n . ds_n$$

berechnen. Diese Summe heißt das **Raumintegral der Kraft** und wird gewöhnlich in der Form $\int K \cos\theta\, ds$ geschrieben. Die geleistete Arbeit ist also:

$$A = \int K \cos\theta\, ds,$$

und hierin ist das Raumintegral über die ganze Verrückungsbahn zu erstrecken.

Arbeit ist also das Streckenintegral einer Kraft; stellt man die einzelnen Strecken ds auf der Abszissenaxe, die in die Bewegungsrichtung fallenden Kraftkomponenten $K \cos\theta$ als Ordinaten dar, so erhält man in der Fläche $OABCO$ ein anschauliches Bild der Arbeit (Fig. 122). Handelt es sich insbesondere um eine geschlossene Bahn (Fig. 123) $CDBEC$, so heben sich die beiden, einmal positiv und einmal negativ überstrichenen Flächen $OABDCO$ weg, und die Arbeit wird durch die von der Bahnkurve eingeschlossene Fläche $CEBDC$ dargestellt.

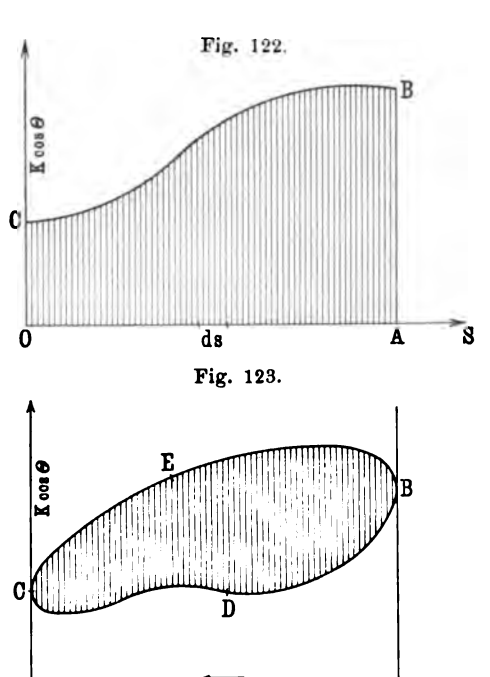


Fig. 122.

Fig. 123.

Dagegen ist das **Zeitintegral** der Kraft oder, wie man auch zuweilen sagt, der „Antrieb" der Kraft, identisch mit dem, was wir bisher als **Bewegungsgröße** bezeichnet haben. Wir haben oben (178) das Zeitintegral einer Impulsivkraft betrachtet und gesehen, daß wir, ohne

vielleicht irgend etwas über das Gesetz der Veränderlichkeit der Impulsivkraft zu wissen, doch aus der erzeugten Bewegungsgröße die Größe des Impulses berechnen können. Auch eine Impulsivkraft leistet, wie wir jetzt sehen und bald noch näher betrachten werden, Arbeit, welche durch ein Streckenintegral dargestellt werden kann.

Mit dem Worte „Arbeit“ wird der Ausdruck „Energie“ zuweilen gleichbedeutend genommen. Strenger ist Energie der Arbeitsvorrat, aus dem die jeweils zu leistende Arbeit geschöpft wird und dem die anderweitig gelieferte Arbeit zufließt. Spezieller wird hiervon, insbesondere von der kinetischen und potentiellen Energie, später die Rede sein.

188. Arbeit in der Zeiteinheit oder Effekt (Arbeitsstärke, Leistung). Ist v die Geschwindigkeit des Punktes, an dem die Kraft K angreift, in irgend einem Bahnelemente ds und dt die zu dessen Zurücklegung gebrauchte Zeit, so ist $ds = v dt$, und die Arbeit wird

$$A = \int K v \cos\theta \, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wobei die Integration über die ganze Dauer der Bewegung zu erstrecken ist; aus dem Streckenintegral ist also ein Zeitintegral geworden; die dabei zu integrierende Größe $K v \cos\theta$ kann dabei entweder als Produkt der Kraft und der in ihre Richtung fallenden Geschwindigkeitskomponente oder als Produkt der Geschwindigkeit und der in ihre Richtung fallenden Kraftkomponente aufgefaßt werden. Diese Größe heißt die Arbeitsstärke oder Leistungsfähigkeit, gewöhnlich aber der Effekt der Kraft K.

189. Arbeitseinheit. Um die Arbeitseinheit zu erhalten, muß man entweder die Einheit der Kraft und die Einheit der in ihre Richtung fallenden Verrückungskomponente oder, allgemeiner, solche Werte von K und $ds \cos\theta$ (oder von $K \cos$ und ds) nehmen, daß ihr Produkt 1 ist. Ist die Krafteinheit die Dyne, die Streckeneinheit das Zentimeter, so ist die Arbeitseinheit die von einer Dyne bei der Verschiebung um 1 *cm* in ihrer Richtung geleistete Arbeit. Diese Arbeitseinheit heißt Erg. Wird dagegen als Krafteinheit das Gewicht eines Grammes (und als Streckeneinheit wieder 1 *cm*) gewählt, so ist die Arbeit g Ergs (wo g die im Grammgewicht enthaltene Dynenzahl, also rund 981 ist, während es in weiterer Annäherung von dem Orte abhängt, an dem die Kraft gemessen wird); diese Arbeit heißt ein Zentimetergramm. Nimmt man endlich als Krafteinheit das Gewicht eines Kilogrammstückes und als Streckeneinheit das Meter, so erhält man das Meterkilogramm (*mkg*); es enthält offenbar genau 100000 Zentimetergramm und folglich rund 98,1 Millionen Ergs, mit kleinen Abweichungen je nach dem Orte. Tausend Erg heißen ein Kiloerg, Millionen Erg ein Megaerg; anderseits heißt der tausendste Teil eines Erg ein Millierg, der millionte Teil ein Mikroerg.

190. Einheit des Effekts. Wenn in der Sekunde die Arbeitseinheit geleistet wird, so hat man die Einheit des Effekts. Nach dem obigen (§ 189) gibt es also folgende Einheiten des Effekts: 1 Erg pro Sekunde („Sekundenerg"), 1 Zentimetergramm pro Sekunde, 1 Meterkilogramm pro Sekunde. Für zahlreiche praktische Zwecke sind aber diese Einheiten zu klein, und es werden alsdann größere Einheiten benutzt. So war für Dampfmaschinen, Gasmaschinen und andere Motoren lange Zeit hindurch die übliche Effekteinheit, und ist es größtenteils noch heute, die Pferdekraft oder Pferdestärke (PS); sie ist gleich 75 mkg pro sec oder gleich 4500 mkg pro Minute, anderseits aber gleich 7 360 000 000 Sekundenergs. Gegenwärtig wird diese Einheit mehr und mehr durch eine andere verdrängt, welche ursprünglich nur für elektrische Zwecke aufgestellt worden war, nämlich das Watt, das gleich 10 000 000 Erg, also 10 Megaerg ist; da es immer noch einen relativ kleinen Effekt darstellt, bildet man das 100- bezw. 1000 fache und nennt es Hektowatt bezw. Kilowatt (Kw); letzteres stellt demnach 10 Milliarden Sekundenergs dar, und es ergeben sich die Beziehungen:

$$1\ PS = 0{,}736\ Kw;\quad 1\ Kw = 1{,}36\ PS.$$

Von der Effekteinheit kann man nunmehr durch Multiplikation mit der Sekundenzahl der Arbeitsdauer (bei gleichförmiger Leistung) wieder zur Arbeitseinheit übergehen und erhält damit die Begriffe: Pferdekraftsekunde, Wattsekunde, Kilowattsekunde — oder, wenn man noch mit 60 × 60 multipliziert, die größeren Einheiten: Pferdestunde, Wattstunde, Kilowattstunde[1]).

191. Unterschied zwischen Arbeit und Effekt. Der Leser möge auf den wesentlichen Unterschied zwischen Arbeit und Effekt sein Augenmerk richten, da diese Begriffe von Anfängern nicht selten durcheinander geworfen werden, indem sie z. B. eine Pferdekraft mit 75 mkg (statt mit 75 mkg pro sec) identifizieren oder das Watt als Energieeinheit (statt als Effekteinheit) betrachten. So kann man die Frage hören: „Wie viele voll geladene Akkumulatoren eines bestimmten Typs enthalten eine Pferdekraft?" Die Zellen enthalten doch, wenn sie geladen sind, so und so viel Energie, die man in Ergs oder Meterkilogramm oder irgend einer anderen Energie- oder Arbeitseinheit angeben kann; die Geschwindigkeit, mit der sie wirken, also der Effekt, ist dagegen abhängig von ihrer Anordnung, von der Anordnung des Stromkreises, in dem ihre Energie entwickelt wird, u. s. w., und je nach diesen Umständen kann eine einzelne Zelle viele Pferdekräfte oder nur einen kleinen Bruchteil einer einzigen liefern. Selbst ein Hertzscher Erzeuger, der durch einen mäßigen Induktor erregt wird, kann, indem

[1]) In England und Amerika ist noch vielfach als Arbeitseinheit das Fußpfund im Gebrauche; es ist gleich 0,138 mkg oder gleich 13,56 Millionen Erg. Eine (englische, mit der deutschen nicht genau übereinstimmende) Pferdekraft ist gleich 550 Fußpfund pro Sekunde.

er sich oszillierend entlädt und elektrische Wellen hervorruft, eine ganz kurze Zeit hindurch mit enormem Effekt arbeiten; die mittlere Leistungsstärke während der oszillierenden Entladung ist für einen solchen Erzeuger zu etwa 200 PS berechnet worden.

192. Dimensionsformeln der Arbeit und des Effekts. In bestimmt gewählten Einheiten für Länge, Masse und Zeit, nämlich L, M, T, sei ein bestimmter Arbeitsbetrag A zahlenmäßig durch a ausgedrückt; dann können wir (analog wie in 7, 124, 185) schreiben:

$$A = a(\text{Krafteinheit} \times \text{Längeneinheit})$$
$$= a\,[LMT^{-2} \times L] = A\,[L^2MT^{-2}].$$

Nun mögen statt der Einheiten LMT neue $L'M'T'$ eingeführt werden, die zu den alten in der Beziehung

$$L = \lambda L',\ M = \mu M',\ T = \tau T'$$

stehen; dann wird dieselbe Arbeit:

$$A = a\lambda^2\mu\tau^{-2}\,[L'^2M'T'^{-2}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Der numerische Wert der Arbeit ist jetzt $a\lambda^2\mu\tau^{-2}$, d. h. der frühere Wert multipliziert mit $\lambda^2\mu\tau^{-2}$, nämlich dem Faktor, den man erhält, wenn man in der Dimensionsformel $[L^2MT^{-2}]$ die Einheiten LMT durch ihre Verhältnisse zu den neuen ersetzt. Dieser Faktor ist das Umrechnungsverhältnis für Arbeit oder Energie. Man hätte auch die Verhältnisse der neuen zu den alten Einheiten einführen können und hätte dann den zu obigem reziproken Umrechnungsfaktor erhalten.

Ein Effekt wird zahlenmäßig durch das Verhältnis A/t angegeben, d. h. durch das Verhältnis der Arbeit zu der zu ihrer Leistung erforderlichen Zeit. Die Dimensionsformel des Effekts wird also:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{e}\,[L^2MT^{-3}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Geht man von den Einheiten $L\,M\,T$ zu neuen $L'\,M'\,T'$ über, für die wieder wie vorhin $(L, M, T) = [\lambda L', \mu M', \tau T')$ ist, so ist das Umrechnungsverhältnis $\lambda^2\mu\tau^{-3}$.

Als Zahlenbeispiel diene die Ermittelung des Ergs in einem *mkg*; hier ist $\lambda = 100$, $\mu = 9{,}81 \times 1000$, $\tau = 1$, also $\lambda^2\mu\tau^{-2} = 98{,}1$ Millionen (vergl. oben 189); analog für den Effekt.

193. Arbeitsleistung von Kräften, die von den Koordinaten abhängen. Es ist wünschenswert, daß wir hier einige Beispiele von Arbeitsleistungen unter verschiedenen Umständen betrachten. Zunächst wollen wir ein Teilchen unter der Wirkung von Kräften betrachten, deren Resultante K nur von der Lage, also von den Koordinaten des Teilchens in Bezug auf ein gegebenes Koordinatensystem abhängt. In irgend einem Bahnelemente ds ist die Arbeit $K\cos\theta\,ds$, wo θ der Winkel zwischen K und ds ist. Sind nun XYZ die Komponenten

von K, so sind X/K, Y/K, Z/K die Richtungskosinus von K; und wenn dx, dy, dz die Projektionen von ds auf die Koordinatenaxen sind, so sind dx/ds, dy/ds, dz/ds die Richtungskosinus von ds. Folglich ist nach § 24:

$$\cos\theta = \frac{X}{K}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{K}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{K}\frac{dz}{ds}$$

und somit:

$$K\cos\theta . ds = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Da ferner K eine Funktion der Koordinaten ist, so sind auch XYZ solche. Wir wollen nun annehmen, es seien Funktionen von solcher Beschaffenheit, daß die Integrale $\int Xdx$, $\int Ydy$, $\int Zdz$, ausgedehnt über irgend eine geschlossene Linie innerhalb des Kraftfeldes (d. h. des Raumgebietes, in welchem die Kraft vorhanden ist und Arbeit geleistet wird) null sind, daß also die in irgend einem Teile dieser geschlossenen Bahn geleistete Arbeit gleich und entgegengesetzt ist der in dem übrig bleibenden Teile geleisteten. Wenn die Arbeit von 1 nach 2 längs eines irgendwie gewählten Weges (Fig. 124) mit A_{12} bezeichnet wird, so ist:

Fig. 124.

$$A_{12} = \int_1^2 (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \quad . \quad . \quad (5)$$

und jedes der Integrale auf der rechten Seite kann nur von den Endpunkten 1 und 2 des Weges abhängen, muß also von dem Wege selbst unabhängig sein; denn jedes von ihnen muß genau gleich und entgegengesetzt sein dem entsprechenden Integral längs eines beliebigen Weges von 2 nach 1, der mit dem vorliegenden Wege von 1 nach 2 eine geschlossene Linie bildet. X ist der partielle Differentialquotient $\partial A/\partial x$, das heißt das Verhältnis, in dem sich A mit x ändert, während gleichzeitig y und z konstant bleiben, und Entsprechendes gilt für $Y = \partial A/\partial y$ und $Z = \partial A/\partial z$. Die in der Gl. (5) rechts in Klammern stehende Größe ist, wie man sagt, ein vollständiges Differential von A. Kräfte dieser Art heißen konservative Kräfte und werden in den folgenden Abschnitten und in anderen Teilen dieses Werkes ausführlich besprochen werden.

194. Unmöglichkeit eines „Perpetuum mobile". Der hier angedeutete Fall ist insofern von großer praktischer Bedeutung, als er die Unmöglichkeit eines „Perpetuum mobile" zeigt, d. h. einer selbsttätigen Maschine, die, ohne daß man ihr von außen Energie zuführte, unbegrenzt fortführe, Arbeit zu leisten. Denn eine derartige Maschine kann nur fortdauernd Arbeit leisten, indem sie lauter „Schleifen" beschreibt, d. h. indem sie cyklische Konfigurationsänderungen durch-

macht, derart, daß sie in Bezug auf die Körper, welche Kräfte auf ihre Teile ausüben und dadurch Arbeit auf sie leisten, immer und immer wieder in die nämliche relative Stellung zurückkehrt. Im Verlaufe einer vollständigen Schleife, oder, wie man sagt, eines Kreisprozesses, kann also die Maschine gegenüber äußeren Kräften nur gerade so viel Arbeit leisten, als die äußeren Kräfte ihr Arbeit zuführen, es kann im ganzen niemals Arbeit gewonnen werden. Im Gegenteil, es wird sogar stets, wie wir bald sehen werden, ein gewisser Betrag von Arbeit zur Überwindung von Reibungswiderständen verbraucht, und dieser Betrag muß geradeso gut wie die von der Maschine geleistete Nutzarbeit dadurch gewonnen werden, daß irgend ein anderes System durch einen partiellen Cyklus, durch eine ungeschlossene Reihe von Veränderungen, hindurchgeführt wird.

195. Arbeitsleistung durch Gravitationskräfte. Theorie des Potentials. Ein ausgezeichnetes Beispiel von Kräften, welche die Forderungen von § 193 erfüllen, liefert die Gravitation. Nach dem von Newton entdeckten Gravitationsgesetze wirkt jedes materielle Teilchen auf jedes andere mit einer Kraft, welche dem Produkte der Massen der Teilchen direkt, dem Quadrate ihres Abstandes voneinander umgekehrt proportional ist und die Richtung ihrer Verbindungslinie hat. Sind also m und m' die Massen zweier Teilchen und ist r ihr gegenseitiger Abstand, so wirkt zwischen ihnen eine wechselseitige Anziehungskraft von der Größe kmm'/r^2, wo k ein konstanter Faktor ist, der hinzugefügt werden muß, damit die Kraft in den absoluten Einheiten ausgedrückt sei; sind z. B. m und m' in Grammen und ist r in Zentimetern ausgedrückt, so wird die Kraft nach obiger Formel in Dynen ausgedrückt, falls k die Anziehungskraft in Dynen zwischen zwei Gramm-Massen in 1 cm Abstand voneinander bedeutet; so berechnet ist k ungefähr gleich 6.66×10^{-8} (vergl. 12. Kap.).

Die Vorstellung der Wirkung der beiden Teilchen aufeinander setzt ein Bezugskoordinatensystem voraus, und dieses muß natürlich von der Wirkung der Teilchen ganz unabhängig sein, es muß z. B. fest gegenüber den Fixsternen sein, von denen ja die Beobachtungen gezeigt haben, daß sie für praktische Zwecke der hier in Rede stehenden Art als fest im Raume angesehen werden können. Da ferner der Massenmittelpunkt eines Systems sich gegenseitig beeinflussender Teilchen durch diese Wechselwirkung nicht berührt wird, ist er ebenfalls oft geeignet, zum Nullpunkte des Koordinatensystems gewählt zu werden.

Nun wollen wir die Arbeit der Anziehungskraft betrachten, die sie leistet, während die Entfernung der Masse m von der Masse m' von r_2 auf r_1 herabgemindert wird. Ein positiver Wert von dr bedeute eine Zunahme des Abstandes, dann ist die Richtung der Anziehung die von $-dr$; wenn ferner eine Kraft, die eine Entfernung zu vergrößern strebt, positiv gerechnet wird, so ist die Anziehungskraft gleich

$-kmm'/r^2$; folglich ist die Arbeit bei der Verrückung $-dr$ gleich $+kmm'dr/r^2$, und die ganze von der Anziehungskraft geleistete Arbeit:

$$A = kmm' \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = kmm' \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Die Größe km'/r heißt das von der Masse m' in einem Punkte in der Entfernung r hervorgerufene Potential; entsprechende Bedeutung für die Masse m hat die Größe km/r. Die Potentialdifferenz $km(1/r_1 - 1/r_2)$ ist die Arbeit von m bei der Fortführung der Masseneinheit aus der Entfernung r_2 in die Entfernung r_1, und $kmm'(1/r_1 - 1/r_2)$ ist die entsprechende Arbeit bei der Fortführung der Masse m'. Denselben Wert hat endlich, wie dies auch der Natur der Anziehung als einer Wechselwirkung entspricht, die Arbeit von m' bei der Fortführung von m aus der Entfernung r_2 in die Entfernung r_1.

Für $r_2 = \infty$ wird $A = kmm'/r_1$, mit anderen Worten: Das Potential einer Masse m in einem um r_1 von ihr entfernten Punkte ist die Arbeit, welche die von m ausgehende Anziehungskraft leistet, wenn sie ein Teilchen mit der Einheit der Masse aus unendlicher Entfernung in die Entfernung r_1 schafft; oder auch die Arbeit, welche eine Gegenkraft leistet, wenn sie die Masseneinheit, entgegen der Anziehungskraft, aus der Lage r_1 in unendliche Entfernung fortschafft.

196. In einem Punkte durch ein System von Teilchen hervorgerufenes Potential. — Arbeitswerte von Teilchen in verschiedenen Lagen. Das in irgend einem Punkte P durch ein System von Teilchen hervorgerufene Potential ist die Summe der Potentiale, die jedes dieser Teilchen für sich in P hervorruft; denn die Anziehung, die ein Teilchen auf ein anderes ausübt, wird, wie Beobachtung und Experiment zeigen, durch die Anwesenheit anderer Teilchen nicht beeinflußt. Haben wir also n Teilchen von den Massen $m_1, m_2 \ldots, m_n$ in den Punkten $P_1, P_2 \ldots, P_n$, die von dem Punkte P um die Strecken $r_1, r_2 \ldots, r_n$ entfernt sind, so ist das Potential in P:

$$V = k\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \cdots\right) = k\Sigma\,\frac{m}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wo die Summe ein Glied m/r für jedes Teilchen enthält.

Hiernach ist die Arbeit, die von Anziehungskräften geleistet wird, wenn sie ein Teilchen von der Masse m aus unendlicher Entfernung von allen Teilchen des anziehenden Systems nach dem Punkte P führen, in welchem das Potential V ist, gleich mV. Wir wollen dies der Kürze halber bis auf weiteres den Arbeitsinhalt oder Arbeitswert des Teilchens in der Lage P nennen. Wenn P mit dem Orte P_1 eines der Teilchen

$m_1 \ldots, m_n$ zusammenfällt und das Teilchen mit der Masse m identisch ist mit dem dort vorhandenen Teilchen m_1, wenn ferner V_1 das Potential von $m_2 \ldots, m_n$ in P_1 und $r_{12}, r_{13} \ldots, r_{1n}$ die Abstände zwischen P_1 und P_2, $P_3 \ldots, P_n$ bedeuten, so ist der Arbeitswert von m_1 in der Lage P_1:

$$m_1 V_1 = k m_1 \left(\frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \cdots \frac{m_n}{r_n} \right) = k m_1 \Sigma \frac{m_k}{r_{1k}} \quad \ldots \quad (8)$$

wo die Summe über alle Werte von k von 2 bis n zu nehmen ist. Entsprechend ist der Arbeitswert von m_2 in der Lage $P_2 = k m_2 \Sigma m_k / r_{2k}$, wo die Summe über alle Werte von k von 1 bis n, ausgenommen 2, zu erstrecken ist — und so fort für den Arbeitswert der übrigen Teilchen.

197. Potentielle Energie eines Systems gravitierender Teilchen. Wird der Abstand des Teilchens im Punkte P_j von dem Teilchen im Punkte P_k mit r_{jk} bezeichnet, so ist der gesamte Arbeitswert, $-E$, der Teilchen des Systems, berechnet als die Summe der Arbeitswerte der einzelnen Teilchen, gegeben durch den Ausdruck:

$$-E = \frac{k}{2} \Sigma \Sigma \frac{m_j m_k}{r_{jk}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

wo sich die eine Summe über alle Werte von j von 1 bis n, die andere über alle Werte von k von 1 bis n erstreckt; der Faktor $1/2$ ist notwendig, weil jedes Glied des Arbeitswertes in der Summe zweimal vorkommt.

Dieser Arbeitswert hängt lediglich von der gegenseitigen Lage der Teilchen ab, er ist also gänzlich unabhängig von den Wegen oder Prozessen, auf denen bezw. durch welche die Teilchen vermöge ihrer Anziehung aneinander gebracht werden.

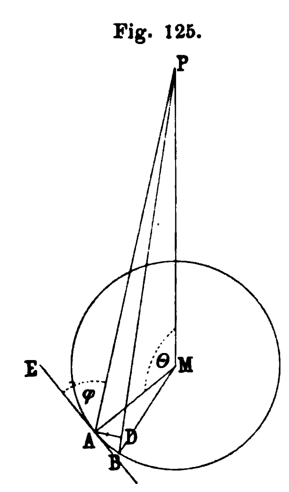
Wir werden später sehen, daß das, was wir hier die Arbeitswerte der Teilchen genannt haben, Bestandteile des Verbrauchs von konfigurativer oder potentieller Energie des Systems der Teilchen sind. Die potentielle Energie ist, mit umgekehrtem Zeichen, die Summe der Arbeitswerte der einzelnen Teilchen, wozu noch eine willkürliche Konstante gefügt werden darf, also $E + C$.

198. Potential einer homogenen Kugelschale. Wir wollen nun zeigen, daß für ein System von Massenpunkten, die eine dünne Kugelschale mit gleichförmiger Massenbelegung pro Flächeneinheit bilden, das Potential der Schale in einem äußeren Punkte genau gleich dem Potential ist, das ein einziger Massenpunkt, von der Masse der Schale und gelegen in ihrem Mittelpunkte, in dem nämlichen äußeren Punkte erzeugt. Dieser äußere Punkt sei P, Fig. 125 (a. f. S.), M sei der Mittelpunkt der Schale, A und B seien zwei benachbarte Punkte

auf ihr in einer durch P und M gelegten Ebene; ψ sei der Winkel, den die in A an den Schnitt durch die Schale gelegte Tangente AE mit dem Strahle AP bildet, θ dagegen der Winkel, den der Radius AM mit dem Strahl PM nach dem Mittelpunkte bildet; AD stehe auf PA senkrecht; endlich sei der Radius gleich a, PA gleich r und PM gleich l. Dann hat man die Beziehungen:

$$PB = r + dr,\ DB = dr,\ AMB = d\theta,\ AB = Ad\theta.$$

Fig. 125.



Anderseits ist

$$\sin PAM = \cos\varphi = \frac{BD}{AB} = \frac{dr}{ad\theta}$$

und

$$\sin PAM : \sin\theta = l : r;$$

folglich ergibt sich:

$$rdr = al\sin\theta d\theta.$$

Nun sei μ die Masse der Schale für die Oberflächeneinheit; dann ist die Masse der von AB bei vollständiger Umdrehung um PM ausgeschnittenen Zone gleich

$$\mu a d\theta \times 2\pi a\sin\theta = 2\pi\mu a^2\sin\theta d\theta$$
$$= 2\pi\mu a r dr/l,$$

und die Entfernung aller ihrer Punkte von P ist r; es ist also ihr Potential auf P gleich $2\pi k\mu a dr/l$, und folglich das der ganzen Schale:

$$V = \frac{2\pi k\mu a}{l}\int dr,$$

oder, da das Integral gleich der Differenz des größten und kleinsten Wertes von r, also gleich $2a$ ist:

$$V = \frac{4\pi k\mu a^2}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Da $4\pi\mu a^2$ die Masse der Schale ist, ist der behauptete Satz bewiesen.

199. Potential einer Vollkugel. Da unser Ergebnis für jede homogene kugelige Schicht einer Vollkugel gilt, so gilt es auch für die ganze Kugel. Eine Vollkugel von gleichförmiger oder nur mit der Entfernung vom Mittelpunkte variierender Dichte (so daß also in allen Punkten, die vom Mittelpunkte gleichen Abstand haben, die Dichte die nämliche ist) erzeugt also in einem äußeren Punkte P dasselbe Potential, wie eine in ihrem Mittelpunkte konzentriert gedachte, ihrer eigenen gleiche Masse.

200. Arbeit von Anziehungskräften bei der Kondensation eines Nebels. Betrachten wir eine Kugel von gleichförmiger Dichte ϱ

und vom Radius r; dann ist das Potential auf einen äußeren Punkt im Abstand $c + r$ vom Mittelpunkt

$$\frac{4}{3}\pi \varrho k r^3 / (c + r),$$

und das auf einen Punkt der Kugeloberfläche selbst

$$\frac{4}{3}\pi \varrho k r^2.$$

Die Arbeit, welche die Anziehungskräfte leisten, indem sie der Kugel eine aus der Unendlichkeit geholte Schicht von der Dicke dr anlagern, ist daher

$$\frac{4}{3}\pi \varrho k r^2 \times 4\pi \varrho r^2 dr = \frac{16}{3} k \pi^2 \varrho^2 r^4 dr.$$

Für die ganze Arbeit beim Aufbau einer Kugel vom Radius a und der Dichte ϱ, aus Materie, die von der Unendlichkeit herbeigeschafft wird, haben wir demgemäß:

$$A = \frac{16}{3} k \pi^2 \varrho^2 \int_0^a r^4 dr = \frac{16}{15} k \pi^2 \varrho^2 a^5$$

oder, wenn M die Masse der Kugel ist:

$$A = \frac{3}{5} k \frac{M^2}{a} \quad \text{. . . . . (11)}$$

Es ist ferner beachtenswert, daß die Arbeit, welche die Anziehungskräfte leisten, indem sie die Oberfläche obiger Kugel um da nach innen drücken,

$$dA = \frac{3}{5} k \frac{M^2}{a^2} da \quad \text{. . . . . (12)}$$

und folglich die Arbeit bei der Zusammenziehung der Oberfläche vom Radius a bis zum Radius a'

$$A' - A = \frac{3}{5} k M^2 \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a}\right) \quad \text{. . . . . (13)}$$

ist.

Der Berechnung des Arbeitswertes in Gl. (11) liegt die Annahme zu Grunde, daß die gesamte Materie aus der Unendlichkeit zu der Oberfläche der wachsenden Kugel gelangt; es ist aber nicht schwer einzusehen, daß dies zugleich die Arbeit ist, welche die gegenseitige Anziehung der Teilchen leistet, wenn sie sich aus dem Zustande gleichförmiger Zerstreuung über den unendlichen Raum einander bis zur Bildung einer Kugel vom Radius a nähern. Denn angenommen, Materie vom Betrage M werde in der angedeuteten Weise aus der Unendlichkeit zum Aufbau der Kugel vom Radius a herbeigeholt, und in einem anderen Falle soll dieselbe Menge zum Aufbau einer Kugel vom größeren

Radius b dienen; die betreffenden Arbeitswerte sind bezw. $\frac{3}{5}kM^2/a$ und $\frac{3}{5}kM^2/b$, und nach § 197 hängen sie nur von der endgültigen Konfiguration der Teilchen ab, nicht aber von der Art, in der sie zusammengebracht wurden. Die Differenz $\frac{3}{5}kM^2(1/a - 1/b)$ stellt also die Arbeit bei der Kompression der Masse M vom Radius b bis zum Radius a dar, und für unendliches b wird dies eben $\frac{3}{5}kM^2/a$. Damit ist aber das Behauptete bewiesen.

201. Arbeit bei der Kondensation der Erde aus nebelförmiger Materie; Betrag der dabei erzeugten Wärme. Das gewonnene Resultat wollen wir auf den Fall anwenden, daß unsere Erde aus unendlich kleinen Teilchen aufgebaut sei, die durch ihre gegenseitige Anziehung aus dem Zustande unendlicher Zerstreuung einander nahe gebracht worden seien. Der Radius a ist in diesem Falle $6{,}367 \times 10^8$ cm, ϱ ist gleich 5,52 und k muß, um A in Ergs zu erhalten, gleich $6{,}68 \times 10^{-8}$ genommen werden; man hat also

$$A = \frac{3}{5} \cdot 6{,}68 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{16}{9}\pi^2 \cdot 5{,}52^2 \cdot 6{,}367^5 \cdot 10^{40} \quad . \quad . \quad (14)$$

und ausgerechnet

$$A = 2.242 \times 10^{39}.$$

Indessen ist dies nur ein unterer Grenzwert, da die Dichte der Erde von der Oberfläche nach innen wächst und deshalb die Masse im ganzen näher am Mittelpunkte liegt als in dem hier betrachteten Falle; der wahre Wert von A für die Erde ist daher noch wesentlich größer.

Wie wir später sehen werden, wird die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um 1 g Wasser von einer bestimmten Temperatur der Celsiusskala auf eine um einen Grad dieser Skala höhere Temperatur zu erwärmen, als Wärmeeinheit betrachtet und Kalorie genannt; 42×10^6 Ergs Arbeit müssen aufgewandt werden, um eine solche Kalorie zu erzeugen. Der obige Arbeitsbetrag würde hiernach 5.34×10^{31} Kalorien erzeugen. Um sich von dieser Größe eine Vorstellung zu machen, beachte man, daß 1 g Anthrazitkohle bei seiner Verbrennung rund 8000 Kalorien erzeugt; die obige Wärme ist also gleich der, welche bei der Verbrennung von 6.7×10^{27} g oder von 6.7×10^{21} Tonnen solcher Kohle entsteht. Oder, auf den Verdichtungsprozeß der Erde selbst angewandt (ohne daß es sich indessen hier um eine den wirklich stattgehabten Vorgängen entsprechende Vorstellung handelte): Wenn jene Arbeit ausschließlich zur Erhitzung der sich verdichtenden Teilchen verwandt worden wäre, so würde sich, da die Erde eine Masse von rund 6×10^{27} g hat und unter den jetzigen Verhältnissen etwa nur den fünften Teil soviel Wärme wie Wasser braucht, um sich um ein Grad zu erwärmen, die Temperatur um rund 50000° erhöht haben.

202. Arbeit bei der Verdichtung der Sonne aus Nebelmassen; Quelle der strahlenden Wärme der Sonne. Die Masse der Sonne

ist etwa 332000 mal so groß wie die der Erde, und ihr Radius ist 110 mal so groß wie der Erdradius. Folglich ist A, entstanden gedacht durch die Sammlung völlig zerstreuter Materie, für die Sonne $332000^2/110$, d. h. 10^9 mal so groß wie für die Erde, also gleich $2{,}24 \times 10^{48}$ Ergs. Somit ist die bei der Bildung eines der jetzigen Sonne an Radius und mittlerer Dichte gleichen Körpers erzeugte Wärme ungefähr gleich $5{,}35 \times 10^{40}$ Kalorien oder gleich der bei der Verbrennung von $6{,}7 \times 10^{30}$ Tonnen Kohle erzeugten.

Der Betrag an strahlender Wärme, den 1 qcm Oberfläche, direkt in die Sonnenstrahlen gehalten, und zwar im Abstande von der Sonne gleich dem der Erde (bei Ausschluß atmosphärischer Einflüsse), in einer Minute empfangen würde, ist auf etwa 3 Kalorien zu schätzen, für die Sekunde also auf 0,05 Kalorien. Die von der Sonne in einer Sekunde ausgestrahlte Wärme findet sich wieder auf einer Kugel vom Radius des Abstandes der Erde von der Sonne; dieser Abstand ist etwa gleich 110^2 Erddurchmessern, und folglich die Oberfläche der eben gedachten Kugel rund gleich $4\pi \times 4 \times 110^4 \times 6{,}367^2 \times 10^{16}$ qcm. Die Gesamtzahl N der von der Sonne in 1 sec ausgestrahlten Kalorien ist daher $0{,}05 \times 4\pi \times 4 \times 110^4 \times 6{,}367^2 \times 10^{16}$, und der hiervon von 1 qcm der Sonnenoberfläche herrührende Teil n ergibt sich durch Division mit $4\pi \times 110^2 \times 6{,}367^2 \times 10^{16}$.

Somit ist annähernd:

$$N = 1{,}5 \times 10^{26}, \qquad n = 2420.$$

Um diese Wärme zu erzeugen bezw. zu ersetzen, müßten 135000 Pferdekräfte pro Quadratmeter der Sonnenoberfläche tätig sein, oder es müßte stündlich auf jedem Quadratzentimeter 1 kg, also auf jedem Quadratmeter 10 Tonnen der besten Kohle verbrannt werden.

Die gegenwärtig herrschende, im wesentlichen von v. Helmholtz herrührende Ansicht über die Quelle dieses Wärmeersatzes ist die, daß er von der Kontraktion der Sonne stammt. Sieht man von Temperaturänderungen bei der Kontraktion ab, so muß man, um zum Ersatz der ausgestrahlten Wärme zu gelangen, eine Verkürzung des Sonnenradius um etwa $1/_{5000}$ cm in der Sekunde, also um etwa 17 cm täglich oder 62 m jährlich annehmen. Diese Schätzung ist aber zu groß, da die Sonne nicht homogen, ihre Dichte vielmehr in den inneren Teilen zweifellos sehr viel größer als an der Oberfläche ist. Die hiernach anzunehmende radiale Kontraktion ist nach v. Helmholtz etwa 40 m.

Die Sonne ist jedenfalls zum Teil gasförmig, und es ist bekannt, daß eine sich abkühlende und gleichzeitig zusammenziehende Gasmasse eine höhere Temperatur annimmt, eine Tatsache, die wir in der Wärmelehre näher prüfen werden. Indessen kommt das hier nicht in Betracht, da die Sonne wahrscheinlich sehr nahezu die Bedingung konstanter Temperatur erfüllt.

203. Arbeit bei dem Stoß eines Strahles von Teilchen: Reaktionswasserrad. Nehmen wir den Strahl, der aus einem Trog auf einem Karren herauskommt, wie oben § 184 beschrieben wurde. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Raume sei v und die des Wagens sei u in der entgegengesetzten Richtung. Die in der Sekunde ausströmende Flüssigkeitsmenge ist daher $a(v+u)\varrho$, wo ϱ die Dichte der Flüssigkeit und a der Querschnitt des Strahles ist. Die Bewegungsgröße ist folglich $a\varrho(v+u)^2$; dies ist die auf den Wagen ausgeübte Kraft. Der Strahl leistet auf den Wagen Arbeit von einer Größe $A = Ku$, wo K die Kraft ist, mithin die Arbeit:

$$A = a\varrho(u+v)^2 u \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Ein extremes Beispiel hierfür erhält man, indem man $u = 0$ setzt, wo der Wert null wird.

Betrachten wir ferner ein einfaches Reaktionswasserrad wie das in Fig. 126; es werde durch Wasser getrieben, welches als anfänglich in Ruhe und in der Höhe h über den Mündungen gedacht werden möge. Es sei v die Geschwindigkeit des Wassers, ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades, r sein Radius, a der Querschnitt jedes Strahles; das Wasser möge tangential zu dem Kreise, in dem sich die Mündungen bewegen, ausströmen; wir haben als die Wassermenge, die aus einer von ihnen pro Sekunde ausströmt, $a\varrho(\omega r + v)$. Die dem Wasser in einer Sekunde erteilte Bewegungsgröße ist $a\varrho(\omega r + v)v$, und das Moment dieser Kraft um die Axe herum ist $a\varrho(\omega r + v)vr$. Das Gesamtmoment für drei Strahlen ist $3a\varrho(\omega r + v)vr$, und dieses ist das auf Vergrößerung der Winkelgeschwindigkeit des Rades abzielende Kräftepaar. Wir haben somit für den Effekt:

Fig. 126.



$$\mathfrak{E} = 3a\varrho(\omega r + v)v\omega r \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Ferner ist die kinetische Energie des ausströmenden Wassers pro sec gleich $\frac{1}{2}\,3a\varrho(\omega r + v)v^2$, und dies, zusammen mit $\mathfrak{E}$, stellt den gesamten Energieverlust pro sec, also $3a\varrho(\omega r + v)gh$, dar. Somit hat man die Gleichung:

$$2v\omega r + v^2 = 2gh,$$

und als Wirkungsgsgrad, d. h. als Verhältnis der wirklich geleisteten Arbeit zur ganzen aufgewandten Energie ergibt sich:

$$w = \frac{v\omega r}{gh} = \frac{2gh - v^2}{2gh}.$$

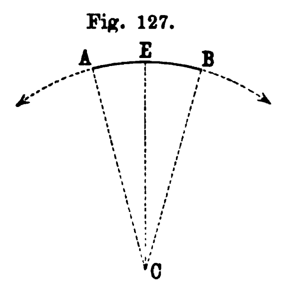
Der Wirkungsgrad wird somit 1, wenn $v = 0$ wird, wobei dann aber zugleich $\omega = \infty$ werden muß.

204. Arbeit beim Strecken eines kontraktilen Häutchens. Als ein weiteres Beispiel wollen wir die Arbeit betrachten, die bei der Vergrößerung der Oberfläche eines kontraktilen Häutchens, ähnlich dem, wie man es auf der Oberfläche einer Flüssigkeit als vorhanden ansehen kann, geleistet wird. Das Häutchen sucht sich zu kontrahieren; und um irgend einen schmalen Streifen desselben gestreckt zu erhalten, muß man auf seinen Teil zu beiden Seiten eines Schnittes senkrecht zur Längsrichtung des Streifens eine Zugkraft vom Betrage Tb wirken lassen, wo b die Breite des Streifens und T eine Konstante ist, welche die Oberflächenspannung des Häutchens heißt und z. B. für eine Wasseroberfläche von 10° C. etwa 75 Dynen pro Zentimeter beträgt. In dem Falle einer Blase liefern die Spannungen der beiden Oberflächen eine effektive Spannung gleich $2\,T$ für das Häutchen. Es zeigt sich, daß sie von der Dicke des Häutchens unabhängig ist, ausgenommen wenn dasselbe äußerst dünn gemacht wird.

Nun wollen wir ein ebenes Häutchen von der Breite b und der Länge l betrachten und letztere in l' verwandeln, indem wir das Häutchen der Länge nach ziehen; die entsprechende Kraft ist dann $2\,Tb$, also die Arbeit $2\,Tb\,(l' - l)$, d. h. gleich $2\,T$ mal der Vergrößerung der Oberfläche. (Wie wir in der Thermodynamik sehen werden, sucht sich das Häutchen beim Strecken abzukühlen; wenn indessen die Dehnung langsam vor sich geht, wird die Temperatur durch die aus der Umgebung herbeiströmende Wärme konstant erhalten.)

205. Von einem krummen Häutchen ausgeübte Normalkraft. Ein kontraktiles Häutchen von beliebiger Form übt in jedem Punkte seiner Oberfläche eine Kraft aus längs der Hauptnormalen, d. h. längs dem Lot auf der die Oberfläche in diesem Punkte berührenden Ebene. Betrachten wir zunächst ein zylindrisches Häutchen, das mit einer seine konkave Seite berührenden Flüssigkeit im Gleichgewichte ist, und nehmen wir einen zu den erzeugenden Linien des Zylinders senkrechten Streifen. In Fig. 127 sei AB ein Element von der Länge ds, E sein Mittelpunkt, C der Krümmungsmittelpunkt, r der Krümmungsradius EC, $d\theta$ der Winkel ACE oder BCE. Ist nun b die Breite des Streifens (senkrecht zur Papierebene) und T die Oberflächenspannung, so ist die in A und B angreifende streckende Kraft gleich Tb; für die Kraft P längs EC erhält man somit $2\,Tb\sin d\theta = 2\,Tb\,d\theta$; nun ist aber $2\,d\theta = ds/r$, also $P = Tb\,ds/r$. Ist ferner p die von dem Streifen längs

Fig. 127.



EC pro Einheit der Fläche ausgeübte Kraft, so ist $p = P/bds = T/r$. Diese Größe wird der **Normaldruck** genannt, er wird auf die der konkaven Seite der Oberfläche anliegende Flüssigkeit ausgeübt; im entgegengesetzten Falle findet ein entsprechender **Normalzug** statt.

206. Häutchen von doppelter Krümmung. Nun wollen wir eine beliebige Oberfläche betrachten und irgend einen Schnitt von ihr nehmen, der die Normale enthält; jeder solche Schnitt hat seinen besonderen Krümmungsradius längs der Hauptnormalen. Der Schnitt mittels einer Ebene, die mit der vorigen nahezu zusammenfällt und sie in einer durch den Krümmungsmittelpunkt gehenden, zum Krümmungsradius senkrechten Linie schneidet, hat in der Nähe des Berührungspunktes, falls sich die Gestalt der Fläche stetig ändert, nahezu dieselbe Krümmung.

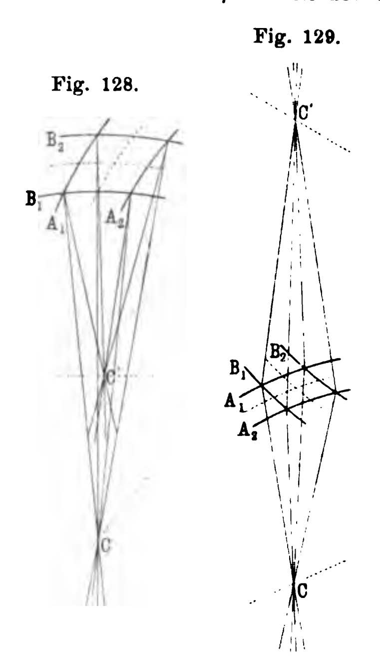


Fig. 128. Fig. 129.

In einem Punkte der Oberfläche werde die Hauptnormale gezogen; zwei aufeinander senkrechte Ebenen, die sich in ihr schneiden, werden Schnittkurven mit der Oberfläche liefern, welche die Krümmungsradien r, r' haben, und zwar in gleicher Richtung, wenn die Schnittkurven beide konkav oder beide konvex nach der Außenseite der Oberfläche sind, dagegen in entgegengesetzten Richtungen, wenn die eine Kurve konkav, die andere konvex ist; die entsprechenden Krümmungen sind $1/r$, $1/r'$. Wir wollen die Ebenen, von denen die Rede ist, mit A, B, die Krümmungsmittelpunkte ihrer Schnittkurven mit der Oberfläche C, C' nennen (Fig. 128 und 129). Nun nehmen wir zwei mit A nahezu zusammenfallende Ebenen A_1, A_2, die eine durch C gehende, zur Hauptnormalen senkrechte Linie enthalten und die Oberfläche in zwei Kurven mit gleichem Abstande von P schneiden; in der Nähe von P werden das nahezu parallele Linien sein, sie werden daselbst einen kurzen, schmalen Streifen des Häutchens mit parallelen Kanten zwischen sich lassen, welch letztere offenbar ähnliche Kurven von der Krümmung $1/r$ und praktisch identisch sind mit der Schnittkurve, die von A herrührt und durch P geht. Sodann nehmen wir zwei andere Ebenen B_1, B_2, in ganz analoger Weise zu beiden Seiten der Ebene B gelegen, mit einer durch C' gehenden, zur Hauptnormalen senkrechten Schnittlinie,

Ebenen, welche die Oberfläche in zwei beiderseits von P gleich weit entfernten Kurven schneiden, die nahe bei P die Krümmung $1/r'$ haben. Diese Kurven liefern die beiden anderen Kanten des zu bildenden Oberflächenstückes, und man sieht ein, daß es nahezu ein kleines Rechteck sein wird.

Eine durch diese Fläche parallel mit einem Paar seiner Kanten gezogene Linie weicht von einer geraden, auf dem Normalschnitt A oder B durch P senkrechten Linie nur unendlich wenig ab. In Fig. 128 und 129 sind diese Verhältnisse dargestellt, in der ersten für den Fall, daß die Krümmung in den beiden Schnitten in derselben Richtung verläuft, in der zweiten für den Fall, daß sie, wie bei einer Sattelfläche, nach entgegengesetzten Seiten gerichtet ist.

Die Krümmung des einen Kantenpaares ist also $1/r$, die des anderen $1/r'$; die streckende Kraft in dem Häutchen längs des ersten Kantenpaares liefert also nach § 204 pro Flächeneinheit eine Kraft, in der Richtung der Hauptnormalen gleich T/r, die streckende Kraft in der Richtung des anderen Kantenpaares entsprechend eine Kraft T/r' ebenfalls in der Richtung der Hauptnormalen. Bei positivem Vorzeichen sollen diese Kräfte nach dem betreffenden Krümmungsmittelpunkt hin, bei negativem von ihm weg gerichtet sein; in Fig. 128 haben z. B. die Kräfte gleiche, in Fig. 129 entgegengesetzte Richtung. Allgemein ergibt sich also, wenn dies beachtet wird, die Formel:

$$p = T\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

207. Eulerscher Satz von der Summe der Krümmungen in einem Punkte einer Oberfläche. Eines der wichtigsten Theoreme der Geometrie der Oberflächen besagt, daß für irgend ein Paar in einem Flächenpunkte durch die Hauptnormale gelegter, aufeinander senkrechter Schnitte die Summe der Krümmungen konstant ist, d. h. die Gleichung

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = const$$

besteht. Für ein gewisses derartiges Paar muß der Krümmungsradius in dem einen der beiden Schnitte ein Minimum und folglich in dem anderen ein Maximum sein; diese beiden Krümmungsradien heißen die Hauptkrümmungsradien; bezeichnet man sie mit R und R', so hat man also

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'},$$

und folglich kann man die Gl. (17) auch in der spezielleren Form:

$$p = T\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

schreiben.

Die Konstanz der Krümmungensumme wird in Kap. XVI nachgewiesen werden; sie kann aber auch schon aus der Erwägung geschlossen werden, daß der Druck p von der Richtung, die man zufällig den beiden Paaren von Ebenen und damit auch den Kanten des Rechtecks gegeben hat, unabhängig sein muß.

In dem besonderen Falle, daß $1/R + 1/R' = 0$ ist, wird auch $p = 0$, d. h. das Häutchen erfährt auf seinen beiden Seiten den gleichen Druck. Dieser Fall kann offenbar auf zwei Weisen eintreten, nämlich erstens, wenn R und R' gleich gerichtet und beide unendlich groß sind: dann ist das Häutchen eben; und zweitens, wenn R und R' entgegengesetzt, aber gleich groß, und zwar von beliebigem Werte sind; das Häutchen ist dann eine Sattelfläche mit gleich starker Konkav- und Konvexkrümmung.

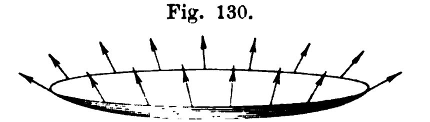
208. Problem der kleinsten Oberfläche bei gegebener Begrenzung. In dem allgemeinen Falle eines Häutchens mit fester krummliniger Begrenzung, wie z. B. einer Seifenblase an einem zu einer geschlossenen Kurve von beliebiger Form zusammengebogenen Drahte, ist das Häutchen gewölbt, die Radien sind endlich und erfüllen die Bedingung $1/R + 1/R' = 0$. Das Häutchen zieht sich nun aber zusammen, bis es die kleinste unter den obwaltenden Bedingungen mögliche Oberfläche hat und löst damit das isoperimetrische Problem, eine Fläche zu finden, die bei gegebener Begrenzung den kleinsten Flächeninhalt hat. Diese Fläche erfüllt eben gerade die Gleichung:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Durch den physikalischen Prozeß wird also die Lösung der mathematischen Aufgabe geliefert.

209. Arbeit beim Aufblasen einer kugelförmigen Seifenblase. Jetzt wollen wir eine kugelförmige, mit einem sich ausdehnenden Gase

Fig. 130.



gefüllte Seifenblase betrachten, die wir so langsam aufblasen wollen, daß die Temperatur des Häutchens und damit auch seine Spannung konstant bleibt (was im allgemeinen nicht der Fall sein würde).

Der von einem geschlossenen kontraktilen Häutchen auf das in seinem Innern befindliche Gas ausgeübte Druck läßt sich auf folgende Weise berechnen. Wir betrachten einen Teil des Häutchens, der durch einen kleinen Kreis auf der Kugel begrenzt ist; er wird, wie dies Fig. 130 andeutet, durch die umgebenden Häutchenteile in allen Punkten

seiner Umgrenzung tangential zur Oberfläche und senkrecht zur Grenze nach außen gezogen, und zwar mit der Kraft $2\,T$ auf die Längeneinheit der Grenzlinie. Nun ziehen wir durch den Scheitel des kleinen Flächenstückes und den Kugelmittelpunkt eine Ebene; der von ihr im Mittelpunkte gebildete, von der Fläche ausgeschnittene Winkel sei $2\,d\theta$. Die Tangentialkräfte rund um die Peripherie geben eine durch den Scheitel gehende, nach dem Kugelmittelpunkte gerichtete Resultante von der Größe $4\,\pi\,T r\,d\theta^2$, falls $d\theta$ klein ist; dies dividiert durch $\pi r^2 d\theta^2$, den Flächeninhalt des betrachteten Stückes, gibt $2\,T/r$.

Ein Gas übt auf jeden Teil der Oberfläche eine normal nach außen gerichtete Kraft aus, deren Betrag in allen gewöhnlichen Fällen überall merklich der nämliche ist; diese Kraft für die Flächeneinheit, also der Druck, sei p, ausgeübt auf die Innenfläche der Seifenblase.

Ist nun P der äußere Druck, so ergibt sich eine nach außen gerichtete, auf jedes Filmelement wirkende Resultante $p - P$ für die Flächeneinheit. Im Falle einer im Gleichgewicht befindlichen Seifenblase wird dieser Kraft durch eine nach innen gerichtete Kraft $4\,T/r$ das Gleichgewicht gehalten, wo $2\,T$ die Spannung des Films (mit Rücksicht auf seine beiden Seiten) ist. Somit findet man:

$$P - T = \frac{4\,T}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Wird der Radius um einen kleinen Betrag dr vergrößert, so wirkt die Kraft auf jedes Flächenelement dS durch einen Abstand dr und leistet dabei die Arbeit $4\,T dS dr/r$; die gesamte bei der Vergrößerung des Radius geleistete Arbeit ist daher $4\,\pi r^2 . 4\,T dr/r = 16\,\pi\,T r\,dr$; und wenn der Radius von a auf a' vergrößert wird, ist die Arbeit:

$$A = 8\,\pi\,T(a'^2 - a^2) \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Andererseits ist die gleichzeitig stattfindende Vergrößerung der Oberfläche $F' - F = 4\,\pi(a'^2 - a^2)$, und es ergibt sich somit:

$$A = 2\,T(F' - F) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

210. Arbeit, die ein sich ausdehnendes Gas leistet. Als letztes Beispiel wollen wir eine Menge komprimierten Gases im Innern eines geschlossenen Raumes betrachten. Wie in der Hydrostatik gezeigt werden wird, wird auf jedes Element der Oberfläche des das Gas enthaltenden Gefäßes eine normal nach außen gerichtete Kraft ausgeübt, deren Größe für die Flächeneinheit von Ort zu Ort wechseln kann; diese auf die Flächeneinheit wirkende Kraft heißt der Druck. Ist seine Größe in einem Punkte P gleich p, so ist die nach außen wirkende Kraft auf ein kleines Oberflächenelement dS gleich $p\,dS$. Nun möge das Volumen des von dem Gase eingenommenen Raumes durch eine kleine Aufwärtsbewegung der Begrenzung im ganzen oder eines Teiles

Fig. 131.

derselben ein wenig vergrößert werden; das Flächenelement ist dabei um eine kleine Strecke ds senkrecht zu seiner Lage verschoben worden und dadurch in eine neue Lage gekommen (Fig. 131, a. v. S.); die dabei geleistete Arbeit ist $pdSds$. Die gesamte von dem sich ausdehnenden Gase auf die Grenzwandung geleistete Arbeit setzt sich aus lauter solchen Elementen zusammen und ist daher:

$$A = \Sigma p ds dS \quad \text{. . . . . . . (23)}$$

wo die Summation über alle Elemente dS der Oberfläche zu erstrecken ist.

Ist, wie man das für ein komprimiertes Gas annehmen kann, p für alle Elemente gleich groß, so wird einfacher

$$A = p . \Sigma ds dS \quad \text{. . . . . . . (24)}$$

Hierin ist nun der zweite Faktor offenbar der Zuwachs, den das Volumen des Gefäßes erfährt; wird derselbe mit dv bezeichnet, so nimmt die Arbeitsformel die einfache Gestalt an:

$$A = p dv \quad \text{. . . . . (25)}$$

Ist das Gas z. B. in einem Zylinder vom Querschnitt q enthalten, der oben durch einen Kolben geschlossen ist, und ist der Druck auf die untere Fläche des Kolbens in jedem seiner Punkte gleich p, so ist die nach oben gerichtete Kraft gleich pq und die Arbeit, wenn der Kolben bei gleichbleibendem Druck p um die Strecke h gehoben wird, gleich pqh; nun ist aber $qh = dv$, dem Zuwachs des Volumens; die Arbeit ist also tatsächlich gleich pdv.

211. Endliche Ausdehnung: 1. isothermische, 2. adiabatische. Der von einem sich ausdehnenden Gase ausgeübte Druck ändert sich im allgemeinen mit seinem Volumen, und die Art dieser Änderung kann eine sehr verschiedene sein. Unter diesen sind indessen zwei Arten von besonderer Bedeutung und Wichtigkeit, nämlich 1. Ausdehnung unter der Bedingung, daß die Temperatur dabei konstant bleibt, und 2. Ausdehnung unter der Bedingung, daß von dem Gas weder Wärme von außen aufgenommen, noch Wärme nach außen abgegeben wird; jener Vorgang heißt isothermisch, dieser adiabatisch. In jedem der beiden Fälle findet, wie sich in der Wärmelehre zeigen wird, eine ganz bestimmte Beziehung zwischen dem Druck und dem Volumen des Gases statt. Für eine Reihe von Gasen besteht diese Beziehung mit großer Annäherung darin, daß im Falle 1. das Produkt pv aus dem Druck und dem vom Gase eingenommenen Volumen konstant bleibt, im Falle 2. dagegen das Produkt $pv^{\varkappa}$, also das Produkt aus Druck und der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenz des Volumens konstant bleibt, wo $\varkappa$ das Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck zur spezifischen Wärme bei konstantem Volumen ist und für die bekanntesten Gase: Sauerstoff, Wasserstoff, Stickstoff und trockene

Luft, rund den gleichen Wert, nämlich 1,41, hat. Die gedachten Beziehungen in den beiden Fällen lauten somit:

$$1.\ pv = c, \qquad 2.\ pv^{\varkappa} = c' \quad \dots \quad (26)$$

wo c und c' Konstanten sind. Man nennt diese Formeln die charakteristischen Gleichungen des Gases unter den betreffenden Bedingungen. In der Thermodynamik werden sie gewöhnlich so verstanden, daß v das Volumen der Masseneinheit des Gases bedeutet.

Es ist nun sehr wichtig, in diesen Fällen die Arbeit zu ermitteln, die das Gas bei einer endlichen Ausdehnung, etwa vom Volumen v_0 bis auf das Volumen v_1, leistet. Zu diesem Zwecke müssen wir vorerst die Druckänderung berechnen, die bei einer kleinen Volumvergrößerung dv erzeugt wird.

1. Isothermisch. Es ändere sich v in $v + dv$, p in $p + dp$, wo dv und dp sehr kleine Größen seien; aus der Gleichung $pv = c$ wird alsdann die neue

$$(p + dp)(v + dv) = c,$$

und folglich durch Subtraktion von der ursprünglichen

$$p\,dv + v\,dp + dp\,dv = 0,$$

oder da das letzte Glied, als Produkt zweier sehr kleiner Größen, zu vernachlässigen ist gegen die beiden ersten Glieder:

$$p\,dv + v\,dp = 0.$$

Für die bei der Ausdehnung um dv geleistete Arbeit ergibt sich hiernach mit Rücksicht auf Gl. (25):

$$dA = p\,dv = -v\,dp \quad \dots \quad (27)$$

2. Adiabatisch. Hier findet sich ganz analog

$$(p + dp)(v + dv)^{\varkappa} = c'$$

oder

$$(p + dp)\,v^{\varkappa}\left(1 + \frac{dv}{v}\right)^{\varkappa} = c'$$

oder wenn $(1 + dv/v)^{\varkappa}$ nach dem binomischen Satze entwickelt und dann wieder die ursprüngliche Gleichung $pv^{\varkappa} = c'$ abgezogen wird:

$$\left(1 + \varkappa\frac{dv}{v} + \cdots\right)dp + p\left(\varkappa\frac{dv}{v} + \cdots\right) = 0;$$

hier kann man wieder alle Quadrate und höheren Potenzen von dv und alle Produkte von dv und dp als klein im Vergleich zu den anderen Gliedern vernachlässigen und erhält dann

$$v\,dp + \varkappa p\,dv = 0.$$

Somit wird in diesem Falle die geleistete Arbeit:

$$dA = p\,dv = -\frac{1}{\varkappa}v\,dp \quad \dots \quad (28)$$

212. Arbeitsleistung bei isothermischer und bei adiabatischer Ausdehnung. Gehen wir nun zur eigentlichen Aufgabe über,

so haben wir nach Gl. (25) für die ganze Arbeit A bei der Änderung des Volumens von v_0 in v_1 die Summe der Arbeiten für die kleinen Ausdehnungen dv, aus denen sich die große zusammensetzt, also

1. isothermisch (da $p = c/v$ ist):

$$A = \int_{v_0}^{v_1} p\,dv = c \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

Betrachten wir nun für einen Augenblick die Gleichung $u = e^x$, wo u reell und positiv und x reell ist; e^x ist die oben in § 54 definierte Funktion; und wenn man die Beziehung umkehrt und x als Funktion von u betrachtet, so nennt man x den Logarithmus von u auf der Basis e oder kurz den natürlichen Logarithmus von u und bezeichnet in mit log, so daß also $x = log\, u$ ist.

Ist nun w eine andere reelle und positive Größe und y reell, und hat man $w = e^y$, so ist offenbar

$$log\,(u w) = x + y = log\, u + log\, w$$

$$log\, \frac{u}{w} = x - y = log\, u - log\, w.$$

Nun haben wir früher gesehen, daß

$$du = e^x\, dx,$$

also umgekehrt

$$dx = \frac{d\,u}{e^x} = \frac{d\,u}{u}$$

ist; es ergibt sich also:

$$d\,(log\, u) = \frac{d\,u}{u}.$$

Von dieser Gleichung zwischen dem Differential von $log\, u$ und dem Differential von u können wir nun zu der Integralgleichung zwischen den Größen selbst gelangen, indem wir die Summe der Zuwachse nehmen, die $log\, u$ erfährt, wenn u von u_0 bis u_1 wächst, wo u_0 und u_1 reelle positive Größen sind. Diese Summe ist $log\, u_1 - log\, u_0$ oder $log\,(u_1/u_0)$, und demgemäß erhalten wir

$$log\, u_1 - log\, u_0 = log\, \frac{u_1}{u_0} = \int_{u_0}^{u_1} \frac{d\,u}{u}.$$

Kehren wir jetzt zur Gleichung (29) zurück, so erhalten wir, das eben Gefundene anwendend:

$$A = c\,(log\, v_1 - log\, v_0) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

Das ist also die Arbeit, die das Gas leistet, wenn es sich bei konstanter Temperatur, d. h. isothermisch, von v_0 auf v_1 ausdehnt; sie wird im allgemeinen dazu benutzt, äußere Kräfte zu überwinden. Es ist dies aber auch umgekehrt die Arbeit, die von den äußeren Kräften geleistet

werden muß, um das Gas bei konstanter Temperatur, d. h. isothermisch, von v_1 auf v_0 zusammenzudrücken.

2. Adiabatisch. Hier nimmt, da $p v^{\varkappa} = c'$ ist, die Gl. (28) die Form

$$dA = c' \frac{dv}{v^{\varkappa}}$$

an, wo $\varkappa > 1$ (in den angeführten Fällen rund 1,41) ist. Somit wird jetzt

$$A = c' \int \frac{dv}{v^{\varkappa}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

Betrachten wir nun die Funktion $1/v^{\varkappa-1}$ und ändern wir v in $v + dv$, wo dv wieder eine kleine Größe sei. Dann hat man, wie sich leicht verifizieren läßt:

$$\frac{dv}{v^{\varkappa}} = - \frac{d\left(\frac{1}{v^{\varkappa-1}}\right)}{\varkappa - 1};$$

und indem man alle Zuwachse, die $1/v^{\varkappa-1}$ zwischen $v = v_0$ und $v = v_1$ erfährt, summiert, erhält man

$$\int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v^{\varkappa}} = \frac{1}{\varkappa - 1} \left(\frac{1}{v_0^{\varkappa-1}} - \frac{1}{v_1^{\varkappa-1}} \right),$$

und somit wird die Gl. (31)

$$A = \frac{c'}{\varkappa - 1} \left(\frac{1}{v_0^{\varkappa-1}} - \frac{1}{v_1^{\varkappa-1}} \right). \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

Das ist also die Arbeit, welche das Gas bei der Ausdehnung vom Volumen v_0 auf das Volumen v_1 leistet, wenn die Bedingung besteht, daß kein Wärmeaustausch zwischen Gas und Umgebung stattfinde, wenn also die Ausdehnung adiabatisch erfolgt. Es ist zugleich die Arbeit, welche die äußeren Kräfte leisten müssen, um das Gas unter der gleichen Bedingung von dem Volumen v_1 auf das Volumen v_0 zusammenzudrücken, d. h. um es adiabatisch zu komprimieren.

213. Arbeitsleistung eines Systems von Kräften. Es seien $K_1, K_2, K_3 \ldots$ irgendwelche Kräfte, die auf die Teilchen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ eines materiellen Systems wirken; und es seien $\delta s_1, \delta s_2, \delta s_3 \ldots$ irgendwelche Verrückungen, welche die Teilchen in der Richtung dieser Kräfte im Einklang mit den Bedingungen erfahren, denen das System unterworfen ist. Die Summe $K_1 \delta s_1 + K_2 \delta s_2 + \cdots$ heißt die von den Kräften bei den genannten Verrückungen geleistete Arbeit. Nennen wir sie δA, so ist:

$$\delta A = K_1 \delta s_1 + K_2 \delta s_2 + \cdots = \Sigma K \delta s \quad \ldots \quad (33)$$

Zerlegt man ferner $K_1 \ldots$ in die Komponenten $X_1, Y_1, Z_1 \ldots, \delta s_1 \ldots$ in die Komponenten $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1 \ldots$, so hat man:

$$\delta A = \Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) \quad \ldots \ldots \quad (34)$$

Da infolge des Wirkens der Kräfte, also durch die Ausführung der Verrückungen, das System seine Konfiguration ändert, kann δA auch als die Arbeit bei der Änderung der Konfiguration des Systems bezeichnet werden. Die Kräfte K sind hier als die gesamten auf die Teilchen von den Massen m wirkenden Kräfte zu verstehen; nach dem im § 156 Gesagten können sie zerlegt werden in die äußeren, auf die Teilchen wirkenden Kräfte, die jetzt mit K bezeichnet werden sollen, und in die inneren Kräfte, die von den wechselseitigen Verknüpfungen der Teilchen des Systems herrühren und mit K' bezeichnet werden sollen; entsprechend beziehen sich nunmehr die Komponenten X, Y, Z auf die äußeren, X', Y', Z' auf die inneren Kräfte. Damit tritt jetzt an die Stelle der Gl. (34) die neue:

$$\delta A = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + \Sigma(X'\delta x + Y'\delta y + Z'\delta z) \quad (35)$$

oder auch nach § 156, Gl. (24):

$$\delta A = \Sigma m\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\delta z\right) \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Im allgemeinen ist keine der beiden Summen auf der rechten Seite von (35) gleich null. Die zweite Summe ist, wie wir wissen, die Arbeit der inneren Kräfte, sie verschwindet nur dann, wenn die inneren Kräfte ausschließlich solche sind, welche unveränderliche Beziehungen zwischen den Teilchen des Systems aufrecht erhalten. Denn man betrachte z. B. ein nur aus zwei Teilchen A und B, die sich gegenseitig anziehen, zusammengesetztes System. Ihre gegenseitige Anziehung hat keinen Einfluß auf die Lage ihres Schwerpunktes; anderseits wird aber in einem kleinen Zeitteilchen A dem Schwerpunkt um δr_1, B um δr_2 näher gebracht; und wenn K der Zahlenwert der wechselseitigen Anziehungskraft ist, so ist die Arbeit, welche sie leistet, gleich $K(\delta r_1 + \delta r_2)$, also nicht null. Es ist dabei zu beachten, daß, während die Richtungen der beiden Verrückungen einander entgegengesetzt sind, doch die geleisteten Arbeiten, wegen der ebenfalls entgegengesetzten Kraftrichtungen, beide positiv sind.

214. Arbeit von Arbeitskräften und Arbeit von Zwangskräften. Wir wollen nun die Komponenten der auf ein Teilchen wirkenden Kraft mit $X_a + X_c$, $Y_a + Y_c$, $Z_a + Z_c$ bezeichnen. Dabei sollen X_a, Y_a, Z_a die Komponenten der arbeitleistenden, X_c, Y_c, Z_c die Komponenten der keine Arbeit leistenden Kräfte sein; jene sind passend als Arbeitskräfte zu bezeichnen, mit der Bemerkung, daß der häufig benutzte Ausdruck angreifende oder angebrachte Kräfte leicht irreführen kann, insofern diese Kräfte nicht notwendig von äußerer Materie ausgehen; diese hingegen, die von den unveränderlichen Verknüpfungen zwischen den Teilchen, d. h. von den unveränderlichen kinematischen Bedingungen, herrühren, denen das System unterworfen ist, kann man Zwangskräfte nennen. Kräfte, die z. B. von der Verbindung zweier

Teilchen durch einen starren Stab, also von einer „starren Verbindung", herrühren, gehören in die zweite Klasse; Kräfte dagegen, die von „elastischen Verbindungen" herrühren, in die erste Klasse. Die Unterscheidung ist vom physikalischen Standpunkte aus offenbar etwas künstlich, da eine starre Verbindung nichts anderes ist als eine elastische von sehr großem elastischem Widerstande; vom mathematischen Standpunkte aus ist sie aber sehr geeignet zu einer einfachen Formulierung der Gleichungen.

Sind nämlich die kinematischen Bedingungen unveränderlich, so lassen sie sich einfach durch Gleichungen zwischen den Koordinaten darstellen, ohne daß die Zeit in ihnen explizite vorkäme; und die Folge hiervon ist, wie sich zeigen wird (§ 215), die, daß die Kräfte vom zweiten Typus, also X_c, Y_c, Z_c, bei keiner möglichen Verrückung des Systems Arbeit leisten, so daß in der Arbeitsgleichung Glieder, die von ihnen herrührten, gänzlich fehlen; d. h. es ist [nach (35) und (36)]:

$$\left.\begin{aligned} \delta A &= \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{\delta t^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) \\ &= \Sigma(X_a\delta x + Y_a\delta y + Z_a\delta z) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (37)$$

Die Größen δx, δy, δz sind hierin beliebige mögliche Verrückungen der Teilchen; es ist aber ganz besonders zu betonen, daß diese sogen. Variationsgleichung nicht zur Ableitung der Gleichungen des § 156 benutzt werden kann, da doch mit ihr zugleich noch die Gleichung besteht:

$$\Sigma(X_c\delta x + Y_c\delta y + Z_c\delta z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Übrigens gehören hierher natürlich auch Kräfte, welche die Wirkung haben, daß sich Teilchen nur auf vorgeschriebenen Flächen oder Kurven bewegen dürfen; denn das sind ja Bedingungen oder Zwange, die sich in rein kinematischen Gleichungen formulieren lassen. Daß solche Kräfte keine Arbeit leisten und keine beanspruchen, geht einfach daraus hervor, daß sie allenthalben senkrecht zur Bewegungsrichtung in der Fläche auf der Kurve gerichtet sind. Überhaupt ist die Annahme, daß die kinematischen Bedingungen unveränderlich seien und daß die entsprechenden Kräfte keine Arbeit auf das Ganze leisten, so lange gerechtfertigt, als nicht das Gegenteil angegeben ist. In dem speziellen Falle, wo das System starr ist, sind die Kräfte X_c, Y_c, Z_c einfach die inneren Kräfte X', Y', Z', von denen oben die Rede war.

Es ist zu beachten, daß, obwohl $\Sigma X_a \delta_x$ u. s. w. im allgemeinen nicht identisch sind mit $\Sigma X \delta_x$ u. s. w., wo die X, Y, Z die von außen auf die Teilchen wirkenden Kräfte sind, doch die Gleichungen $\Sigma X_a = \Sigma X$ u. s. w. stets erfüllt sind.

Nun wollen wir für δx, δy, δz setzen: dx, dy, dz, d. h. die wirklichen (nicht bloß, wie bisher, möglichen) Verrückungen, welche bei der Bewegung des Systems in dem kleinen Zeitteilchen dt eintreten, also die Größen $dx = \dot{x}dt$, $dy = \dot{y}dt$, $dz = \dot{z}dt$. Dann erhalten wir aus (37):

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)dt=\Sigma(X_a dx+Y_a dy+Z dz$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma m\left\{\frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right)+\frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right)+\frac{dz}{dt}d\left(\frac{dz}{dt}\right)\right\}\\ =\Sigma(X_a dx+Y_a dy+Z_a dz)\end{array}\right\} \quad . \; . \; (37a)$$

oder, wenn man die Größe:

$$U=\tfrac{1}{2}\Sigma m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} \quad . \; . \; . \; (39)$$

einführt:

$$dU=\Sigma(X_a dx+Y_a dy+Z_a dz) \quad . \; . \; . \; . \; (40)$$

oder endlich:

$$\frac{dU}{dt}=\Sigma\left(X_a\frac{dx}{dt}+Y_a\frac{dy}{dt}+Z_a\frac{dz}{dt}\right) \quad . \; . \; . \; (40a)$$

Die Größe U heißt die **kinetische Energie** oder **Bewegungsenergie** oder **aktuelle Energie** des Systems. Anderseits sind nach den Festsetzungen zu Beginn dieses Kapitels die rechterseits stehenden Größen in (40): $X_a dx$, $Y_a dy$, $Z_a dz$ die **Arbeiten**, und die in (40a): $X_a \cdot \dot{x}$, $Y_a \dot{y}$, $Z_a \dot{z}$, also die Produkte der Arbeitskräfte in die Geschwindigkeiten (Strecken für die Zeiteinheit), offenbar die **Effekte** der Arbeitskräfte. Durch Integration erhält man:

$$U=\Sigma\int(X_a dx+Y_a dy+Z_a dz)+C \quad . \; . \; . \; (40b)$$

wo C eine Konstante und das Integral über die ganze Bewegungszeit von der Anfangs- bis zur Schlußkonfiguration zu erstrecken ist.

215. Zwangskräfte. Von den veränderlichen kinematischen Bedingungen herrührender Effekt. Um die Kräfte zu finden, die auf die Teilchen wirken, wenn das System dem Zwange unterliegt, bestimmte kinematische Bedingungen zu erfüllen, können wir folgendermaßen vorgehen. Es seien m_1, m_2 ... die einzelnen Massen, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 ... ihre Koordinaten in irgend einem Augenblicke; die Zahl dieser Koordinaten ist, wenn es sich um n Massen handelt, $3n$. Diese Koordinaten seien nun aber durch p Gleichungen von der Form:

$$f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots)=0,\quad f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots)=0 \text{ u. s. w.} \quad (41)$$

miteinander verknüpft, so daß nur $3n - p$ von ihnen unabhängig voneinander sind. Dann erhält man durch Variation von Gl. (41) die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f_1}{d x_2}\delta x_2+\cdots=0,\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\delta x_2+\cdots=0\\ \text{u. s. w.}\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (41a)$$

Derartige Bedingungen bezeichnet man als **unveränderliche**.

Multipliziert man jetzt die erste der Gleichungen (41a) mit einem vorläufig unbestimmten Faktor λ_1, die zweite mit λ_2 u. s. f., und addiert sie dann sämtlich, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots\right) \delta x_1 \\ &+ \left(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots\right) \delta x_2 + \cdots = 0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Da die Größe auf der linken Seite null ist, kann man sie ohne Fehler zu der Arbeit der Kräfte addieren und erhält dann:

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z\right) \\ &= \Sigma \left\{\left(X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \cdots\right) \delta x \right. \\ &\quad + \left(Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \cdots\right) \delta y \\ &\quad \left. + \left(Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \cdots\right) \delta z \right\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

wo sich beiderseits die Summe über alle x von x_1 bis x_n, über alle y von y_1 bis y_n und über alle z von z_1 bis z_n erstreckt, während dabei die λ und f ungeänderte Indices behalten; $X Y Z$, d. h. X_1, Y_1, Z_1 u. s. w., sind dabei die Arbeitskräfte (§ 214) auf die Teilchen m_1 u. s. w.

Wählt man jetzt die bisher willkürlichen Faktoren λ so, daß die Koeffizienten von $\delta x_1, \delta x_2 \ldots, \delta y_1, \delta y_2 \ldots, \delta z_1, \delta z_2 \ldots$ auf beiden Seiten von Gl. (43) gleich werden, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \cdots \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \cdots \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \cdots\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

also, wenn man x, y, z und X, Y, Z der Reihe nach mit den Indices 1 bis n versieht, $3n$ Gleichungen. Diese Gleichungen heißen die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für ein unfreies System, die Größen λ die Lagrangeschen Multiplikatoren. Die Gl. (41) und (44) zusammengenommen stellen $3n + p$ Gleichungen dar, also gerade genug zur Bestimmung der ebensovielen Größen x_1 bis x_n, y_1 bis y_n, z_1 bis z_n, λ_1 bis λ_p.

Die Zusatzglieder, die rechts hinter den eigentlichen Kräften stehen, sind die von den Zwangen herrührenden Kräfte; denn wenn man einen dieser Zwange, sagen wir den durch $f_1 = 0$ dargestellten, aufhöbe, so könnte man die Bewegung von m_1 nur dadurch unverändert

aufrecht erhalten, daß man zu X_1 eine Kraft $\lambda_1 \partial f_1/\partial x_1$, zu Y_1 eine Kraft $\lambda_1 \partial f_1/\partial y_1$, zu Z_1 eine Kraft $\lambda_1 \partial f_1/\partial z_1$ hinzugefügte und entsprechend für die anderen Teilchen; das Analoge würde für die übrigen Zwange gelten.

Aus (42) und (43) folgt deutlich, daß die von den unveränderlichen Zwangskräften herrührende Arbeit null ist. Das ist aber nicht mehr der Fall, wenn die kinematischen Gleichungen neben den Koordinaten auch die Zeit explizite enthalten, wenn sie also von der Form:

$$f_1(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots) = 0 \text{ u. s. w.} \quad \ldots \quad (45)$$

sind, so daß die Differentiation nach der Zeit

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{d x_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{d y_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial z_1}\frac{d z_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{d x_2}{dt} + \cdots = 0 \quad (46)$$

u. s. w.

erhält. Die Gl. (43) wird zwar in diesem Falle noch gültig sein, falls unter $\delta x_1, \delta x_2 \ldots$ Variationen verstanden werden, die im Einklange sind mit denjenigen kinematischen Bedingungen, die zur Zeit t herrschen, und ebenso sind die Bewegungsgleichungen noch gültig. Multipliziert man aber von den Gl. (44) die erste mit $\dot{x}$, die zweite mit $\dot{y}$, die dritte mit $\dot{z}$ u. s. f. und addiert dann alle, so erhält man mit Rücksicht auf (40) und (46) (indem man in (46) die Summe aller übrigen Glieder durch das negative erste ersetzt):

$$\frac{dU}{dt} = \Sigma\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right) - \left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial t} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial t} + \cdots\right) \quad (47)$$

d. h. der Zuwachsgrad der kinetischen Energie ist kleiner als der Effekt der eigentlichen Kräfte, und zwar um die Größe $\lambda_1 \partial f_1/\partial t + \lambda_2 \partial f_2/\partial t + \cdots$, also um den Effekt der Kräfte, die durch die inneren Beziehungen des Systems ins Spiel gerufen sind. Die Gl. (37) hinwiederum bleiben gültig, insofern die Variationen $\delta x \ldots$ mit der Unveränderlichkeit der Bedingungen im Einklang sind.

Übrigens sei vorgreifend bemerkt, daß, wenn X, Y, Z sogen. konservative Kräfte (§ 218) sind, die Gl. (47) die Form:

$$\frac{d(U+V)}{dt} = -\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial t} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial t} + \cdots\right) \quad \ldots \quad (47\text{a})$$

annimmt, welche zeigt, daß die Existenz veränderlicher kinematischer Bedingungen mit dem Prinzip von der Konstanz der Energie unvereinbar ist.

Wir wollen nun die Kräfte, die infolge der Bedingung $f_1 = 0$ auf das Teilchen $x_1 y_1 z_1$ wirken, noch etwas genauer betrachten; es sind das in den Richtungen x, y, z die Kräfte $\lambda_1 \partial f_1/\partial x_1$, $\lambda_1 \partial f_1/\partial y_1$, $\lambda_1 \partial f_1/\partial z_1$. Nun sind $\partial f_1/\partial x_1$, $\partial f_1/\partial y_1$, $\partial f_1/\partial z_1$ die Änderungsgrade von f_1 mit x_1 bezw. y_1 bezw. z_1, wenn immer nur die betreffende Koordinate verändert wird, die anderen aber konstant erhalten werden. Somit kann man die Gleichung $f_1 = 0$ als eine Beziehung betrachten.

welche die verschiedenen Werte von x_1, y_1, z_1 mit denen gewisser Konstanten, nämlich irgend wie gewählter Werte der anderen Koordinaten, verknüpft. Es ist also die Gleichung einer Fläche, auf welcher der Punkt x_1, y_1, z_1 liegt, wenn die anderen Variabeln ungeändert bleiben, und $\partial f_1/\partial x_1$, $\partial f_1/\partial y_1$, $\partial f_1/\partial z_1$ sind proportional den Richtungskosinus der Normalen jener Fläche in dem betreffenden Punkt. Daraus folgt aber: Die resultierende Zwangskraft steht auf der Fläche $f_1 = 0$ senkrecht. Analoges gilt natürlich für den Zwang $f_1 = 0$ auf die anderen Teilchen sowie für die Flächen $f_2 = 0$ u. s. w., die den anderen Bedingungen entsprechen.

Das Glied in der Variationsgleichung der Arbeit, welches von dem Zwange $f_1 = 0$ auf das Teilchen m_1 herrührt, ist

$$\lambda_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z_1}\delta z_1\right);$$

sind nun, was erlaubt ist, δx_1, δy_1, δz_1 irgendwelche Variationen von x_1, y_1, z_1, die eine Verrückung δn_1 ergeben, die auf der Fläche $f_1 = 0$ senkrecht steht, wobei die übrigen Variabeln irgend ein spezielles System von Werten haben können, und bezeichnet

$$R_1 = \lambda_1 \sqrt{\left\{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\right)^2\right\}}$$

die Resultante des von $f_1 = 0$ herrührenden Zwanges, so läßt sich der Arbeitswert in der kurzen Form $R_1 \delta n_1$ schreiben. Somit ist die Kraft, welche auf m_1 ausgeübt werden muß, um die Bedingung $f_1 = 0$ zu erfüllen, eine Kraft, welche die Fläche $f_1 = 0$ zu verändern strebt.

---

216. Arbeitsleistung bei einer Winkelverrückung eines starren Körpers um eine feste Axe. Als einen speziellen Fall wollen wir einen starren Körper betrachten, der um eine feste Axe rotieren kann; ohne der Allgemeinheit der Betrachtung Eintrag zu tun, können wir diese Axe zur z-Axe des Koordinatensystems wählen; ihr Durchschnittspunkt mit der Ebene der Fig. 132 sei O. Ferner sei P ein Teilchen im Abstande $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ von der Drehungsaxe, und θ der Winkel, den das von P auf sie gefällte Lot mit einer anderen auf ihr senkrechten, als x-Axe gewählten Linie OX bildet. Die Bewegung, die dem Teilchen erlaubt ist, ist eine solche, bei welcher

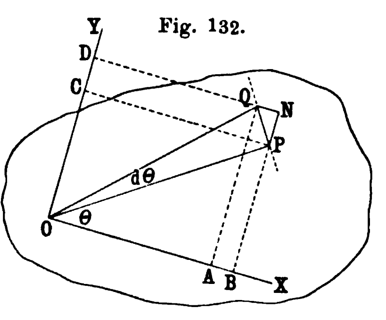


Fig. 132.

$$dx = NQ = -r \sin\theta\, d\theta, \quad dy = PN = r\cos\theta\, d\theta, \quad dz = 0,$$

also

$$\frac{dx}{dt} = -r \sin\theta \frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = r\cos\theta \frac{d\theta}{dt},$$

also schließlich, mit Rücksicht auf $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -r\cos\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -r\sin\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r\cos\theta \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ist; die letzteren Ausdrücke kann man auch erhalten, indem man die Beschleunigungen von P längs und senkrecht zu PO, also die Größen $r\ddot{\theta}$ und $r\dot{\theta}^2$, nach x und y zerlegt. Multipliziert man die Gleichungen mit dx bezw. dy (wobei man rechts dafür $-r\sin\theta d\theta$ bezw. $r\cos\theta d\theta$ setzt) und addiert alsdann, so erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy = r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}d\theta.$$

Es sei bemerkt, daß zwar θ für die verschiedenen Teilchen des Körpers verschieden ist, daß aber, wegen der Starrheit des Körpers, $d\theta$ und $d^2\theta$ für alle Punkte dieselben Werte haben müssen.

Anderseits ist

$$\begin{aligned}\Sigma(X_a dx + Y_a dy + Z_a dz) &= \Sigma(-X_a r\sin\theta + Y_a r\cos\theta)d\theta \\ &= \Sigma(Rr)\,d\theta,\end{aligned}$$

wo R die zu OP senkrechte Komponente der Kraft ist, deren Komponenten nach den Koordinatenaxen X_a, Y_a, Z_a sind.

Damit wird aber

$$\Sigma(mr^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}d\theta = \Sigma(Rr)\,d\theta$$

eine Gleichung, die schon oben in § 159 abgeleitet wurde. Ferner wird mit Rücksicht auf $d\theta = \dot{\theta}dt$ und $d\dot{\theta} = \ddot{\theta}dt$ aus Gl. (37a):

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}d\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}d\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}d\frac{dz}{dt}\right) &= \Sigma(mr^2)\frac{d\theta}{dt}d\frac{d\theta}{dt} \\ &= \Sigma(Rr)\frac{d\theta}{dt}\end{aligned}\right\} \quad (48)$$

d. h. die Summe der Momente der angreifenden Kräfte in Bezug auf die Axe, multipliziert mit der Winkelgeschwindigkeit des Körpers, ist gleich dem Zuwachsgrad der kinetischen Energie; statt des letzteren kann man natürlich auch den Effekt der angreifenden Kräfte setzen.

217. Kinetische Energie der Rotation. Durch Integration von Gl. (48) und indem man

$$\Sigma(mr^2) = Mk^2$$

setzt, wo M die Masse des ganzen Körpers und k der Gyrationsradius (§ 165) ist, erhält man für den rotierenden Körper die Gleichung

$$U = \tfrac{1}{2} M k^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \Sigma(Rr)\theta + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

in Worten: die kinetische Energie ist bis auf eine Konstante C gleich dem Produkt des Gesamtmoments der Kräfte und der Winkelverrückung, welcher der Körper unterworfen worden ist.

In §§ 156 bis 159 ist gezeigt worden, daß die Wirkung der Kräfte auf einen starren Körper betrachtet werden kann als hervorbringend 1. Beschleunigung des Massenmittelpunkts, 2. Winkelbeschleunigung des Körpers um eine durch den Massenmittelpunkt gehende Axe, und daß diese beiden Beschleunigungen voneinander unabhängig sind. Es ist angezeigt, im Zusammenhange hiermit den wichtigen Satz zu beweisen, daß die kinetische Energie des Körpers

$$U = \tfrac{1}{2} M \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} M k^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

ist, wo M die Masse des Körpers, k der Trägheitsradius, $\dot{s}$ die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts und $\dot{\theta}$ die Winkelgeschwindigkeit um die Axe durch den Massenmittelpunkt ist. P sei ein Punkt des Körpers, G sein Massenmittelpunkt, GH die Richtung, in der sich letzterer bewegt, p der Abstand des Punktes P von der Axe. Das Quadrat der Geschwindigkeit des in P gelegenen Teilchens ist

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 p^2 - 2\frac{ds}{dt}\frac{d\theta}{dt} p \cos\varphi,$$

wo φ der Winkel zwischen der Geschwindigkeit $\dot{\theta} p$ und GH ist. Die kinetische Energie ist folglich, da

$$\Sigma m p \cos\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma m p^2 = M k^2$$

ist:

$$U = \tfrac{1}{2}\Sigma m \left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 p^2\right] = \tfrac{1}{2} M \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} M k^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (50)$$

was zu beweisen war.

218. Potentielle Energie. Konservative Kräfte. Erhaltung der Energie. Nun wollen wir die Annahme machen, daß die wirkenden Kräfte von einer Funktion V der Koordinaten in der Weise abgeleitet werden können, daß

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad . \quad . \quad (51)$$

ist, daß also die Kraftkomponenten als die negativen Änderungsgrade einer und derselben Größe, wenn sich nur x, oder nur y, oder nur z ändert, d. h. als ihre Gefälle in den drei Axenrichtungen dargestellt werden können; V heißt dann, zunächst rein mathematisch gefaßt, die

Potentialfunktion oder das Potential oder die Kräftefunktion. Für ihre Änderung mit der Zeit erhält man

$$\frac{dV}{dt} = \Sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) \quad . \; . \; . \quad (52)$$

wo die Summe über alle wirkenden Kräfte zu erstrecken ist. Damit nimmt aber die Gleichung (40) die einfache Gestalt

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dV}{dt} = \frac{d(U+V)}{dt} = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (52a)$$

an, und durch Integration ergibt sich

$$U + V = E \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53)$$

wo E eine Konstante ist. In diesem physikalischen Sinne nennt man V, als zweites Glied einer Summe, dessen erstes die aktuelle oder kinetische Energie U ist, die potentielle oder statische Energie des Systems oder auch, da es, als Funktion der Koordinaten aller Teilchen, von der Konfiguration des Systems abhängt, die konfigurative Energie des Systems.

Die Gl. (53) besagt in Worten: Wie auch die Teilchen eines von Kräften, die ein Potential haben, angegriffenen Systems ihre Lagen und ihre Bewegungszustände ändern mögen, die Summe der aktuellen und der potentiellen Energie des Systems bleibt immer dieselbe. Diese konstante Summe E nennt man die Energie des Systems schlechthin und kann dann den Satz einfacher so aussprechen: Bei Existenz einer Kräftefunktion bleibt die Energie eines Systems bei allen seinen Konfigurations- und Bewegungsänderungen konstant. Dieser fundamentale Satz der Dynamik heißt das Gesetz von der Erhaltung der Energie. Er gilt zunächst nur unter der angegebenen Bedingung. Kräfte, welche diese Bedingung erfüllen, heißen erhaltende oder konservative Kräfte, ein System, auf das ausschließlich solche Kräfte wirken, heißt ein erhaltendes oder konservatives System.

Der Wert der Summe E hängt übrigens von der Konfiguration ab, von der aus die potentielle Energie U als ihrem Nullpunkt gerechnet wird; dieser Nullpunkt ist offenbar willkürlich, die Energie enthält also eine willkürliche Konstante, die aber, da es sich stets nur um Vergleichungen handelt, bedeutungslos ist. Ist U_0 die aktuelle Energie des Systems in der Konfiguration, in der $V = 0$ gerechnet wird, so ist eben dieses U_0 der Wert von E_0 und somit überhaupt von E.

219. Relativität der kinetischen Energie. Berechnung der Energie für ein abgeschlossenes System. Bedingung, die behufs Bestimmtheit erfüllt sein muß. Es ist zu beachten, daß der Wert der kinetischen Energie U, da er für jedes Teilchen von $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ abhängt, und diese wieder von dem Axensystem abhängen, auf das die

Bewegung der Teilchen bezogen wird, von wesentlich relativem Charakter ist. Die Gl. (40) indessen gilt immer, wenn nur X_a, Y_a, Z_a durch die Massenbeschleunigungen der Teilchen relativ zum Bezugssystem, durch das $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ definiert sind, gemessen werden, und es kann niemals eine Unklarheit entstehen.

Die Lehre von der Energie bezieht sich unmittelbar auf abgeschlossene Systeme. Die potentielle Energie ist die der relativen Konfiguration der verschiedenen Teile des Systems, die aufeinander mit Kräften wirken, die von ihren gegenseitigen Entfernungen abhängen; die kinetische Energie anderseits ist die Energie der Bewegungen der Teile des Systems relativ zu einem System von Bezugsaxen, das gänzlich unabhängig ist von dem in Rede stehenden System, um dessen Energie es sich handelt. Für die Bestimmtheit der Änderungen der kinetischen Energie (der absolute Betrag der kinetischen Energie ist ohne Bedeutung) ist es ganz wesentlich, daß kein Teil des behandelten materiellen Systems selbst das Bezugsaxensystem bilde; denn dann würde die Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung nicht mehr erfüllt sein. Um das einzusehen, betrachte man zwei Massenteilchen m, m', im gegenseitigen Abstande r, die einander nach dem Gravitationsgesetze anziehen. Ihre Bewegungen mögen auf ihren Massenmittelpunkt bezogen werden, dessen Lage durch ihre Wechselwirkung nicht beeinflußt werden kann, sowie auf Axen durch ihn als Anfangspunkt, die man, in dem bereits erläuterten Sinne, als im Raume fest, betrachten kann (vergl. § 195). Die von m und m' ausgeübten Kräfte sind nach dem Massenmittelpunkt gerichtet und haben beide den gleichen Wert kmm'/r^2; die Beschleunigung von m ist km'/r^2, die von m' ist km/r^2, beide in derselben Linie in entgegengesetzten Richtungen. Alles das ist mit dem dritten Bewegungsgesetze in schönstem Einklange.

Nun aber nehme man an, daß m in Ruhe sei, dann ist die Beschleunigung von m', die nunmehr in Beziehung auf m zu nehmen ist, nicht mehr km/r^2, sondern $k(m+m')/r^2$, da doch eine Beschleunigung km'/r^2, nämlich eine der früheren von m gleiche und entgegengesetzte, auf beide Teilchen draufgeschlagen werden muß, um die Beschleunigung von m zu null zu machen; und da dies die relative Bewegung der beiden Teilchen nicht affiziert, kommt das eben angegebene Resultat heraus. Die entsprechende Kraft, die auf m' wirkt, ist daher jetzt $km'(m+m')/r^2$, die auf m ist null, das dritte Bewegungsgesetz ist also nicht mehr erfüllt.

Eine Betrachtung dieser Art über die Bewegung der Teilchen eines Systems, relativ zu einem von ihnen, das als ruhend angenommen wird, ist häufig zweckmäßig, namentlich bei der Betrachtung der Bewegungen der Satelliten eines Planeten; man muß aber dabei stets im Auge behalten, daß eine solche Betrachtung das dritte Bewegungsgesetz (Wechselwirkungsprinzip) verletzt und die Berechnung von Energieänderungen zweifelhaft gestaltet.

220. Nichtkonservative Kräfte. Arbeitsleistung bei der Überwindung von Reibung. Bis jetzt haben wir ausschließlich konservative Kräfte betrachtet und haben angenommen, daß die von diesen Kräften geleistete Arbeit ihr Äquivalent finde in der in dem System erzeugten kinetischen Energie. Es gibt indessen Kräfte, wie die von der Art der Reibungskräfte, Kräfte, zu denen wir auch alle Bewegungswiderstände — soweit sie nicht von der Trägheit der Materie selbst herrühren — rechnen können, denen gegenüber scheinbar, auf den ersten Blick, Arbeit geleistet wird ohne Erzeugung irgend eines Äquivalents. So bewegt sich z. B. ein Körper längs der Oberfläche eines anderen — ein über einen Tisch hingeschobenes Buch kann als Veranschaulichung dienen —, und diese Bewegung erfährt einen Widerstand durch eine tangential in der Berührungsfläche der beiden Körper wirkende Kraft. Diese Kraft kehrt gleichzeitig mit der relativen Bewegung ihre Richtung um, und nach wie vor wird bei der Bewegung Arbeit gegen sie geleistet. Eine solche Kraft ist nichtkonservativ. Oder es bewegt sich ein Körper, z. B. eine Pendelkugel, durch ein Fluidum hindurch, und ihre Bewegung erfährt einen Widerstand, der von der Geschwindigkeit der Kugel relativ zum Fluidum abhängt. Auch diese Kraft ist von nichtkonservativem Charakter.

221. Umwandlung von Wärme in gewöhnliche dynamische Energie. Wärmemaschinen. Bevor die Entdeckungen der modernen Thermodynamik Licht in die Sache brachten, hatte es den Anschein, als ob Arbeit, die zur Überwindung von Reibung verwandt wird, ohne Äquivalent verloren ginge. Gegenwärtig ist, dank namentlich den Untersuchungen von Robert Mayer und Joule, bekannt, daß, wenn Arbeit in dieser Weise verbraucht wird, in einem dieser Arbeit direkt proportionalen Grade Wärme erzeugt wird, und daß umgekehrt Wärme eine Form von Energie ist, welche zur Erzeugung mechanischer Arbeit benutzt werden kann. Mit der Frage der Umwandlung von Wärmeenergie in mechanische Arbeit werden wir uns in dem Abschnitte über Thermodynamik eingehend beschäftigen; an dieser Stelle wollen wir uns darauf beschränken, die hauptsächlichen Modifikationen anzugeben, welche die Bewegungsgleichungen eines materiellen Systems erfahren, wenn man in sie nichtkonservative oder, wie man sie zuweilen auch nennt, dissipative oder zerstreuende Kräfte einführt. Es mag gleich hier festgestellt werden, daß zur Umwandlung von Wärmeenergie in Konfigurationsenergie der in Wechselwirkung stehenden Teile eines materiellen Systems, oder in die Energie der relativen Bewegungen sichtbarer Körper zwei Körper von verschiedenen Temperaturen durchaus erforderlich sind, und daß, selbst in den günstigsten Fällen von Umwandlung (ausgenommen den, wo der eine der beiden Körper auf dem sogenannten absoluten Nullpunkt der Temperatur sich befindet), ein Teil der aufgewandten, jedesmal von dem wärmeren Körper her-

stammenden Wärme nach dem kälteren Körper übergeführt wird, also in der Form von Wärme verbleibt, so daß die Umwandlung in mechanische Energie unvollständig ist. Der wärmere Körper, welchem die Wärme von der arbeitenden Substanz entnommen wird, heißt (in Verallgemeinerung eines bekannten Wortes) der Kessel; der kältere Körper, welcher Wärme von der arbeitenden Substanz empfängt, heißt der Kühler.

Der Prozeß besteht darin, daß ein materielles System, genannt die Arbeitssubstanz, durch einen geschlossenen Zyklus von Veränderungen hindurchgeführt wird, in dessen Verlaufe mehr Arbeit von der Arbeitssubstanz gegenüber den äußeren Kräften als von diesen gegenüber jener geleistet wird, so daß bei jedem Zyklus, bei jedem Umlaufe der Einrichtung, der Wärmemaschine oder kalorischen Maschine, wie man sie nennt, ein Überschuß von nutzbarer Arbeit gewonnen wird. Es geschieht das auf Kosten von Wärme, welche die Substanz aus dem Kessel entnimmt; und wenn während des Umlaufes keine Wärme auf andere äußere Körper übergeht als den Kühler, so findet die Differenz $W - w$ zwischen der dem Kessel entnommenen Wärmemenge W und der an den Kühler abgeführten Wärmemenge w ihr Äquivalent in der nach außen geleisteten Arbeit A. Der Zyklus heißt reversibel oder umkehrbar, wenn bei umgekehrtem Vollzuge der Operationen alle Wirkungen während der Reihe von Veränderungen genau umgekehrt werden, so daß also jetzt die Wärmemenge w aus dem Kühler entnommen, die Wärmemenge W an den Kessel abgeführt und die Arbeit $W - w$ von den äußeren Kräften auf die Arbeitssubstanz geleistet wird; die einen solchen Zyklus durchlaufende Maschine heißt ebenfalls reversibel oder umkehrbar. Eine derartige Maschine hat, wie sich später zeigen wird, den größten Wirkungsgrad, der unter den gegebenen Umständen möglich ist, d. h. bei ihr hat das Verhältnis A/W oder $(W - w)/W$ der nutzbaren Arbeit zur vom Kessel entnommenen Wärme den größtmöglichen Wert, woraus zugleich folgt, daß alle derartigen Maschinen denselben Wirkungsgrad haben, unabhängig von der Natur der Arbeitssubstanz. In diesem Sinne heißt eine solche Maschine auch eine vollkommene Maschine.

Findet während des Zyklus eine Abgabe von Wärme an äußere Körper statt, oder ist aus irgend einem Grunde das Verhältnis $(W - w)/W$ kleiner als bei einer vollkommenen Maschine, so heißt die Maschine unvollkommen, und der Zyklus ist nichtumkehrbar.

222. Nichtumkehrbare oder dissipative Kräfte. Eine sehr wichtige Eigenschaft der vorhin (§ 220) betrachteten Kräfte ist die Nichtumkehrbarkeit der Zyklen von Veränderungen, bei denen Arbeit gegen sie geleistet wird. Wenn ein Teilchen ein anderes anzieht, so muß durch Anwendung äußerer Kräfte Arbeit geleistet werden, um die Teilchen, entgegen ihrer Anziehung, voneinander zu entfernen; und

umgekehrt leistet die Anziehungskraft der Teilchen Arbeit gegen die äußeren Kräfte, wenn den Teilchen erlaubt wird, einander näher zu kommen. Nicht so bei Widerständen der hier betrachteten Art; welches auch die Richtung der Verrückung sein möge, immer muß Arbeit zur Überwindung dieser Widerstände geleistet werden; und infolgedessen ist, wenn ein System durch eine geschlossene Reihe von Verrückungen hindurchgeführt worden ist, die gegen die Widerstandskräfte geleistete Arbeit nicht null, sondern eine bestimmte positive Größe. Derartige Zyklen sind daher von irreversiblem oder nichtumkehrbarem Charakter, und die Kräfte dieser Art sind als dissipative oder zerstreuende Kräfte zu bezeichnen.

Jedes System, in welchem solche Kräfte im Spiel sind, wie überhaupt jedes System, für das die Erhaltung der Energie nicht stattfindet, ist in Wahrheit nur ein Teil eines größeren, in sich abgeschlossenen, sich selbst überlassenen Systems. Zyklische Veränderungen des letzteren sind umkehrbar, und das Erhaltungsgesetz ist erfüllt. Die von den dissipativen Kräften erzeugte Wärme ist möglicherweise in der ersten Zeit nur kinetische Energie von Teilchen Partialsystems, von Teilchen, deren Koordinaten anzugeben wir auf des betrachteten Systems oder eines mit ihm in Beziehung stehenden keine Weise in der Lage sind. Und folglich sind wir auch nicht im stande, diese Energie innerhalb des Systems festzuhalten oder, wenn wir sie festhalten könnten, sie vollständig auszunutzen (vergl. § 224).

223. Zerstreuung oder Entwertung der Energie. Die Bezeichnung „zerstreuende Kräfte“ ist angebracht, sobald die gegen sie geleistete Arbeit ihr Äquivalent findet in der Form von Wärme; und von dieser ist oben festgestellt worden, daß es selbst in den günstigsten Fällen unmöglich ist, sie vollständig in die Energie von relativen Lageänderungen oder von Bewegung sichtbarer Massen zurückzuverwandeln. Der von einer Wärmemaschine im allgemeinen an den Kühler oder an äußere Körper abgegebene Bruchteil der von ihr dem Kessel entzogenen Wärme wird durch Leitung und Strahlung auf alle in der Nachbarschaft befindlichen Körper übertragen, welche durch diese Prozesse erreichbar sind, und dient dazu, ihre Temperatur zu erhöhen. Ebenso büßen durch Reibung erhitzte Körper durch jene Vorgänge einen Teil der in ihnen erzeugten Wärme, ja oft die ganze ein. In dem so eintretenden Zustande einer gleichförmigen Zerstreuung der Wärmeenergie ist dieselbe unbenutzbar, da die Nutzbarmachung an das Vorhandensein von Körpern verschiedener Temperatur geknüpft ist; dieser fortwährende Abfluß von Energie in die zerstreute Form infolge von Leitung und Strahlung, sowie der Rückfluß von Wärme in kältere Körper bei thermodynamischen Prozessen, vermehrt beständig den Betrag der in der unbenutzbaren Form aufgestauten Energie. Diese sich immerfort geltend machende, von Lord Kelvin, Clausius u. A. eingehend studierte

Tendenz der Energie, unbenutzbar zu werden, nennt man demgemäß **Zerstreuung** (Dissipation) oder **Entwertung** der Energie.

224. Einführung zerstreuender Kräfte in die Bewegungsgleichungen. Kehren wir jetzt zu den Bewegungsgleichungen eines Systems von Teilchen zurück und bezeichnen wir die Komponenten der auf ein Teilchen tatsächlich wirkenden Kräfte mit X, Y, Z, die Komponenten der an dem Teilchen anzubringenden zerstreuenden Kräfte mit X_0, Y_0, Z_0, also die Komponenten der wirklich Beschleunigung erzeugenden Kräfte mit $X - X_0$, $Y - Y_0$, $Z - Z_0$. Die Kräfte X, Y, Z sind im allgemeinen konservative Naturkräfte, d. h. sie lassen sich von einem Potential V ableiten. Die Bewegungsgleichungen eines Teilchens von der Masse m sind nunmehr

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X - X_0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y - Y_0, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z - Z_0 \qquad (54)$$

oder

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x} - X_0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y} - Y_0, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z} - Z_0 \qquad (54\,a)$$

und die Variationsgleichung wird

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) \\ = \Sigma(X_a\delta x + Y_a\delta y + Z_a\delta z) \\ - \Sigma(X_0\delta x + Y_0\delta y + Z_0\delta z) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (55)$$

wo X_a, Y_a, Z_a dieselbe Bedeutung haben wie in § 214; endlich ergibt sich an Stelle von Gl. (40)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU}{dt} = \Sigma\left(X_a\frac{dx}{dt} + Y_a\frac{dy}{dt} + Z_a\frac{dz}{dt}\right) \\ - \Sigma\left(X_0\frac{dx}{dt} + Y_0\frac{dy}{dt} + Z_0\frac{dz}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (56)$$

oder, wenn V eingeführt wird, also an Stelle der Gl. (52 a):

$$\frac{d(U+V)}{dt} = -\Sigma\left(X_0\frac{dx}{dt} + Y_0\frac{dy}{dt} + Z_0\frac{dz}{dt}\right) \quad . \; . \quad (57)$$

225. Sichtbare und verborgene Koordinaten. Zerstreuungsgrad der Energie. $U + V$ ist die ganze Energie, d. h. die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie der sichtbaren Körper des Systems, d. h. der Körper oder Körperteile im Gegensatz zu den Molekeln oder kleinsten Teilchen, aus denen sie, wie wir häufig annehmen, zusammengesetzt sind. Stellt man sich überhaupt einmal auf den Boden der Molekularhypothese, so kann man nicht darüber im Zweifel

sein, daß Wärme in der kinetischen Energie der Molekularbewegungen besteht, und daß, wenn die Temperatur steigt, diese Bewegungen lebhafter werden; nur kann man die Bewegungen dieser kleinen Teilchen nicht individuell behandeln oder ihnen im einzelnen willkürliche Bedingungen auferlegen; sie kommen immer nur mit ihrem Durchschnittsbetrage für endliche Teile des Körpers, also für außerordentlich viele Molekeln in Betracht. Von der gewöhnlichen Energie E (d. h. $U + V$) sagt man: es sei die Energie der sichtbaren Koordinaten und Bewegungen, und im Gegensatze dazu bezeichnet man Wärme als die Energie verborgener oder unsichtbarer Koordinaten und Bewegungen, nämlich der Koordinaten und Bewegungen der hypothetischen Molekeln. Es ist sogar nicht unmöglich, daß auch noch ein Teil von E selbst, nämlich die potentielle Energie der sichtbaren Koordinaten, sich auf die kinetische Energie verborgener Koordinaten, sei es der Materie selbst oder des sie durchdringenden Äthers zurückführen lassen werde — dann gäbe es überhaupt nur noch aktuelle Energie, teils solche der sichtbaren, teils solche der verborgenen Bewegung.

Der Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. (57) zeigt, daß die Summe der aktuellen und der potentiellen Energie, also die ganze Energie der sichtbaren Teile, in dem dort angegebenen Maße abnimmt; der Ausdruck rechts hinter dem Minuszeichen kann also als Zerstreuungsgrad der Energie bezeichnet werden.

226. Ein Körper auf einer schiefen Ebene mit rauher Oberfläche. Das folgende einfache Beispiel wird das soeben gewonnene Resultat erläutern. Ein Körper gleitet auf einer schiefen Ebene eine Strecke s durch die Wirkung der Schwerkraft hinab und erfährt dabei einen Widerstand durch die Reibung zwischen der Ebene und seiner auf ihr aufliegenden Fläche. Es sei α die Neigung der Ebene gegen die Horizontale, m die Masse des Körpers und R der auf ihn wirkende, flächenaufwärts gerichtete Reibungswiderstand, von dem wir annehmen, daß er während der Verrückung unverändert bleibe. Anfangs sei die Geschwindigkeit des Körpers v_0, seine potentielle Energie V_0, dann hat man

$$U + V = \tfrac{1}{2} m v_0^2 + V_0.$$

Die flächenabwärts gerichtete Komponente der Schwerkraft ist $mg \sin \alpha$, also die ganze längs der Fläche wirkende Kraft $mg \sin \alpha - R$, demgemäß ist die bei der Verrückung geleistete Arbeit gleich $(mg \sin \alpha - R)s$, und der Verlust an potentieller Energie ist $mgs \sin \alpha$. Anderseits ist die Beschleunigung flächenabwärts gleich $g \sin \alpha - R/m$, und zwar ist sie während des ganzen Herabgleitens dieselbe. Ist also v die Endgeschwindigkeit, so ist die zur Zurücklegung der Strecke s erforderliche Zeit gleich

$$t = \frac{v - v_0}{g \sin\alpha - \frac{R}{m}}.$$

Folglich ist nach § 90:

$$s = \tfrac{1}{2}(v + v_0)t = \tfrac{1}{2}\frac{v^2 - v_0^2}{g \sin\alpha - \frac{R}{m}}.$$

Die kinetische Energie ist am Ende

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgs \sin\alpha - Rs + \tfrac{1}{2}mv_0^2;$$

addiert man hierzu die schon gefundene potentielle Energie

$$V_0 - mgs \sin\alpha,$$

so erhält man:

$$U + V = mgs \sin\alpha - Rs + \tfrac{1}{2}mv_0^2 + V_0 - mgs \sin\alpha$$

oder

$$U + V = \tfrac{1}{2}mv_0^2 + V_0 - Rs = U_0 + V_0 - Rs;$$

oder endlich:

$$E = E_0 - Rs;$$

die Energie hat also einen Verlust erlitten gleich der zur Überwindung der Reibung aufgewandten Arbeit.

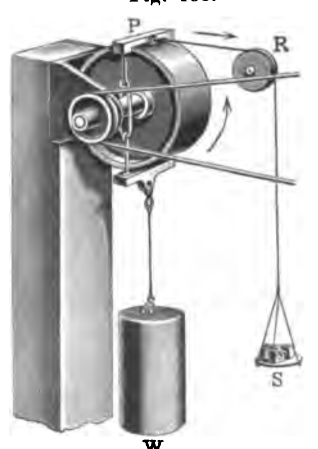
227. Reibungsgesetze. Statische und kinetische Reibung. Es ist hier der geeignete Ort, um die Reibungswiderstände zwischen Körpern, die sich relativ zueinander bewegen, etwas näher zu betrachten. In der Technik ist es gebräuchlich, zu unterscheiden zwischen der Reibung, welche statthat, wenn feste Körper sich direkt berühren, d. h. nur durch eine dünne Luftschicht voneinander getrennt sind, und dem Bewegungswiderstande, der auftritt, wenn die Körper durch eine Schicht Öl oder eines öligen Stoffes getrennt sind; man unterscheidet demgemäß zwischen „fester“ oder „trockener“ und „flüssiger“ oder „nasser“ Reibung und stellt für diese und jene besondere „Gesetze“ auf. Es sind aber Anzeichen dafür vorhanden, daß dies alles nur spezielle Fälle von Flüssigkeitsreibung sind, daß nämlich in Fällen, wo kein Schmiermittel im gewöhnlichen Sinne vorhanden ist, die Anwesenheit der Luftschicht zwischen den reibenden Körpern eine wichtige Rolle spielt.

Reibungskraft ist zwischen jedem Paare von Flächenelementen der beiden Körper wirksam, wenn sich diese Elemente berühren und relativ zueinander bewegen. Sie wirkt auf jedes der beiden Elemente tangential, und zwar in derjenigen Richtung, welche für das betreffende Element der Richtung der relativen Bewegung entgegengesetzt ist. Die wirkliche Ursache dieser Kraft muß noch durch weitere Untersuchungen klargelegt werden; jedenfalls ist sie von der Natur des Sicherungsdruckes, welcher dem Gleiten einer Fläche auf einer anderen, an welcher

sie adhäriert, Widerstand leisten würde, und darf nicht mit dem Widerstande zusammengeworfen werden, den die Bewegung eines Körpers erfährt, der in die Fläche, längs deren er sich bewegt, eingreift oder einschneidet und sie somit abreibt.

Reibungsversuche sind auf die verschiedenartigste Weise und mit den verschiedensten Apparaten ausgeführt worden; zur leichten Gewinnung eines Einblickes in die gewöhnlichen Verhältnisse bei der gleitenden Reibung (vergl. weiter unten über rollende Reibung) ist u. a. der in Fig. 133 angedeutete, von Perry angegebene Apparat recht geeignet. Der Apparat besteht aus einer vertikal gestellten Trommel mit breiter, glatter Mantelfläche; an der höchsten Stelle ist ein horizontales Querstück P angebracht, das durch ein Gewicht W getragen wird.

Fig. 133.



Die Trommel wird — mit der Hand oder mit einer kleinen Dampfmaschine — in gleichförmige Rotation versetzt, deren Geschwindigkeit mit einem Geschwindigkeitsmesser festgestellt wird. Infolge der Reibung zwischen der Trommeloberfläche und dem Querstück würde letzteres der Bewegung der ersteren, bis es durch einen Anschlag aufgehalten würde, folgen, wenn nicht durch eine horizontale Gegenkraft, in Gestalt eines durch eine Rolle R vermittelten Zuges von Gewichten in einer Wagschale S an der Bewegung eben verhindert würde. Durch Variierung der Oberflächen der Trommel und des Querstückes, des Gewichtes W und der Geschwindigkeit, wobei immer andere Gewichte auf S gelegt werden müssen, kann man alle wesentlichen sogenannten Reibungsgesetze verifizieren. Es sind das folgende:

1. Der Reibungswiderstand ist nahezu unabhängig von der Geschwindigkeit der relativen Bewegung, vorausgesetzt, daß die letztere nicht gar zu klein ist; in diesem letzteren Falle nimmt die Reibung, während die Geschwindigkeit bis auf null abnimmt, bis zu einem Maximum zu, das man als „statische“ Reibung bezeichnet.

2. Die Reibung ist von der Natur der reibenden Flächen abhängig, und zwar sowohl von ihrem Material als auch von ihrer Rauhigkeit oder Glätte; in letzterer Hinsicht besteht sie aus zwei Gliedern, deren erstes, die Rauhigkeitsreibung, desto größer ist, je rauher die Flächen sind, deren zweites, die Adhäsionsreibung, desto größer ist, je glatter die Flächen sind.

3. Mit der Größe der in Kontakt befindlichen Flächen ist die Gesamtreibung direkt proportional, d. h. die Reibung pro Flächeneinheit ist immer dieselbe.

4. Die Reibung ist mit der Kraft, durch welche die eine Fläche auf die andere gepreßt wird, direkt proportional, sie ist geradezu gleich diesem Druck, multipliziert mit einer Zahl, die, wenn keine tatsächliche Abreibung der Flächen stattfindet, stets kleiner als 1 ist und Reibungskoeffizient genannt wird. Für Holz auf Holz (trocken) variiert der Reibungskoeffizient zwischen 0,25 und 0,5; für Metall auf Metall zwischen 0,15 und 0,2; besonders klein, nämlich etwa 0,025, ist sie z. B. für Eisen auf Eis (Schlittschuhe).

Statische Reibung ist, wie bereits festgestellt wurde, größer als kinetische oder dynamische. Der Betrag der statischen Reibung, der in verschiedenen Fällen entwickelt wird, variiert von null bis zu einem Maximum, er ist nie größer als der zur Verhinderung von Bewegung erforderliche. Es ruhe z. B. ein Körper auf einer unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten Ebene, so daß die flächenabwärts wirkende Schwerkraft gleich $mg \sin \alpha$ ist. Ist dies weniger als der größtmögliche Wert der statischen Reibung, so ist trotzdem letztere, in der Richtung flächenaufwärts, nur gleich $mg \sin \alpha$; denn wenn eine größere Gegenkraft entwickelt würde, würde doch der Körper sich flächenaufwärts bewegen, was dem Begriffe des Reibungswiderstandes widerspräche. Der Bruchteil der größtmöglichen statischen Reibung, welcher zur Geltung gelangt, wird zuweilen als Koeffizient der statischen Reibung bezeichnet.

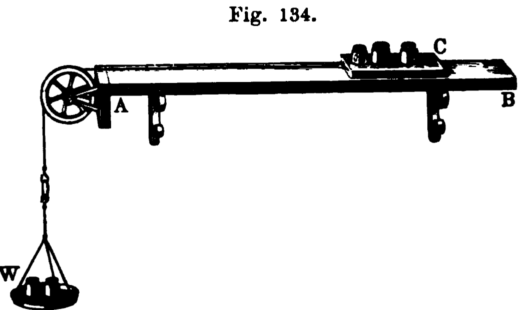
228. Reibungsversuche. Bestimmung des Reibungskoeffizienten. Mit Hilfe des in Fig. 133 skizzierten Apparates, an dem jedoch das Querstück, der Schlitten, sich über ein beträchtliches Bogenstück der Trommel erstreckte, fand Perry, daß mit wachsender Rotationsgeschwindigkeit die Reibung abnahm, bis sie ein Minimum erreichte, und daß sie alsdann bei weiterer Steigerung der Geschwindigkeit wieder zunahm. Es zeigte sich, daß dieses Verhalten davon herrührte, daß in den gekrümmten Raum zwischen den beiden Flächen Luft gepumpt wurde, so daß der Druck von Punkt zu Punkt variierte; durch Einführung kleiner Druckmesser konnte das konstatiert werden. Infolgedessen wurde der Apparat durch einen anderen ersetzt, bei welchem der Schlitten durch ein Gewicht gegen die obere Fläche einer in horizontaler Ebene rotierenden Scheibe gedrückt wird, so daß beide Flächen ganz eben sind.

Sehr instruktive Experimente können indessen auch mit dem einfachen Laboratoriumsapparate angestellt werden, der in Fig. 134 (a. f. S.) abgebildet ist und sich selbst erklärt. Die Kontaktflächen können variiert werden, indem man auf das Brett AB eine Platte aus dem einen der beiden Materialien auflegt und für den Schlitten C ein Stück des anderen benutzt. Der Druck, der zwischen den Kontaktflächen wirksam ist, wird durch das Gewicht von C samt seiner Belastung, die Reibung anderseits durch das Gewicht der Schale samt Belastung W

gemessen, wobei allerdings die Reibung des Fadens an dem Rädchen einen kleinen Fehler verursacht. Der Apparat ist im wesentlichen demjenigen nachgebildet, mit dem Morin seine Versuche über die Reibungskoeffizienten für verschiedene Stoffpaare ausführte.

Zunächst macht man nun mit diesem Apparate die Wahrnehmung, daß der Widerstand vor Ingangsetzung der Bewegung stets größer ist als derjenige, welcher sich nachher geltend macht, so daß das Gewicht in der Wagschale, welches gerade genügt, um die Bewegung in Gang zu bringen, nachher, wenn die Bewegung im Gange ist, Beschleunigung hervorruft. Man muß also ein etwas kleineres Gewicht anwenden und, um trotzdem die Bewegung in Gang zu bringen, dem Schlitten C einen leichten Stoß versetzen; zeigt sich nun, daß die Bewegung gleichförmig ist, so ist das Gewicht gerade richtig. Ob die Bewegung gleichförmig sei, dafür gewinnt man, auch ohne wirkliche Messungen zu machen, durch die bloße Beobachtung sehr bald einen ziemlich empfindlichen Blick. Durch Variierung der Belastung findet man alsdann, daß die Reibung R proportional mit dem Normaldruck N zwischen den Flächen ist, also $R = \mu N$, und zwar unabhängig davon, mit welcher Geschwindigkeit die beiden Flächen gegeneinander bewegt werden.

Fig. 134.

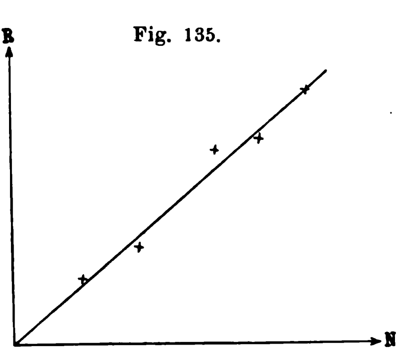


Es möge hier eine pädagogische Bemerkung eingeschaltet werden. Der Beobachter tut gut daran, sich von vornherein daran zu gewöhnen, die gewonnenen Beobachtungsergebnisse nicht bloß zahlenmäßig in sein Notizbuch einzutragen, sondern ihre Bedeutung auch noch durch die sehr anschauliche graphische Darstellung zu prüfen, indem er sie in sogenanntes Millimeter- oder Koordinatenpapier, d. h. in kleine, gleich große Quadrate in nicht zu aufdringlicher Weise geteiltes Papier einträgt und zu Kurven verbindet; es ist sogar zu empfehlen, für vorläufige derartige Eintragungen das Notizbuch selbst zu benutzen, das zu diesem Zwecke mit einem Netzwerke versehen sein muß.

Eine derartige graphische Prüfung des Gesetzes $R = \mu N$ würde man erhalten, indem man die Werte von N, der willkürlichen Veränderlichen, als Abscissen, d. h. auf der horizontalen Grundlinie, angibt, die Werte von R, der Funktion, auf der von demselben Punkte ausgehenden linken Vertikallinie als Ordinaten und nun, den Beobachtungen gemäß, die Punkte aufsucht, deren Koordinaten N und R (x und y) sind. Liegen alle diese Punkte auf einer von links nach rechts ansteigenden geraden Linie, so ist das obige Gesetz bestätigt; überdies

findet man den Koeffizienten μ, indem man irgend einen Wert von R durch den entsprechenden Wert von N dividiert oder, da nicht alle Wertpaare von R und N genau denselben Quotienten geben werden, indem man die nicht exakt auf einer geraden Linie liegenden Punkte durch diejenige gerade Linie verbindet, für welche die Abweichungen der Punkte im ganzen am kleinsten sind, und den Tangens des Steigungswinkels dieser Geraden berechnet; dieser Tangens ist der beste Wert von μ (vergl. Fig. 135).

Fig. 135.



229. Messung des Reibungskoeffizienten auf einer schiefen Ebene. Sehr einfach gestaltet sich diese Beziehung, wenn ein Körper unter der Wirkung der Schwerkraft und der Reibung eine schiefe Ebene gleichförmig hinabgleitet; dann ist nämlich der Tangens des Steigungswinkels der schiefen Ebene geradezu der Wert von μ für die beiden in Berührung befindlichen Flächen. Ist nämlich die besagte Steigung gleich α, das Gewicht des Körpers gleich G, so ist die flächenabwärts gerichtete Komponente der Schwerkraft gleich $G \sin\alpha$, und da nach der Voraussetzung gerade keine Beschleunigung vorhanden sein soll, muß dies durch die flächenaufwärts wirkende Reibung R ausgeglichen werden. Anderseits ist der Normaldruck zwischen den Körpern, mit dem R proportional ist, gleich $G \cos\alpha$. Folglich hat man:

$$R = G \sin\alpha = \mu \, G \cos\alpha,$$

also:

$$\mu = \operatorname{tang}\alpha \quad \text{. . . . .} \quad (58)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann der Reibungskoeffizient in sehr bequemer Weise gefunden werden. Eine schiefe Ebene sei, wie dies in

Fig. 136.

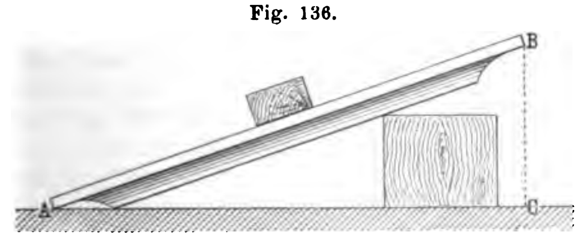


Fig. 136 angedeutet ist, durch zwei parallele Längsstücke von der Unterseite her derart versteift, daß durch die zur Anwendung kommenden Belastungen keine merkliche Durchbiegung verursacht werden kann; auf einem horizontalen Tische sei sie aufgestellt und werde nun

in eine solche Neigung gebracht, daß ein aufgelegter Klotz eben noch hinabgleitet. Mittels eines Lotes oder eines rechtwinkeligen Maßstabes kann man dann leicht den Punkt C feststellen und erhält dann, indem man BC und CA mißt und durcheinander dividiert, den Wert von μ.

Ferner lasse man den Klotz sich flächenabwärts bewegen, was eintreten wird, wenn $\alpha > arc\,tg\,\mu$ ist; die Wirkung der Ebene auf ihn besteht alsdann aus einer Kraft $G\cos\alpha$ senkrecht zur Ebene, und zwar von ihr nach dem Körper hin, und aus einer Kraft $\mu\,G\cos\alpha$ flächenaufwärts; die resultierende Kraft der Ebene auf den Körper ist daher der Größe nach gleich $\sqrt{1+\mu^2}\,G\cos\alpha$, und sie hat diejenige in der vertikalen Ebene der Bewegung gelegene Richtung, welche gegen die Richtung flächenaufwärts um den Winkel $arc\,tg\,1/\mu$ oder gegen die Normale zur schiefen Ebene um den Winkel $arc\,tg\,\mu$ geneigt ist. Bewegt sich der Körper flächenaufwärts, so ist die Reibung flächenabwärts gerichtet, und die Resultante der Wirkung der Ebene ist von derselben Größe wie vorhin, aber von entgegengesetzter Richtung.

Der Winkel $arc\,tg\,\mu$ heißt Ruhewinkel oder Reibungswinkel oder Grenzwinkel der Reibung.

Betrachten wir jetzt einen auf einer Ebene ruhenden Körper; der Reibungskoeffizient zwischen ihnen sei μ, und es werde auf den Schwerpunkt des Körpers eine Kraft K ausgeübt in einer Richtung, die mit der Flächennormale den Winkel θ, der kleiner als $arc\,tg\,\mu$ ist, bildet. Die normale Kraft ist $K\cos\theta$, die tangentiale $K\sin\theta$. Der größte Wert, den die der Bewegung Widerstand leistende Reibung haben kann, ist $\mu\,K\cos\theta$, und da

$$\cos\theta > \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

so ist:

$$\mu\,K\cos\theta > \frac{\mu K}{\sqrt{1+\mu^2}};$$

anderseits ist:

$$\sin\theta < \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

und folglich:

$$K\sin\theta < \frac{\mu K}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Folglich ist die tangentiale, von K herrührende Kraft, welche den Körper längs der Fläche zu bewegen strebt, kleiner als die größte Reibung, welche durch die Normalkomponente $K\cos\theta$ ins Spiel gerufen werden kann, d. h. der Körper wird durch die Kraft nicht in Bewegung gesetzt. Die Richtung einer Kraft, welche Bewegung zur Folge haben soll, muß also außerhalb des Kegels liegen, dessen Spitze im Schwerpunkte des Körpers liegt, dessen Axe die in diesem Punkte auf der Fläche senkrecht stehende Richtung ist, und dessen halber Kegelwinkel $arc\,tg\,\mu$ ist.

Der allgemeine Fall des Gleichgewichtes eines Teilchens auf einer rauhen Fläche wird in der Statik behandelt werden. Die Anwendung von Reibungsergometern zur Messung der Leistung von Maschinen wird in dem Kapitel über Maße und Messungen dargelegt werden.

230. Antifriktionsrollen und Kugellager. Wir werden von der Reibung noch weiter handeln im sechsten Kapitel im zweiten Bande unter „Zähigkeit"; bevor wir aber fürs erste den Gegenstand verlassen, wird es angebracht sein, die allgemeinen Prinzipien der Methoden anzugeben, durch die man bei zahlreichen Arten von Maschinen die Wirkungen der Reibung herabzumindern sucht. Häufig ist es die Reibung von Axen in Lagern, welche die Wirkung beeinträchtigt. Man betrachte z. B. das zylindrische Lager in Fig. 137; der relativen Bewegung, die überall tangential zu den zylindrischen Oberflächen ist, wird Widerstand geleistet, und wenn derselbe auch vielleicht an verschiedenen Stellen eines Lagers verschieden groß ist, so wirkt doch die

Fig. 137.

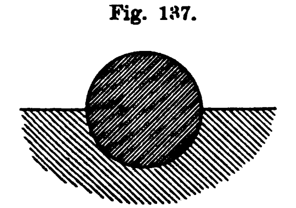
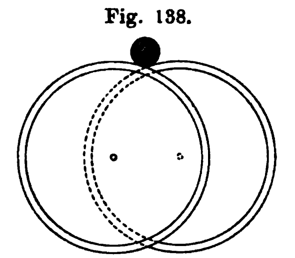


Fig. 138.



Reibung für alle Punkte in der gleichen Entfernung von der Mittellinie der Axe, übt also auf diese das Moment $r\Sigma K$ aus, wo r der Axenradius und ΣK die Summe der tangentialen Kräfte ist. Die bei der Überwindung der Reibung während einer Verrückung geleistete Arbeit ist $s\Sigma K$, wo s die Strecke ist. Nun ist aber für die Einheit der Zeit $s = 2\pi rn$, wo n die Tourenzahl (Zahl der Umdrehungen in der Zeiteinheit) der Axe ist; somit ist die Arbeit in der Zeiteinheit, d. h. der Effekt gleich $2\pi nr\Sigma K$, also gleich dem Produkte des Kräftepaares $r\Sigma K$ in dem Drehungswinkel für die Zeiteinheit. Sind in der Maschine mehrere solcher Lager vorhanden, mit den Kräftepaaren L_1, L_2 ... und den Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 . . ., so ist zur Überwindung der Reibung der Effekt $\omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \ldots = \Sigma\omega L$ erforderlich.

Dieser Effekt ist desto kleiner, je langsamer die Axen rotieren, je dünner die Axen sind und je geringfügiger die spezifische Reibung selbst ist. Außer durch Ölung u. s. w. kann also der Einfluß der Reibung stark herabgedrückt werden durch Verminderung der Durchmesser der Lager, und noch weiter durch besondere Anordnungen, von der Art, wie eine solche in Fig. 138 dargestellt ist. Hier ist jedes Ende der Axe eines Rades in den Winkel zwischen zwei übergreifenden Rädern eingelegt, welche selbst erst in festen Lagern ruhen. Die Axenenden

rollen auf den Rädern; und wenn jedes Gleiten vermieden ist, wird infolge ihrer relativen Bewegung gar keine Arbeit (oder nur die sehr geringfügige, der rollenden Reibung entsprechende) vernutzt. Ist wieder ω die Winkelgeschwindigkeit der Axe und r ihr Radius, ist ferner R der Radius jedes der Räder, auf denen die Axe liegt, so ist die Winkelgeschwindigkeit der letzteren offenbar gleich $\omega r/R$, und die Arbeit, die verloren geht, ist für die vier Räder nicht mehr $4\omega L$, sondern nur noch $4\omega L r/R$; sie ist also im Verhältnis von $r:R$ herabgemindert; dabei ist nur angenommen, daß die Axen der Seitenräder dieselbe Stärke haben wie das Hauptrad, und daß die Belastung durch die Hinzufügung der ersteren zu vernachlässigen sei. Sind die Axen verschieden stark (r und r'), so ist das Reduktionsverhältnis $r':R$; man muß also die Axen so dünn machen, als es mit den Festigkeitsansprüchen verträglich ist.

In ganz analoger Weise ist die Verminderung der verzögernden Wirkung der Reibung, welche bei Fahrrädern durch die Anwendung von Kugellagern eintritt, eine Folge des Ersatzes der ungünstigen, gleitenden durch die viel harmlosere rollende Reibung; Kugellager haben eben den Vorzug, gleitende Reibung vollständiger als andere Vorrichtungen auszuschließen, da die Kugeln sowohl im Kontakt mit der Drehungsaxe als auch im Kontakt mit dem relativ zur Maschine festen Lager rollen.

Die hier gegebene Erörterung der Friktionsräder ist, wie erwähnt werden muß, nicht als eine gründliche Behandlung des Gegenstandes anzusehen; für jeden praktischen Fall indessen, in dem das Zusatzgewicht vernachlässigt werden darf und die Räder hinreichend übergreifen, ist das angegebene Verhältnis r/R bezw. r'/R annähernd exakt.

231. Rollende Reibung. Damit werden wir zum letzten Gegenstande unserer Betrachtungen in diesem Abschnitte übergeleitet, zur rollenden Reibung. Ein Rad oder Zylinder berührt eine Schiene oder Ebene niemals in einem Punkte oder einer Linie, sondern stets in einer ganzen Fläche, die aus dem Punkte oder der Linie durch elastische Deformation der Körper an der Berührungsstelle entsteht. Dadurch wird ein leichtes Gleiten der Flächen aneinander und dadurch wieder eine Verzögerung der Bewegung herbeigeführt. So wird während der Umdrehungen eines Lokomotivrades eine Deformation des Radreifens verursacht, der das ganze Gewicht zu tragen hat, und entsprechend erfährt auch die Schiene eine Eindrückung. Dies erzeugt ein verzögerndes Kräftepaar von einem mit der gesamten Last W proportionalen Betrage cW. Ein auf einer rauhen Horizontalebene rotierendes Rad würde allmählich zur Ruhe gebracht werden durch jenes Kräftepaar und die gleitende Reibung, welche eingeführt werden muß behufs Erfüllung der kinematischen Gleichung $a\theta = s$, wo a der Radius des Rades, θ die Winkeldrehung desselben in einer bestimmten Zeit und s

die entsprechende Verrückung des Schwerpunktes ist. Nun sei die gleitende Reibung gleich R, das Trägheitsmoment des Rades um seine Axe gleich mk^2 (also m seine Masse, k sein Trägheitsradius), dann ist das die Bewegung aufhaltende Moment gleich $aR + cW$, also die Bewegungsgleichung:

$$mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -(aR + cW),$$

oder, wegen der vorhin aufgestellten Beziehung $a\theta = s$:

$$mk^2 \frac{d^2s}{dt^2} = -(aR + cW)a;$$

durch Verlegung von R in den Schwerpunkt wird aber $m\ddot{s} = R$, also:

$$k^2R = -(aR + cW)a,$$

und schließlich:

$$R = -\frac{acW}{a^2 + k^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

Das durch die rollende Reibung repräsentierte Kräftepaar verzögert also die Rotation und sucht an der tiefsten Stelle des Rades ein Vorwärtsgleiten hervorzubringen. Ihr entgegen wirkt die Kraft R, nämlich, wie das Vorzeichen in der Formel lehrt, in der der Bewegung entgegengesetzten Richtung, also nach rückwärts, sie sucht das Rad zum Stillstande zu bringen. Dabei wird Energie zerstreut, teils wegen der Arbeit gegen die gleitende Reibung, teils wegen der Zähigkeit (s. weiter unten) der Kontaktsubstanzen, welche sich fortwährend deformieren und wieder restituieren.

Das Kräftepaar der rollenden Reibung ist von Coulomb nach einer Methode experimentell bestimmt worden, die im wesentlichen darin bestand, daß man einen Zylinder auf eine rauhe Platte horizontal hinlegte und über ihn eine Schnur hing, deren Enden mit den Gewichten W einerseits und $W + w$ anderseits belastet waren. Der Wert von w, welcher eben gerade ein Herumrollen des Zylinders hervorrief, lieferte das Kräftepaar der rollenden Reibung nach der Formel wr, oder, wenn w als Masse gedacht wird, wgr, wo r der Radius des Zylinders und g die Beschleunigung durch die Erdschwere ist; hieraus läßt sich dann die gleitende Reibung in der angegebenen Weise ableiten.

Die Größe des Kräftepaares der rollenden Reibung kann, wie sich herausstellte, nie größer sein als ein gewisser Grenzwert; der in einem bestimmten Falle wirklich entwickelte Betrag ist der, welcher gerade ausreicht, um Rollen zu verhüten. Er hängt von den in Berührung befindlichen Stoffen ab und ist, wie bei der gleitenden Reibung, mit dem Normaldruck zwischen den Flächen proportional; auch scheint er bis zu einem gewissen Grade von ihren Krümmungen abzuhängen — eine Frage, die jedoch noch weiterer Prüfung bedarf.

232. Rollen eines Körpers auf einer schiefen Ebene. Als ein einfaches Beispiel für die Arbeit, die von der Schwerkraft bei gleichzeitiger Wirkung reibender Kräfte geleistet wird, wollen wir das Herabrollen einer homogenen Kugel oder eines solchen Zylinders auf einer schiefen Ebene betrachten, ein Fall, in welchem die Reibungskräfte keine Zerstreuung von Energie zuwege bringen; das Kräftepaar der rollenden Reibung wollen wir dabei vernachlässigen. Es sei α der Steigungswinkel der schiefen Ebene, m die Masse, a der Radius des rollenden Körpers und mk^2 sein Trägheitsmoment um die durch den Schwerpunkt gelegte horizontale Axe, also k der Trägheitsradius (beim Zylinder um die Axe, bei der Kugel um einen Durchmesser). Von dem Schwerpunkte nehmen wir an, daß er sich auf einer Linie stärkster Böschung der Ebene bewege, so daß, wenn der Körper ein Zylinder ist, die Axe stets die Schnittlinie der schiefen Ebene mit einer horizontalen Ebene ist. Die beiden auf den Körper wirkenden, Rollung erzeugenden Kräfte sind $mg \sin \alpha$ flächenabwärts durch den Schwerpunkt und R an der Berührungsstelle des Körpers mit der Ebene.

Ist also $\ddot{s}$ die Abwärtsbeschleunigung, so hat man für die Bewegung des Schwerpunktes die Gleichung

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg \sin \alpha - R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

und für die Bewegung des Körpers um den Schwerpunkt die Gleichung:

$$mk^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = Ra \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

wo θ der Winkel ist, den ein Radius des Körpers in der Rollebene mit einer im Raume festen Linie bildet. Das sind die beiden Bewegungsgleichungen.

Nun gilt aber die rein kinematische Beziehung $a\theta = s$, und folglich wird die zweite Bewegungsgleichung (61):

$$mk^2 \frac{d^2 s}{dt^2} = Ra^2.$$

Setzt man das in die erste Bewegungsgleichung (60) ein, so erhält man:

$$R = \frac{k^2}{a^2 + k^2} mg \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Das ist der Betrag an Reibung, der erforderlich ist, um reines Rollen hervorzurufen; mehr Reibung wird nicht entwickelt. Wenn indessen die Oberflächen so unvollkommen in ihrer Beschaffenheit sind, oder die schiefe Ebene so stark geneigt ist, daß reines Rollen nicht stattfinden kann, ist die oben benutzte kinematische Beziehung nicht anwendbar.

Die weiteren Betrachtungen mögen dem Leser überlassen bleiben; er möge nachweisen, daß, wenn die entwickelte Reibung kleiner als die durch Gl. (62) dargestellte ist, d. h. wenn

$$\mu < \frac{k^2}{a^2 + k^2} \tang \alpha$$

ist, die Strecke, welche, von der Ruhe ausgehend, in der Zeit t zurückgelegt wird, gleich

$$\tfrac{1}{2} g \, (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \, t^2,$$

und der Winkel, um den gleichzeitig eine Drehung stattfindet, gleich

$$\tfrac{1}{2} \mu \frac{a}{k^2} g \cos \alpha \, . \, t^2$$

ist.

Setzt man den Wert von R in Gl. (62) in Gl. (60) ein, so erhält man:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{a^2}{a^2 + k^2} g \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

und die Beschleunigung des Schwerpunktes ist gleichförmig. Die Geschwindigkeit, die in der Zeit t erreicht wird, und die entsprechende zurückgelegte Strecke sind daher:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a^2}{a^2 + k^2} gt \sin \alpha, \qquad s = \tfrac{1}{2} \frac{a^2}{a^2 + k^2} gt^2 \sin \alpha \quad . \quad . \quad (64)$$

speziell für eine Kugel wird $k^2 = 2/5 \; a^2$, und folglich:

$$\frac{ds}{dt} = \tfrac{5}{7} gt \sin \alpha, \qquad s = \tfrac{5}{14} gt^2 \sin \alpha,$$

für einen Zylinder wird $k^2 = 1/2 \, a^2$, und somit:

$$\frac{ds}{dt} = \tfrac{2}{3} gt \sin \alpha, \qquad s = \tfrac{1}{3} gt^2 \sin \alpha.$$

Wäre die Ebene reibungsfrei und glitte der Körper sie einfach hinab, so hätte man für jeden beliebigen Körper:

$$\frac{ds}{dt} = gt \sin \alpha, \qquad s = \tfrac{1}{2} gt^2 \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

man ersieht also durch Vergleichung, daß Geschwindigkeit des Schwerpunktes und zurückgelegte Strecke durch das Rollen im Verhältnis von

$$a^2 : a^2 + k^2$$

herabgemindert werden, speziell bei der Kugel im Verhältnis von 5 : 7, beim Zylinder im Verhältnis von 2 : 3, bei letzterem also, wie begreiflich, in etwas (aber nicht beträchtlich) stärkerem Maße.

Was nun die Energieverhältnisse betrifft, so ist in § 217 gezeigt worden, daß die kinetische Energie eines Körpers, der mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert und dessen Schwerpunkt die Geschwindigkeit $\dot{s}$ hat, gleich $\frac{1}{2} m \, (\dot{s} + k^2 \omega^2)$ ist. In unserem Falle wird somit die ganze kinetische Energie des Körpers gleich

$$\tfrac{1}{2} m \frac{a^2}{a^2 + k^2} g^2 t^2 \sin^2 \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

Anderseits ist der Verlust an potentieller Energie gleich mgh, wenn h die vertikale Höhe ist, um die der Körper gefallen ist, also gleich $mgs\,sin\,\alpha$; mit Berücksichtigung des Wertes von s aus Gl. (64) wird also:

$$mgh = \tfrac{1}{2} m \frac{a^2}{a^2 + k^2} g^2 t^2 \sin^2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

d. h. der Gewinn an kinetischer Energie ist genau so groß, wie der Verlust an potentieller; das Erhaltungsprinzip ist also gewahrt. Man hätte es sogar direkt benutzen können, um, in Verbindung mit der kinematischen Beziehung $s = a\theta$, die von dem Körper nach Zurücklegung der Strecke s erlangte Geschwindigkeit zu ermitteln.

233. Lösung eines alten Problems. Je größer k^2 ist, desto kleiner ist $\dot{s}$, also auch desto kleiner s für eine gegebene Zeit. Dies liefert die Lösung des alten Problems, eine massive, aber vergoldete Messing- oder Kupferkugel von einer hohlen Goldkugel zu unterscheiden, wenn beide gleiche Größe und gleiches Gewicht haben. Offenbar wird k^2 für die Hohlkugel größer sein als für die massive; in der Tat ist, wie man leicht nachprüfen kann, das Trägheitsmoment der Hohlkugel

$$T = \tfrac{2}{5} M \frac{r^5 - r'^5}{r^3 - r'^3},$$

wo M ihre Masse ist und r bezw. r' der äußere und der innere Radius sind; dagegen ist das Trägheitsmoment der Vollkugel

$$T_1 = \tfrac{2}{5} M r^2;$$

jenes kann man aber in der Form

$$T = \tfrac{2}{5} M \left(r^2 + \frac{(r^2 - r'^2)\, r'^3}{r^3 - r'^3} \right)$$

schreiben, welche zeigt, daß es größer ist; daraus folgt natürlich, daß auch k für die Hohlkugel größer ist, und daraus wieder nach Gl. (64), daß die Geschwindigkeit des Herabrollens für sie kleiner ist. Legt man also die nach Größe und Gewicht gleichen Kugeln auf das obere Ende einer schiefen Ebene und läßt sie zu gleicher Zeit los, so wird die Vollkugel früher unten ankommen, und man hat ein Unterscheidungsmittel zwischen ihnen.

Setzt man für Gold die Dichte $\varrho = 19{,}3$, für Kupfer mit Rücksicht auf die dünne Goldschicht $\varrho = 9{,}1$, so erhält man als Verhältnis der Hohlkugelradien $1 : 0{,}81$ und schließlich als Verhältnis der Beschleunigungen, Geschwindigkeiten oder Strecken $1{,}38 : 1$, also einen ganz erheblichen Unterschied; nähme man statt Kupfer Aluminium, so wäre jenes Verhältnis sogar $1 : 0{,}95$ und dieses $1{,}59 : 1$.

234. Arbeitsleistung eines Impulses. Wir wollen am Schlusse dieses Abschnittes noch die von einem Impulse (§ 178) geleistete Arbeit betrachten. Gleichviel wie derselbe auf den Körper wirkt, er wird

durch das Zeitintegral der impulsiven Kraft gemessen, d. h. durch die ihr entsprechende Bewegungsgröße. Für den Fall eines einzelnen freien Massenteilchens m, das ursprünglich in Ruhe ist und nun die Geschwindigkeit v annimmt, ist der Impuls einfach mv, die kinetische Energie, die das Teilchen gewinnt, $\frac{1}{2}mv^2$, ebenso groß also auch die geleistete Arbeit. In dem allgemeineren Falle, wo das Teilchen schon von vornherein eine Geschwindigkeit u hat und nun die Geschwindigkeit v annimmt, ist der Zuwachs der Bewegungsgröße $m\ (v - u)$, und hierdurch wird der Impuls gemessen; die gewonnene kinetische Energie ist $\frac{1}{2}m\ (v^2 - u^2)$, und hierdurch wird die geleistete Arbeit gemessen. Daraus ergibt sich, daß die Arbeit in diesem Falle gleich dem Impulse mal $\frac{1}{2}(u + v)$ ist, d. h. gleich dem Impulse mal dem Mittelwert der Anfangs- und Endgeschwindigkeit; von der Art, wie die Impulsivkraft während der Dauer τ des Impulses variiert, ist die Arbeit gänzlich unabhängig.

Wenn nun durch den Angriff eines Impulses die Geschwindigkeit eines Punktes eines Systems in einem unendlich kleinen Zeitteilchen τ von u auf v geändert wird, so kann die dabei geleistete Arbeit von derjenigen nicht verschieden sein, die geleistet werden würde, wenn der Punkt ein freies Teilchen wäre, da während der Zeit τ der Punkt keine Lagenänderung in bezug auf den Rest des Systems erfahren hat, und Bewegungswiderstände ohne solche Lagenänderung nicht auftreten können. Also gilt auch hier die Gleichung:

$$A = J.\frac{u + v}{2} \qquad (68)$$

235. Stab, durch einen seitlichen Impuls auf ein Ende in Bewegung gesetzt. Fall der kleinsten Energie. Wir wollen hier die Arbeit des Impulses betrachten, der in dem Falle des § 180 wirkt. Hier wird der Körper mit gegebener Geschwindigkeit v des Endes, auf welches der Impuls senkrecht zur Stabrichtung wirkt, in Bewegung gesetzt; wie wir gesehen haben, beginnt der Stab sich um einen Punkt zu drehen, der um zwei Drittel der Länge von jenem Ende absteht, und seine Winkelgeschwindigkeit ist, wenn die Länge mit $2\,l$ bezeichnet wird, gleich $\frac{3}{4}\ v/l$.

Wir wollen nun für diesen Fall die kinetische Energie U berechnen und zeigen, daß sie gerade dann, wenn der Stab sich um den genannten Punkt dreht, ein Minimum ist. Dazu brauchen wir nur den Stab in zwei Teile zerlegt zu denken, einen von der Länge $2\,x$, den anderen von der Länge $2\,(l - x)$, beide mit der Winkelgeschwindigkeit $v/2\,x$ um den Punkt, in dem sie zusammenstoßen und der in Ruhe bleibt, sich drehend; setzen wir dann für die lineare Dichte des Stabes, d. h. für die Masse pro Längeneinheit ϱ, so erhalten wir leicht:

$$U = \frac{\varrho}{3}\,v^2 l\,\frac{l^2 - 3\,l\,x + 3\,x^2}{x^2} \qquad (69)$$

Um zu sehen, wann dies ein Minimum werde, setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{l^2 - 3\,lx + 3\,x^2}{x^2} = u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

so daß

$$x^2(3 - u) - 3\,lx + l^2 = 0$$

wird. Dies ist eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von x, welche offenbar reelle Wurzeln haben muß; damit dies der Fall sei, muß $9 > 4\,(3 - u)$, also $u > 3/4$ sein. Der kleinste mögliche Wert von u ist also $3/4$, und dieser Wert wird den quadratischen Ausdruck in ein vollkommenes Quadrat verwandeln, nämlich in $(\frac{3}{2}x - l)^2$; die Wurzeln der Gleichung werden dann einander gleich, nämlich jede: $x = \frac{2}{3}l$. Damit ist aber die Behauptung bewiesen, es ist gezeigt, daß von allen bei gegebener Geschwindigkeit des getroffenen Endes denkbaren Bewegungen des Stabes die wirkliche die von der kleinsten kinetischen Energie ist. Wie wir später sehen werden, ist dieses Ergebnis nur ein spezieller Fall eines allgemeinen, von Lord Kelvin gefundenen Satzes, betreffend die kleinste Energie.

236. Stab, durch einen seitlichen Impuls auf ein Ende in Bewegung gesetzt. Fall der größten Energie. Als Gegenstück zu dem obengenannten Satze gibt es einen von Bertrand gefundenen Satz von der größten Energie, und für ihn können wir das eben behandelte Beispiel gleichfalls verwerten, wenn wir nur statt der Geschwindigkeit den Impuls auf das getroffene Ende als gegeben annehmen.

Ist dieser Impuls wieder J, und v wieder die von dem getroffenen Ende angenommene Geschwindigkeit, so ist die Arbeit des Impulses, also auch die kinetische Energie $\frac{1}{2}vJ$. Setzt man dies demgemäß gleich der rechten Seite von Gl. (69), so hat man:

$$v\,\frac{l^2 - 3\,lx + 3\,x^2}{x^2} = \frac{3}{2}\,\frac{J}{l}\,.$$

Der Bruch links ist ein Minimum für $x = \frac{2}{3}l$; da nun sein Produkt mit v eine gegebene Konstante, nämlich $\frac{3}{2}\,\frac{J}{l}$ ist, muß v seinen Maximalwert haben, also auch $\frac{1}{2}vJ$. Das besagt also: Unter allen bei gegebenem Impulse denkbaren Bewegungen ist die wirkliche die von der größten kinetischen Energie.

Ehe wir die Theoreme von Bertrand und Lord Kelvin in ihrer Allgemeinheit betrachten, müssen wir uns indessen zu der von Lagrange gegebenen allgemeinen Grundlegung der Mechanik wenden.

Fünftes Kapitel.

Allgemeine dynamische Theorien.

---

237. Bewegung eines Systems von Teilchen. Kinematische Bedingungen und unabhängige Koordinaten. Auf die kinematischen Bedingungen, denen ein System unterworfen ist, wurde im vorhergehenden schon wiederholt Bezug genommen; es soll jetzt eine etwas eingehendere Behandlung des Gegenstandes folgen.

Betrachten wir zuerst ein System von n freien Teilchen, so sind zur Festlegung der Lage der letzteren $3n$ Gleichungen erforderlich, nämlich drei für jedes Teilchen. Man sagt, das System habe $3n$ Freiheitsgrade.

Ein starrer Körper anderseits hat drei Verschiebungsrichtungen, in denen sein Schwerpunkt sich bewegen kann, und drei Richtungen, um welche er sich drehen kann. Alle anderen Verschiebungen oder Drehungen können aus den genannten Verschiebungen bezw. Drehungen zusammengesetzt werden. Der starre Körper hat also, wenn man wieder obige Ausdrucksweise anwendet, sechs Freiheitsgrade. Er besteht, wie man sich vorstellen kann, aus einer großen Zahl, sagen wir n Teilchen und müßte eigentlich $3n$ Freiheitsgrade haben; aber durch die in der Bezeichnung „starr" zusammengefaßten, zwischen den Teilchen bestehenden Verknüpfungen wird die Zahl der Freiheitsgrade von $3n$ auf 6 reduziert.

Um die Konfiguration eines Systems von n Teilchen zu fixieren, sind $3n$ Gleichungen erforderlich. Ist das System m kinematischen Bedingungen unterworfen (vergl. oben § 215), so hat man außerdem m die Koordinaten der Teilchen miteinander verknüpfende Gleichungen, wobei natürlich $m < 3n$, also $3n - m$ positiv sein muß. Diese m kinematischen Gleichungen bestimmen beliebige m von den Koordinaten, ausgedrückt durch die $3n - m$ übrigen. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist damit auf $3n - m$ reduziert, und für jeden von ihnen muß eine Bewegungsgleichung vorhanden sein. Durch diese $3n - m$ Bewegungsgleichungen lassen sich die nach Benutzung der kinematischen

Gleichungen noch unbestimmt gebliebenen Koordinaten gerade bestimmen. Mit den Koordinaten der Teilchen ist aber die Konfiguration des ganzen Systems in dem betreffenden Augenblick vollständig fixiert.

Man kann in diesem Sinne nach Ausschaltung der kinematisch verknüpften Koordinaten von „unabhängigen Koordinaten" sprechen. Indessen muß darauf hingewiesen werden, daß die Unabhängigkeit von Koordinaten noch nicht die Schlußfolgerung zuläßt, daß in beliebiger Ordnung vorgenommene Superposition einer Anzahl von Variationen dieser Koordinaten im allgemeinen zu der gleichen resultierenden Verrückung führen muß. So wird die Drehung eines starren Körpers der Reihe nach durch den Winkel α um die x-Axe, durch den Winkel β um die y-Axe und durch den Winkel γ um die z-Axe zu verschiedenen Endzuständen führen je nach der Reihenfolge, in welcher die drei Drehungen vorgenommen werden; denn die von einem Körper infolge einer Drehung um eine feste Axe angenommene Lage ist eine Funktion der anfänglichen Lage des Körpers relativ zu dieser Axe, und zwar sowohl für den Fall, daß diese Axen im Raume, als auch für den Fall, daß sie im Körper fest sind.

Das Beispiel eines rechtwinkligen Parallelepipedons, das man um die drei mit seinen Kanten parallelen Koordinaten x, y, z oder um seine drei Hauptrichtungen a, b, c der Reihe nach um je 90^0 dreht, erläutert dies sehr anschaulich. Kennzeichnet man nämlich die Lage desselben dadurch, daß man zuerst die in die x-Richtung, dann die in die y-Richtung, zuletzt die in die z-Richtung fallende Kante nennt, und geht man etwa von der Lage *abc* aus, so erhält man folgendes Schema:

Drehung um	Endlage
x, y, z (oder z, y, x)	*cba*
y, z, x (oder x, z, y)	*bac*
z, x, y (oder y, x, z)	*acb*
a, b, c (oder c, b, a)	*cba*
b, c, a (oder a, c, b)	*bac*
c, a, b (oder b, a, c)	*acb*

Wie man sieht, bringt eine Reihenfolge von Drehungen dasselbe Ergebnis zu stande wie die genau umgekehrte Reihenfolge; dagegen bringen die beiden anderen möglichen Reihenfolgen andere Endlagen hervor. Ferner ist interessant, daß die Drehung um a, b, c dasselbe Resultat liefert wie die um x, y, z, obgleich die Zwischenlagen teilweise verschieden sind. Endlich sei gelegentlich bemerkt, daß jede solche Drehung um drei Axen durch einfache Drehung um die in der Reihenfolge mittelste ersetzt werden kann.

Wenn jedoch die Variationen der Koordinaten unendlich klein sind, so ist die Reihenfolge derselben gleichgültig, weil die durch Ab-

änderung der Reihenfolge bewirkten Änderungen in der schließlichen Konfiguration unendlich klein von der zweiten Ordnung sind.

Statt der Koordinaten können übrigens auch andere Größen eingehen, welche mit den Koordinaten durch so viele Gleichungen, als es unabhängige Koordinaten gibt, also durch $3n - m$ Gleichungen verknüpft sind; man bezeichnet diese Größen als Parameter. Aus den Parametern können die $3n$ Koordinaten alsdann mit Hilfe der eben genannten $3n - m$ Gleichungen und der m kinematischen Beziehungsgleichungen ermittelt werden.

Alles in allem handelt es sich also um $6n - m$ Größen, nämlich $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n, p, q, r \ldots$, und um ebensoviele Gleichungen, nämlich die $3n - m$ Bewegungsgleichungen, die $3n - m$ Gleichungen, welche die Parameter mit den Koordinaten verknüpfen, und die m kinematischen Gleichungen.

238. Ausdruck der kinetischen Energie in den verallgemeinerten Koordinaten. In § 215 sind die kinematischen Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

bereits aufgestellt worden. Nun drücke man die Koordinaten als Funktionen der Parameter aus:

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = \varphi_1(p, q, r \ldots), & y_1 = \chi_1(p, q, r \ldots), & z_1 = \psi_1(p, q, r \ldots) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n(p, q, r \ldots), & y_n = \chi_n(p, q, r \ldots), & z_n = \psi_n(p, q, r \ldots) \end{array}\right\} \quad (2)$$

und bilde ihre Differentialquotienten nach der Zeit:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial x_1}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial x_1}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Von den partiellen Differentialquotienten $\partial x_1/\partial p$ u. s. w. nehmen wir an, daß sie durch die Parameter $p, q, r \ldots$ ausgedrückt sind.

Setzt man nun diese Werte der Geschwindigkeitskomponenten in den Ausdruck

$$U = \tfrac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

für die kinetische Energie, so erhält man für diese eine quadratische Funktion der Differentialquotienten $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \ldots$, die man als „verallgemeinerte Geschwindigkeiten“ bezeichnen kann, und die Koeffizienten sind Funktionen der „verallgemeinerten Koordinaten“; man kann also schreiben:

$$U = \frac{1}{2}\left[(p,p)\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + 2(p,q)\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} + \cdots \right. \\ \left. + (q,q)\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + 2(q,r)\frac{dq}{dt}\frac{dr}{dt} + \cdots\right] \quad . \; . \quad (4)$$

wo die Symbole (p, p), (p, q) u. s. w. Ausdrücke in den Potenzen und Produkten der verallgemeinerten Koordinaten sind.

Die von uns als verallgemeinerte Koordinaten bezeichneten Parameter p, q, r . . . können die Koordinaten selbst oder irgend welche für die Lagen der Punkte oder für die Bewegung des Systems charakteristische Größen sein; sie müssen nur die Konfiguration des Systems in jedem Momente eindeutig bestimmen. So kann dp z. B. eine lineare Verrückung oder eine elementare Rotation oder eine kleine Menge Flüssigkeit sein, die durch einen Röhrenquerschnitt hindurchtritt u. s. w. Und jeder solchen Bedeutung der Parameter entspricht auch eine bestimmte „verallgemeinerte Kraft"; in den genannten Fällen sind die verallgemeinerten Kräfte bezw. eine Kraft im gewöhnlichen Sinne, ein Kräftepaar und ein Flüssigkeitsdruck. Das Produkt einer Kraft in eine Verrückung ist auch in dieser Verallgemeinerung stets eine Arbeit; es muß nur die Bedingung erfüllt sein, daß das Produkt der beiden die Arbeit bildenden Faktoren die Dimension einer Arbeit, d. h. $[ML^2T^{-2}]$ habe (vergl. § 191).

239. Verallgemeinerte Kräfte und Arbeitsgleichung. Wir wollen die den Koordinaten p, q, r . . . entsprechenden Kräfte mit P, Q, R . . . bezeichnen. In der folgenden Weise kann man sie aus der Arbeitsgleichung finden.

Nach Gl. (37) des vierten Kapitels ist die Variation der Arbeit:

$$\delta A = \Sigma(X_a \delta x + Y_a \delta y + Z_a \delta z) \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Setzt man hierin die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial p}\delta p + \frac{\partial x}{\partial q}\delta q + \cdots, \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial p}\delta p + \frac{\partial y}{\partial q}\delta q + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

($3n$ Gleichungen), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \delta A = &\Sigma\left(X_a\frac{\partial x}{\partial p} + Y_a\frac{\partial y}{\partial p} + \cdots\right)\delta p \\ &+ \Sigma\left(X_a\frac{\partial x}{\partial q} + Y_a\frac{\partial y}{\partial q} + \cdots\right)\delta q + \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (7)$$

Definiert man nun P, Q, R . . . durch die $3n - m$ Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} P &= \Sigma\left(X_a \frac{\partial x}{\partial p} + Y_a \frac{\partial y}{\partial p} + \cdots\right) \\ Q &= \Sigma\left(X_a \frac{\partial x}{\partial q} + Y_a \frac{\partial y}{\partial q} + \cdots\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

so erhält man:

$$\delta A = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Dies ist die Arbeitsgleichung in verallgemeinerten Koordinaten und Kräften.

240. Verallgemeinerte Lagrangesche Bewegungsgleichungen. Wir können nun auch die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen in ihrer verallgemeinerten Form aufstellen. Man kann auf verschiedenen Wegen zu ihnen gelangen; am einfachsten ist es, von den Bewegungsgleichungen eines Systems freier Teilchen auszugehen und diese geeignet zu transformieren. Betrachten wir demgemäß die Gleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

wo X die tatsächliche, die Beschleunigung $\ddot{x}$ erzeugende Kraft ist. Nun können wir in der Arbeitsgleichung, also auch in Gl. (7) die Kräfte X_a, Y_a, Z_a durch die tatsächlichen Kräfte ersetzen, da die bei diesem Verfahren hinzugefügten inneren Verknüpfungskräfte keine Arbeit leisten, also nur zu Gliedern führen, deren Summe identisch null ist. Statt Gl. (8) können wir also schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\left(X \frac{\partial x}{\partial p} + Y \frac{\partial y}{\partial p} + \cdots\right) &= P \\ \Sigma\left(X \frac{\partial x}{\partial q} + Y \frac{\partial y}{\partial q} + \cdots\right) &= Q \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

und hieraus ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen von der Form (10):

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial p} + \cdots\right) &= P \\ \Sigma m\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial q} + \cdots\right) &= Q \\ \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11\text{a})$$

Nun ist aber:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial p} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial x}{\partial p}\right) - \frac{dx}{dt} \frac{d\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)}{dt};$$

ferner läßt sich leicht nachweisen [mit Hilfe von Gl. (3)], daß

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial\left(\frac{dp}{dt}\right)}, \quad \frac{d\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)}{dt} = \frac{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial p},$$

also:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial\left(\frac{dp}{dt}\right)}\right) - \frac{dx}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial p}$$

ist; folglich erhalten wir:

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial p} + \cdots\right)$$

$$= \Sigma m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial\left(\frac{dp}{dt}\right)} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\partial\left(\frac{dp}{dt}\right)} + \cdots\right)$$

$$- \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial p} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\partial p} + \cdots\right).$$

Vergleicht man dies mit der kinetischen Energie, so sieht man leicht ein, daß die rechte Seite den Wert

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\left(\frac{dp}{dt}\right)} - \frac{\partial U}{\partial p}$$

hat; und da für die anderen Parameter entsprechende Gleichungen gelten, erhält man schließlich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\left(\frac{dp}{dt}\right)} - \frac{\partial U}{\partial p} &= P \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\left(\frac{dq}{dt}\right)} - \frac{\partial U}{\partial q} &= Q \\ \cdots\cdot & \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Dies sind die verallgemeinerten Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.

241. Bemerkungen über die Lagrangeschen Gleichungen. Dem Leser, dem diese Darstellung der allgemeinen Formulierung der Bewegungsbeziehungen neu ist, tut gut, sich die Bedeutung der dabei gebrauchten Begriffe, also in erster Linie den Sinn der in den Gleichungen vorkommenden Differentialquotienten, recht klar zu machen. Vorausgesetzt wird also zunächst, daß x, y, z für jedes Teilchen in p, q, r ... ausgedrückt sind, durch Gleichungen von der Form (2), derart, daß dann auch $\dot{x}$; $\dot{y}$, $\dot{z}$ durch $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$ ... ausgedrückt und daraus weiter $\partial\dot{x}/\partial\dot{p}$, $\partial\dot{x}/\partial\dot{q}$ ... ermittelt werden können. Alle diese letztgenannten Differentialquotienten sind partielle, d.h. es ist z.B. das Änderungsverhältnis $\partial\dot{x}/\partial\dot{p}$ unter der Annahme verstanden, daß von den Größen $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$... nur $\dot{p}$ sich ändert, die anderen aber konstant bleiben, und entsprechend in den anderen Fällen — eine Annahme, die in den meisten Fällen

natürlich nicht der Wirklichkeit entspricht, sondern eine in Gedanken vorgenommene Zerlegung, aber eine erlaubte Zerlegung bedeutet.

Wenn ferner $\partial(dx/dt)/\partial p$ an Stelle von $d(\partial x/\partial p)/dt$ geschrieben wird, so läßt sich das folgendermaßen rechtfertigen. Man schreibe statt $\partial x/\partial p$ zur Abkürzung w, dann hat man:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial w}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \cdots;$$

anderseits ist aber nach Gl. (3):

$$\frac{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial w}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \cdots;$$

es sind also wirklich die beiden in Rede stehenden Ausdrücke identisch.

Ferner ist auf eine wichtige Vorsicht beim Gebrauche der Lagrangeschen Gleichungen aufmerksam zu machen. Die Koordinaten $p, q, r \ldots$ müssen nicht bloß unabhängig sein, sie müssen auch in Verbindung mit den kinematischen Gleichungen im stande sein, die Konfiguration des Systems in jedem Augenblicke auszudrücken; das wird der Fall sein, wenn $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \ldots$ wie in Gl. (3) ausdrückbar sind. Die Nichtbeachtung dieses Umstandes hat manche Autoren zu starken Irrtümern geführt. Beispielsweise ist der Ausdruck der kinetischen Energie eines starren Körpers durch seine in einem bestimmten Augenblicke statthabenden Winkelgeschwindigkeiten um seine Hauptaxen als die Größe U in den Lagrangeschen Gleichungen benutzt worden; das ist aber keine für diesen Zweck geeignete Wahl der Geschwindigkeiten, da jene Axen sich mit dem Körper bewegen und die Winkelgeschwindigkeiten nichts über die Lage des Körpers im Raume besagen.

242. Lagrangesche Gleichungen für zerstreuende (dissipative) Kräfte. Wird das System von zerstreuenden Kräften beeinflußt, so daß die auf das Teilchen m wirkende, die Beschleunigung $\ddot{x}$ hervorrufende Kraft durch die Differenz $X - X_0$ dargestellt wird, wo X die eigentliche, X_0 die zerstreuende Kraft (vergl. § 224) ist, so bleiben die Gl. (11) ungeändert, dagegen treten an die Stelle der Gl. (11a) die neuen:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial p} + \cdots\right) \\ &\qquad = P - \Sigma\left(X_0\frac{\partial x}{\partial p} + Y_0\frac{\partial y}{\partial p} + \cdots\right) \\ &\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial q} + \cdots\right) \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &\qquad = Q - \Sigma\left(X_0\frac{\partial x}{\partial q} + Y_0\frac{\partial y}{\partial q} + \cdots\right) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Die rechtsstehenden Summen sind die verallgemeinerten zerstreuenden Kräfte. Bezeichnet man dieselben mit P_0, Q_0 ..., so erhält man als **Lagrange**sche Gleichungen mit Rücksicht auf die zerstreuenden Kräfte:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \frac{dp}{dt}} - \frac{\partial U}{\partial p} &= P_0 - P_0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \frac{dq}{dt}} - \frac{\partial U}{\partial q} &= Q - Q_0 \\ \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Sind die Hauptkräfte P, Q... konservativ, so ist

$$P = -\frac{\partial V}{\partial p}, \quad Q = -\frac{\partial V}{\partial q} \ldots,$$

wo V die potentielle Energie ist, also nur von den Koordinaten abhängt. Enthielte sie außer den Koordinaten auch noch die Zeit explizite, so würden zwar die Kraftkomponenten aus ihr abgeleitet werden können, aber die Erhaltung der Energie würde nicht stattfinden. Außer den konservativen und den dissipativen Kräften können, wie wir der Allgemeinheit wegen annehmen wollen, noch andere verallgemeinerte äußere Kräfte P_e, Q_e ... auf das System wirken, so daß sich schließlich ergibt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \frac{dp}{dt}} - \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial p} &= P_e - P_0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \frac{dq}{dt}} - \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} &= Q_e - Q_0 \\ \cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$U - V = L$$

setzt und beachtet, daß man in dem ersten Gliede jeder der Gl. (15) statt U ruhig L schreiben kann, da V von den Geschwindigkeiten $\dot{p}$, $\dot{q}$... nicht abhängt, seine Differentialquotienten danach also null sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \frac{dp}{dt}} - \frac{\partial L}{\partial p} &= P_e - P_0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \frac{dq}{dt}} - \frac{\partial L}{\partial q} &= Q_e - Q_0 \\ \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Die Größe L ist, wie bemerkt sein möge, bis auf das entgegengesetzte Vorzeichen identisch mit der Größe

$$H = V - U,$$

die v. Helmholtz mit dem treffenden Namen „kinetisches Potential" belegt hat; sie ist nämlich gleich dem um die kinetische Energie verminderten Potential und wird für den Ruhezustand das Potential selbst. Setzt man in die Gl. (16) H statt L, so bleiben sie bis auf die Zeichenumkehr einer der beiden Gleichungsseiten ungeändert.

243. Die Zerstreuungsfunktion. Entsprechende Form der Lagrangeschen Gleichungen. In einer wichtigen Klasse von Fällen sind die zerstreuenden Kräfte P_0, Q_0 ... aus einer homogenen quadratischen Funktion der Geschwindigkeiten $\dot{p}$, $\dot{q}$ ..., nämlich:

$$F = \frac{1}{2}\left(a_{11}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + 2\,a_{12}\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} + \cdots \right.$$
$$\left. + a_{22}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + 2\,a_{23}\frac{dq}{dt}\frac{dr}{dt} + \cdots\right),$$

ableitbar, und zwar durch Differentiation derselben nach den Geschwindigkeiten:

$$P_0 = -\frac{\partial F}{\partial \frac{dp}{dt}}, \quad Q_0 = -\frac{\partial F}{\partial \frac{dq}{dt}}, \cdots$$

Die Bewegungsgleichungen können alsdann

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \frac{dp}{dt}} - \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial \frac{dp}{dt}} + \frac{\partial V}{\partial p} &= P_e \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \frac{dq}{dt}} - \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial \frac{dq}{dt}} + \frac{\partial V}{\partial q} &= Q_e \\ \cdots\cdots\cdots & \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17)$$

geschrieben werden, und hier kann wiederum L oder H eingeführt werden.

Die Funktion F ist von Lord Rayleigh Zerstreuungsfunktion genannt worden; sie leistet wesentliche Dienste in der allgemeinen Theorie derjenigen Reibungswiderstände, welche von den ersten Potenzen der Geschwindigkeiten der Teile des Systems abhängen, und — nach Analogie — bei der dynamischen Theorie der sich wechselseitig influierenden elektrischen Ströme; es wird darauf später zurückgekommen werden.

244. Explizites Auftreten der Zeit in kinematischen Gleichungen. Es ist darauf aufmerksam zu machen, daß der Gedankengang, durch den die Lagrangeschen Gleichungen in § 241 gewonnen

wurden, durch das explizite Auftreten der Zeit t in den kinematischen Gleichungen (2) nicht beeinflußt wird. Der einzige Effekt hiervon ist der, kinematische Bedingungen zu liefern, die mit der Zeit veränderlich sind, und aus den Gleichungen (3) die neuen

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (18)$$

zu machen. Die Lagrangeschen Gleichungen bleiben also nach wie vor gültig.

Die kinetische Energie dagegen ist jetzt keine homogene Funktion der verallgemeinerten Geschwindigkeiten mehr, sie besteht vielmehr, mit Rücksicht auf die Größen $\partial x/\partial t$, $\partial y/\partial t$ ... aus drei Teilen, einer homogenen quadratischen Funktion der Geschwindigkeiten, einer linearen Funktion der Geschwindigkeiten, die außerdem von den Koordinaten abhängt und einem dritten Teile, der die Geschwindigkeiten gar nicht, wohl aber die Quadrate und Produkte der Größen $\partial x/\partial t$ ... enthält; die Koeffizienten der beiden ersten Teile sowie der dritte Teil selbst sind natürlich Funktionen der Koordinaten und der Zeit.

Es läßt sich zeigen, daß, wenn die kinematischen Bedingungen variieren, Arbeit auf das System geleistet werden muß, um sie zu erfüllen; indessen fehlt der Raum, um auf diese und andere Fragen hier einzugehen (vergl. jedoch oben § 215).

245. Verallgemeinerte Komponenten der Bewegungsgröße. Wenn man U, ausgedrückt wie in Gl. (4), partiell nach $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$ ... differenziert, so erhält man, wie sich leicht verifizieren läßt:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial U}{\partial\left(\frac{dp}{dt}\right)} = (p, p)\frac{dp}{dt} + (p, q)\frac{dq}{dt} + (p, r)\frac{dr}{dt} + \cdots \\ \frac{\partial U}{\partial\left(\frac{dq}{dt}\right)} = (p, q)\frac{dp}{dt} + \cdots + (q, q)\frac{dq}{dt} + (q, r)\frac{dr}{dt} + \cdots\end{array}\right| \quad . . (19)$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $\dot{p}$, die zweite mit $\dot{q}$ usf. und addiert alle, so erhält man:

$$2U = \frac{dp}{dt}\frac{\partial U}{\partial\left(\frac{dp}{dt}\right)} + \frac{dq}{dt}\frac{\partial U}{\partial\left(\frac{dq}{dt}\right)} + \frac{dr}{dt}\frac{\partial U}{\partial\left(\frac{dr}{dt}\right)} + \quad . . . \quad (20)$$

Die zweiten Faktoren in den Gliedern rechterseits sind, wie oben erläutert, lineare Funktionen der Geschwindigkeiten und können als verallgemeinerte Komponenten der Bewegungsgröße bezeichnet werden. Führt man für sie die Buchstaben ξ, η, ζ ein, so erhält man:

$$2U = \xi\frac{dp}{dt} + \eta\frac{dq}{dt} + \zeta\frac{dr}{dt} + \cdots \quad . . . . . \quad (21)$$

246. Kinetische Energie, ausgedrückt durch die verallgemeinerten Bewegungsgrößen. Reziproke Gleichungen. Es gibt natürlich genau so viele Komponenten der Bewegungsgröße, als es unabhängige verallgemeinerte Koordinaten gibt; die Gl. (19) sind daher unabhängig. Mit ihrer Hilfe können $\dot p$, $\dot q$, $\dot r \ldots$ als Funktionen von ξ, η, ζ und somit U als homogene quadratische Funktion der verallgemeinerten Bewegungsgrößen ausgedrückt werden. Es wird alsdann:

$$U = \tfrac{1}{2}\{[p,p]\xi^2 + 2[p,q]\xi\eta + \cdots + [q,q]\eta^2 + \cdots\} \quad . \quad . \quad (22)$$

wo eckige Klammern benutzt sind, um anzudeuten, daß die Koeffizienten $[p, p] \ldots$ in diesem Ausdrucke gänzlich verschieden von den Koeffizienten (p, p) in Gl. (4) sind; zur Unterscheidung soll U, wenn es in der Form (4) ausgedrückt ist, mit U, in der Form (22) aber mit U' bezeichnet werden; dabei besteht zwischen beiden nach Gl. (21) die Beziehung:

$$U' = -U + \xi\frac{dp}{dt} + \eta\frac{dq}{dt} + \zeta\frac{dr}{dt} + \cdots \quad . \quad . \quad (23)$$

Nun wird vorausgesetzt, daß in U' die Geschwindigkeiten $\dot p$, $\dot q \ldots$ durch ξ, η, $\zeta \ldots$ ausgedrückt sind; es wird daher:

$$\frac{\partial U'}{\partial \xi} = -\left(\frac{\partial U}{\partial \frac{dp}{dt}}\frac{\partial \frac{dp}{dt}}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \frac{dq}{dt}}\frac{\partial \frac{dq}{dt}}{\partial \xi} + \cdots\right) + \frac{dp}{dt} + \xi\frac{\partial \frac{dp}{dt}}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial \frac{dq}{dt}}{\partial \xi} + \cdots$$

Anderseits ist aber:

$$\xi = \frac{\partial U}{\partial \frac{dp}{dt}}, \quad \eta = \frac{\partial U}{\partial \frac{dq}{dt}}, \ldots$$

und folglich reduziert sich die rechte Seite der letzten Gleichungen auf $\dot p$ bezw. $\dot q$ usf. Man hat somit die zueinander gewissermaßen reziproken Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial \frac{dp}{dt}} = \xi, \quad \frac{\partial U}{\partial \frac{dq}{dt}} = \eta, \quad \frac{\partial U}{\partial \frac{dr}{dt}} = \zeta, \ldots \\ &\frac{\partial U'}{\partial \xi} = \frac{dp}{dt}, \quad \frac{\partial U'}{\partial \eta} = \frac{dq}{dt}, \quad \frac{\partial U'}{\partial \zeta} = \frac{dr}{dt}, \ldots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Schreibt man ferner dU'/dp für den gesamten Änderungsgrad von U' mit p, soweit es in U' durch seine Koeffizienten und durch ξ, $\eta \ldots$ auftritt, so wird mit Rücksicht auf Gl. (23):

$$\frac{dU'}{dp} = \frac{\partial U'}{\partial p} + \frac{\partial U'}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial p} + \frac{\partial U'}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial p} + \cdots$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\partial \xi}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \cdots$$

Es ist aber gezeigt worden, daß $\partial U'/\partial \xi = dp\, dt$ ist; schließlich erhält man also durch Vergleichung der beiden rechten Seiten:

$$\frac{\partial U'}{\partial p} = -\frac{\partial U}{\partial p}, \quad \frac{\partial U'}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

247. Hamiltonsche dynamische Gleichungen. Mit Hilfe von Gl. (24) und (25) nehmen die Lagrangeschen Gleichungen offenbar die Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial U'}{\partial p} &= P \\ \frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial U'}{\partial q} &= Q \\ \cdots\cdot \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Dies ist die den Bewegungsgleichungen von Sir W. R. Hamilton gegebene Form. Die Gleichungen besagen, daß der zeitliche Veränderungsgrad irgend einer Komponente der Bewegungsgröße zusammen mit dem Änderungsgrade der kinetischen Energie bei ausschließlicher Änderung des betreffenden Parameters, gleich der betreffenden verallgemeinerten Kraftkomponente ist; die kinetische Energie ist aber als Funktion der Komponenten der Bewegungsgröße mit Koeffizienten, die von den Parametern abhängen, gedacht. Daß auch zerstreuende Kräfte eingeführt werden können, ist schon oben erläutert worden.

Haben wieder die verallgemeinerten Kräfte ein Potential V, und wird die Summe $U' + V$ wieder mit E (Energie) bezeichnet, so gehen Gl. (26) in

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p}, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial q} \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (26\,\text{a})$$

über; und da man in den Gleichungen der zweiten Reihe von Gl. (24) statt U' ruhig E schreiben kann (denn V hängt doch nicht von $\xi, \eta \cdots$ ab), so wird, wieder gewissermaßen reziprok zu Gl. (26a):

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial E}{\partial \xi}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial E}{\partial \xi} \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26\,\text{b})$$

Die Gl. (26a) und (26b) stellen die berühmte kanonische Form der Bewegungsgleichungen dar; ihre Integration hat die Aufmerksamkeit zahlreicher Mathematiker und Physiker auf sich gelenkt.

248. Lagrangesche Gleichungen für impulsive Kräfte. Wenn die Kräfte P, Q ... von impulsivem Charakter (vergl. § 178) sind, nehmen die Lagrangeschen Gl. (12) die Form

$$\left.\begin{array}{l}\left[\dfrac{\partial U}{\partial \dfrac{dp}{dt}}\right]_0^\tau = [P], \quad \left[\dfrac{\partial U}{\partial \dfrac{dq}{dt}}\right]_0^\tau = [Q] \ldots \\ \xi - \xi_0 = [P], \quad \eta - \eta_0 = [Q] \ldots \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

oder

an, wo die eckigen Klammern linkerseits die Differenzen der eingeklammerten Werte am Ende und Anfang der Zeit τ, während deren der Impuls andauert, ξ und ξ_0 die entsprechenden Bewegungsgrößen und $[P]$, $[Q]$ ... die Zeitintegrale der impulsiven Kräfte P, Q ... über die Zeit τ sind. Die übrigen Glieder in den Gl. (26), nämlich $\partial U/\partial p$ usw., treten nicht auf, weil ihre Werte endlich sind, das Zeitintervall τ aber unendlich klein ist, ihr Beitrag also nicht in Betracht kommt. In Worten kann man also sagen: Die erzeugten verallgemeinerten Bewegungsgrößen sind gleich den Zeitintegralen der verallgemeinerten Kräfte, d. h. gleich den Impulsen.

Werden die Geschwindigkeiten zu Anfang und Ende der Zeit τ mit $\dot{p}_0$ und $\dot{p}$, $\dot{q}_0$ und $\dot{q}$ ... bezeichnet, so ist die von den Impulsen geleistete Arbeit:

$$A = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dp}{dt} + \frac{dp_0}{dt}\right)[P] + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dq}{dt} + \frac{dq_0}{dt}\right)[Q] + \cdots;$$

denn, wenn nur die Zeit τ sehr kurz ist, wird die Reihenfolge der Ausübung der Impulse gleichgültig sein. Berücksichtigt man nun die Gl. (27), so erhält man auch:

$$A = \tfrac{1}{2}\left\{(\xi - \xi_0)\left(\frac{dp}{dt} + \frac{dp_0}{dt}\right) + (\eta - \eta_0)\left(\frac{dq}{dt} + \frac{dq_0}{dt}\right) + \cdots\right\}.$$

249. Kinetische Energie bei der impulsiven Erzeugung von Bewegung. Nun läßt sich leicht durch Ausführung der Multiplikationen einsehen, daß die Identität

$$\xi \frac{dp_0}{dt} + \eta \frac{dq_0}{dt} + \cdots = \xi_0 \frac{dp}{dt} + \eta_0 \frac{dq}{dt} + \cdots \quad . \quad . \quad (28)$$

besteht; folglich kann man die Arbeit der Impulse auch in der Form

$$A = \tfrac{1}{2}\left(\xi \frac{dp}{dt} - \xi_0 \frac{dp_0}{dt} + \eta \frac{dq}{dt} - \eta_0 \frac{dq_0}{dt} + \cdots\right) \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

schreiben. Befindet sich das System anfänglich in Ruhe, so sind die Größen $\dot{p}_0$, $\dot{q}_0$ ... sämtlich null, und man hat für die am Ende der Impulszeit gewonnene kinetische Energie:

$$U = \tfrac{1}{2}\left(\xi \frac{dp}{dt} + \eta \frac{dq}{dt} + \cdots\right) = \tfrac{1}{2}\left([P]\frac{dp}{dt} + [Q]\frac{dq}{dt} + \cdots\right) \quad (30)$$

d. h. die erzeugte kinetische Energie ist gleich der halben Summe der Produkte der Impulse in die erzeugten Geschwindigkeiten.

250. Reziproke Beziehungen. Anwendung. Eine der Gl. (28) ähnliche reziproke Beziehung läßt sich, statt für die Bewegungsgrößen, auch für die Kräfte und die entsprechenden Verrückungen δp, $\delta q \dots$ aufstellen, vorausgesetzt, daß die potentielle Energie eine homogene quadratische Funktion der Koordinaten ist. Sind nämlich die Kräfte konservativen Charakters, sind δp_1, $\delta q_1 \dots$, die durch die Kräfte P_1, $Q_1 \dots$ und δp_2, $\delta q_2 \dots$, die durch ein anderes System von Kräften P_2, $Q_2 \dots$ bei der nämlichen Anfangskonfiguration hervorgebrachten Verrückungen, so ist

$$P_1 \delta p_2 + Q_1 \delta q_2 + \cdots = P_2 \delta p_1 + Q_2 \delta q_1 + \cdots \quad (31)$$

Dieser Satz rührt von Lord Rayleigh her und läßt sich leicht ableiten; er leistet bei zahlreichen praktischen Aufgaben nützliche Dienste.

Beispielsweise werde ein horizontaler Stab durch ein auf eine Stelle 1 aufgelegtes Gewicht durchgebogen und die Durchbiegung an einer anderen Stelle 2 beobachtet: wird jetzt, bei einem zweiten Versuche, die Stelle 2 mit demselben Gewichte belastet, so ist die Durchbiegung an der Stelle 1 dieselbe, wie bei dem ersten Versuche an der Stelle 2. Man kann das leicht experimentell verfolgen, indem man sich eines längs des Stabes verschiebbaren Gewichtes bedient. Der Satz erlaubt offenbar Fälle, die experimentell nicht oder schwierig zu behandeln sind, auf solche, die leicht untersucht werden können, zu reduzieren.

251. Lord Kelvins und Bertrands Sätze. Lord Kelvins Satz sagt aus: Wenn ein materielles System plötzlich dadurch in Bewegung gesetzt wird, daß gewissen Teilen des Systems, und nur diesen, durch geeignete Impulse bestimmte Geschwindigkeiten beigebracht werden, während die übrigen Teile freibleiben und lediglich diejenigen Geschwindigkeiten annehmen, welche sich aus den Verknüpfungen der Teile ergeben, so ist die resultierende Bewegung diejenige, für welche die kinetische Energie den kleinsten mit den vorgeschriebenen Geschwindigkeitsbedingungen verträglichen Wert hat.

Bertrands Satz anderseits sagt aus: Wird ein materielles System dadurch in Bewegung gesetzt, daß auf gewisse Teile desselben bestimmte Impulse ausgeübt werden, während die übrigen nur den inneren Bedingungen unterworfen bleiben, so ist die von ihm angenommene kinetische Energie größer als für irgend eine andere Bewegung, welche dem System beigebracht werden könnte durch dieselben Impulse in Verbindung mit irgend einem System anderer, keine Arbeit auf das Ganze leistender Impulse.

Diese Sätze lassen sich gemeinschaftlich wie folgt beweisen. Die verallgemeinerten Koordinaten mögen in zwei Gruppen, p_1, $p_2 \dots$ und q_1, $q_2 \dots$, eingeteilt werden, und es seien ξ_1, $\xi_2 \dots$ und η_1, $\eta_2 \dots$ die entsprechenden Impulse. Dann ist:

$$2\,U = \Sigma \xi \frac{dp}{dt} + \Sigma \eta \frac{dq}{dt} \quad \cdots\cdots \quad (32)$$

Für ein anderes, auf das System ausgeübtes System von Impulsen $\xi + \delta\xi$, $\eta + \delta\eta$ seien die Geschwindigkeiten $\dot p + \delta\dot p$, $\dot q + \delta\dot q$; dann ist:

$$2\,U' = \Sigma(\xi + \delta\xi)\left(\frac{dp}{dt} + \delta\frac{dp}{dt}\right) + \Sigma(\eta + \partial\eta)\left(\frac{dq}{dt} + \delta\frac{dq}{dt}\right) \quad (33)$$

Die Differenz beider Größen ist:

$$2\,(U' - U) = \Sigma\left(\frac{dp}{dt}\,\delta\xi + \xi\delta\frac{dp}{dt} + \delta\xi\delta\frac{dp}{dt}\right)$$
$$+ \Sigma\left(\frac{dq}{dt}\,\delta\eta + \eta\delta\frac{dq}{dt} + \delta\eta\delta\frac{dq}{dt}\right) \quad (34)$$

Nun möge die auferlegte Bedingung die sein, daß die p-Geschwindigkeiten gegeben sind, dann ist in den Ausdrücken für U und U' jedes $\delta\dot p = 0$. Sind die p-Geschwindigkeiten lediglich durch Impulse von Typus ξ erzeugt, so ist jedes $\eta = 0$, und nach Gl. (32) ist alsdann:

$$2\,U = \Sigma\,\xi\,\frac{dp}{dt}.$$

Sind die p-Geschwindigkeiten dagegen durch Impulse vom Typus $\xi - \delta\xi$, $\delta\eta$ hervorgerufen, so ist:

$$2\,U' = \Sigma\,(\xi + \delta\xi)\frac{dp}{dt} + \Sigma\left(\frac{dq}{dt}\delta\eta + \delta\eta d\frac{dq}{dt}\right).$$

Folglich hat man:

$$2\,(U' - U) = \Sigma\left(\frac{dp}{dt}\,\delta\xi + \frac{dq}{dt}\,\delta\eta + \delta\eta\delta\,\frac{dq}{dt}\right).$$

Nun sind aber die Geschwindigkeiten $\dot p$, $\dot q$ mit den entsprechenden Impulsen ξ, 0 einerseits und die Geschwindigkeiten $\dot p$, $\dot q + \delta\dot q$ mit den entsprechenden Impulsen $\xi + \delta\xi$, $\delta\eta$ anderseits, typisch für die beiden möglichen Bewegungen des Systems. Folglich wird, da aus dem Reziprozitätssystem Gl. (28)

$$\Sigma\,(\xi + \delta\xi)\frac{dp}{dt} + \Sigma\,\frac{dq}{dt}\,\delta\eta = \Sigma\xi\frac{dp}{dt},$$

oder kürzer

$$\Sigma\frac{dp}{dt}\,\delta\xi + \Sigma\frac{dq}{dt}\,\delta\eta = 0$$

folgt, schließlich:

$$2\,(U' - U) = \Sigma\delta\eta\delta\,\frac{dq}{dt} \quad \cdots\cdots \quad (35)$$

d. h. die kinetische Energie der ersten Bewegung ist kleiner als die irgend einer anderen mit denselben p-Geschwindigkeiten, und zwar um die kinetische Energie derjenigen Bewegung, welche, mit der ersten kombiniert, die letztere ergeben würde.

252. Fortsetzung. Entsprechend nehmen wir nun bei dem Bertrandschen Theorem an, es seien in dem ersten Falle die ξ-Impulse gegeben, alle η-Impulse dagegen gleich null; die entsprechenden, aus den inneren Verbindungen entspringenden Geschwindigkeiten sind durch den Typus $\dot{p}$, $\dot{q}$ ... dargestellt. Die Energie dieser Bewegung ist mit der Energie derjenigen Bewegung zu vergleichen, bei welcher die Impulse durch ξ und $\delta\eta$ dargestellt sind; hier sind die Geschwindigkeiten vom Typus $\dot{p} + \delta\dot{p}$, $\dot{q} + \delta\dot{q}$ ... mit der Bedingung

$$\Sigma\delta\eta\left(\frac{dq}{dt} + \delta\frac{dq}{dt}\right) = 0.$$

Nun ist nach Gl. (34)

$$2(U' - U) = \Sigma\left(\xi\delta\frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dt}\delta\eta + \delta\eta\delta\frac{dq}{dt}\right),$$

und das Reziprozitätstheorem Gl. (28) liefert für die beiden hier betrachteten möglichen Bewegungen die Beziehung

$$\Sigma\xi\delta\frac{dp}{dt} = \Sigma\frac{dq}{dt}\delta\eta;$$

es wird also schließlich:

$$2(U' - U) = -\Sigma\delta\eta\delta\frac{dq}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

d. h. die Energie der ersten Bewegung ist größer als die Energie irgend einer anderen, durch dieselben Impulse zusätzlich eines anderen, keine Arbeit auf das Ganze leistenden Systems von Impulsen erzeugten Bewegung, und zwar um die kinetische Energie derjenigen Bewegung, welche mit der ersten kombiniert werden muß, um die letztere zu ergeben.

Die beiden Sätze drücken, in verschiedener Form, den gleichen Gedanken aus, daß nämlich durch jeden einem System auferlegten Zwang dessen Trägheit vergrößert wird. So ist z. B. für eine einzelne Koordinate die Trägheit gleich $\xi/\dot{p}$ (denn es ist ja nach der Definition die Bewegungsgröße $\xi = m\dot{p}$); wird nun ξ fixiert, so nimmt $\dot{p}$ durch den Zwang ab, und die Energie wird kleiner (Bertrand); wird umgekehrt $\dot{p}$ fixiert, so wird ξ, also auch die Energie durch jeden Zwang vergrößert (Lord Kelvin); in beiden Fällen wächst aber infolge des Zwanges $\xi/\dot{p}$.

253. Prinzip der kleinsten Wirkung. Ein sehr allgemeines dynamisches Prinzip, aus dem die Bewegungsgleichungen abgeleitet werden können, und welches daher als die gesamte abstrakte Dynamik in sich enthaltend angesehen werden kann, ist das Prinzip der kleinsten Wirkung; in seiner ersten, noch recht unbestimmten Form, ist es von Maupertuis aufgestellt worden. Es kann hier nur ganz kurz erwähnt werden. Seine weitere Ausbildung und exakte Gestaltung

hat es durch zahlreiche hervorragende Mathematiker und Physiker erfahren, unter denen insbesondere Euler und Lagrange, Hamilton und Jacobi, und in der neuesten Zeit v. Helmholtz zu nennen sind. Der Leser, der sich näher damit beschäftigen will, sei auf die bezüglichen Schriften der genannten Autoren hingewiesen.

Ein System bewege sich in dem Zeitintervall von t_0 bis t_1 in der Weise, daß es aus einer bestimmten Anfangs- in eine bestimmte Endkonfiguration übergeht. Unter „Wirkung“ soll das doppelte Zeitintegral der kinetischen Energie, d. h. die Größe

$$W = 2\int_{t_0}^{t_1} U dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

verstanden werden. Wenn die verschiedenen Teilchen bei dem betrachteten Vorgange Bahnen beschreiben, deren Repräsentant s ist, so ist:

$$2\,U dt = \Sigma m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 dt = \Sigma m \frac{ds}{dt} ds,$$

und folglich:

$$W = \Sigma \int_{s_0}^{s_1} m \frac{ds}{dt} ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

wo s_0 und s_1 die Grenzwerte der Bahn s für die Zeitpunkte t_0 und t_1 sind, und die Summation sich über alle Teilchen des Systems erstreckt. Diese letztere Form zeigt, daß die Wirkung auch als die Summe der Streckenintegrale der Bewegungsgrößen der Teilchen des Systems angesehen werden kann.

Nun kann sich das System auf unzähligen verschiedenen Wegen aus dem Anfangs- in den Endzustand begeben, und wir haben die Freiheit, diesem Übergange beliebige mögliche Bedingungen aufzuerlegen. Es seien also Anfangs- und Endzustand genau bestimmt, und der Übergang von einem zum anderen sei der Bedingung unterworfen, daß die Summe $U + V$ der kinetischen und potentiellen Energie konstant sei, nicht aber das zum Übergange gebrauchte Zeitintervall $t_1 - t_0$. Die Art des Überganges, für die die Wirkung (wie sie gewöhnlich gesetzt wird) am kleinsten ist, ist diejenige, für welche die Bewegung in Übereinstimmung mit den gewöhnlichen Gleichungen eines konservativen Systems stattfindet, d. h. für welche die Arbeitsgleichung gilt:

$$\delta V + \Sigma m \frac{d^2 s}{dt^2} \delta s = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Wenn wir mit δW die Änderung von W von einer Übergangsart zu einer anderen bezeichnen, so besagt das Theorem nur, daß unter der Bedingung, daß $U + V$ ungeändert bleibt, wenn die Bewegung ent-

sprechend der allgemeinen Variationsgleichung der Bewegung stattfindet — d. h. wenn der Übergang ohne jeden äußeren Zwang auf das System stattfindet — daß alsdann die Änderung der Wirkung von einer Übergangsart zu einer ihr sehr benachbarten anderen unendlich klein von der zweiten Ordnung ist. Dies wird besser beschrieben, wie es Hamilton tat, indem man sagt, daß die Wirkung für die sich selbst überlassene Bewegung stationär ist. Es kann indessen gezeigt werden, daß, wenn es nur eine mögliche Art der Bewegung gibt, die mit der Variationsgleichung bestehen kann, die Wirkung für diese tatsächlich ein Minimum ist.

Ein anderes Theorem, das ebenfalls als ein Wirkungstheorem bezeichnet werden kann, besagt, daß unter der Bedingung $t_1 - t_0 = const$ der Wert von

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

worin L für $U - V$ steht, stationär ist, wenn die Bewegung entsprechend der Variationsgleichung der Arbeit (39) stattfindet, d. h., wenn die Bewegung ohne Zwang ist.

254. Lösung der Bewegungsgleichungen. Die Lösung der Bewegungsgleichungen eines dynamischen Systems ist von verschiedenen Autoren studiert worden, unter denen Lagrange, Laplace und Jacobi genannt sein mögen, sowie neuerdings, in Verbindung mit Fragen der physikalischen Astronomie, von Hill und Poincaré. Des letzteren umfassendes Werk, Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, enthält eine sehr schätzbare Diskussion verschiedener sehr interessanter Probleme der Himmelsmechanik.

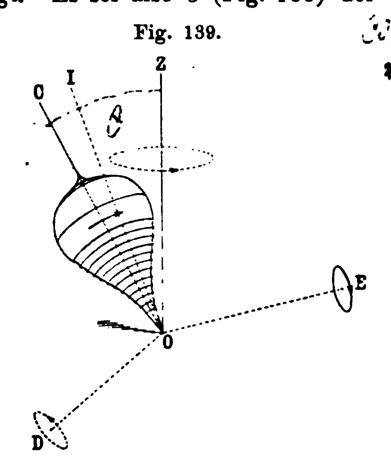
Die Ausdrücke für die Bewegungsgröße eines Systems und das Moment seiner Bewegungsgröße um eine Axe und der Ausdruck für die kinetische Energie des Systems können als erste Integrale aus den Bewegungsgleichungen und den geometrischen Bedingungen, die das System erfüllt, abgeleitet werden. Es sind Schritte zur Lösung des Problems, Gleichungen zu finden, die die Konfiguration des Systems zu irgend einer Zeit t vollständig bestimmen. Wenn dieses Problem erst einmal gelöst worden ist, so ergeben sich die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen seiner verschiedenen Teile ohne weiteres.

Es ist nicht immer möglich, die Bewegungsgleichungen zu lösen, aber es ist manchmal möglich, die Ausdrücke für die kinetische und potentielle Energie und das Moment der Bewegungsgröße ohne weiteres hinzuschreiben und aus diesen mit Hilfe der Bewegungsgleichungen wertvolle Aufschlüsse zu erhalten.

255. Kreiselbewegung. Als ein Beispiel dieses Vorgehens können wir die Bewegung eines Körpers betrachten, der sich unter der Wirkung der Schwerkraft um einen festen Punkt bewegt, tatsächlich also das Problem eines Kreisels, der ohne Reibung um eine Spitze, auf der er steht, rotiert.

Es sei angenommen, daß die Trägheitsmomente um zwei seiner Hauptaxen (s. § 166) gleich sind und daß der feste Punkt auf der Axe des ungleichen Trägheitsmoments liegt. Es sei also O (Fig. 139) der feste Punkt, OC die Figuraxe des Körpers, und C möge das Trägheitsmoment des Körpers um die Axe OC, A das Trägheitsmoment um eine Axe OE bezeichnen, die in üblicher Weise senkrecht zu OC in der Ebene ZOC genommen wird. Es wird auch praktisch sein, eine dritte Axe OD senkrecht zu der Ebene ZOC und zu OE zu nehmen, wie es in der Figur gezeigt ist. Die Bewegungsrichtungen sind die in den kleinen Kreisen angegebenen, so daß OD, OE, OC eine Gruppe von Axen bilden, die den Axen OX, OY, OZ in Fig. 9 entspricht, längs deren man Strecken nehmen kann, die die Winkelgeschwindigkeiten oder die Momente der Bewegungsgröße um sie darstellen. Die Bewegungsrichtungen sind in jedem Falle für einen längs den Axen nach dem Punkte O hinblickenden Beobachter dem Uhrzeiger entgegen.

Fig. 139.



Der Kreisel möge mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die im Körper feste Axe OC rotieren; die Ebene ZOC der Kreiselaxe und der Senkrechten OZ möge sich gleichzeitig mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ um OZ drehen; ψ ist dabei der Winkel, den die Ebene ZOC mit einer im Raume festen senkrechten Ebene bildet. Die Bewegung um OZ wird im folgenden häufig die Präzessionsbewegung des Körpers genannt werden, weil sie derjenigen Bewegung der Erde, aus welcher die Präzession der Äquinoktien entsteht, völlig analog ist. Die Winkelgeschwindigkeit ω ist die irgend einer im Körper festen Ebene durch OC, gegenüber der im Raume festen Ebene ZOC.

Es sei θ der Winkel ZOC. Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ um OZ kann in zwei Komponenten zerlegt werden, $\dot{\psi}\cos\theta$ und $\dot{\psi}\sin\theta$ um feste Axen, deren Lage mit OC und OE, welches die Schnittlinie der Ebenen COZ und EOD ist, zusammenfallen. Die erste Komponente ergibt mit ω zusammen $\omega + \dot{\psi}\cos\theta$ für die gesamte Winkelgeschwindigkeit um eine im Raume feste und mit der augenblicklichen Lage OC zusammenfallende Axe; folglich hat der Körper die drei Winkel-

geschwindigkeiten $\omega + \dot{\psi}\cos\theta$ um OC, $\dot{\psi}\sin\theta$ um OE und $\dot{\theta}$ um die dritte Axe OD.

Es ist daher die kinetische Energie gegeben durch die Gleichung:

$$U = \tfrac{1}{2}\left[C\left(\omega + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta\right)^2 + A\left\{\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \sin^2\theta + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\right] \quad . \quad . \quad (41)$$

Außer dieser Gleichung könnten wir noch eine andere hinschreiben, die besagt, daß, da es keine Kräfte gibt, die Momente um OZ und OC haben, das Moment der Bewegungsgröße um die Senkrechte konstant bleiben muß. Zwei von den Winkelgeschwindigkeiten sind, wie wir eben gesehen haben, $\omega + \dot{\psi}\cos\theta$ um OC und $\dot{\psi}\sin\theta$ um eine Axe durch O senkrecht zu OC und in der Ebene ZOC. Folglich besteht das Moment der Bewegungsgröße des Körpers aus $C(\omega + \dot{\psi}\cos\theta)$ um OC und $A\dot{\psi}\sin\theta$ um die soeben definierte Axe. Da das erstere konstant ist, haben wir: $\omega + \dot{\psi}\cos\theta$ (die Winkelgeschwindigkeit um OC) gleich dem Anfangswert, der n heißen möge. Ferner erhält man das Moment der Bewegungsgröße um die Senkrechte OZ, indem man diese beiden Komponenten auflöst; es ist $A\dot{\psi}\sin^2\theta + Cn\cos\theta$. Folglich ist:

$$A\frac{d\psi}{dt}\sin^2\theta + Cn\cos\theta = H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

wo H eine Konstante ist.

Wenn G der Schwerpunkt ist, OG durch h und die Masse des Körpers durch m bezeichnet wird und die potentielle Energie als null angenommen wird, wenn G in der horizontalen Ebene durch O liegt, gilt für die potentielle Energie der Ausdruck $mgh\cos\theta$. Folglich vervollständigen die Beziehungen

$$V = mgh\cos\theta, \qquad U + V = K, \qquad (43)$$

wo K eine Konstante ist, die gewünschten Gleichungen. Durch Gl. (41), (42), (43) wird die ganze Bewegung ausgedrückt.

256. Steigen und Sinken des Kreisels. Man kann jetzt ohne weiteres einige wichtige Schlüsse ziehen. Zunächst wird man die Werte von θ finden, für die $\dot{\theta} = 0$ ist, d. h. die Grenzen, zwischen denen die Neigung des Kreisels gegen die Senkrechte liegt. Gl. (41) kann nach Gl. (43) in der Form

$$A\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + A\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \sin^2\theta + Cn^2 + 2mgh\cos\theta = 2K \quad . \quad . \quad (44)$$

geschrieben werden. Wenn hieraus $\dot{\psi}$ nach Gl. (42) eliminiert wird, so ergibt sich:

$$A\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{(H - Cn\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} + Cn^2 + 2mgh\cos\theta = 2K \quad . \quad . \quad (45)$$

Der Kreisel möge zu Anfang mit der Winkelgeschwindigkeit n um OC rotieren, seine Axe sei im Winkel β gegen die Senkrechte geneigt, $\dot{\psi}$ und $\dot{\theta}$ seien beide null. Der Wert von H ist demnach $Cn\cos\beta$. Der Anfangswert von $2U$ ist Cn^2, von $2V$ ist er $2mgh\cos\beta$, so daß $2K = Cn^2 + 2mgh\cos\beta$ ist. Wenn man dann in Gl. (45) $\dot{\theta} = 0$ und diese Werte von H und $2K$ einsetzt, so erhält man:

$$(\cos\theta - \cos\beta)\,[2mghA(\cos^2\theta - 1) - C^2n^2(\cos\theta - \cos\beta)] = 0 \quad (46)$$

Dies ist eine kubische Gleichung zur Bestimmung von $\cos\theta$, und offenbar ist eine Wurzel davon $\cos\theta = \cos\beta$. Für die beiden anderen Wurzeln gibt es die quadratische Gleichung:

$$2mghA(\cos^2\theta - 1) - C^2n^2(\cos\theta - \cos\beta) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist positiv für $\cos\theta = \infty$, negativ für $\cos\theta = 1$ und positiv für $\cos\theta = -1$. Demnach liegt eine Wurzel zwischen ∞ und 1 und eine andere zwischen $+1$ und -1. Die erste Wurzel ist natürlich unzulässig.

Wenn man jetzt Gl. (47) auflöst, so ergibt sich, wenn man

$$\frac{4mghA}{n^2C^2} = k$$

setzt:

$$\cos\theta = \frac{1}{k}\left[1 \pm \sqrt{(1 - 2k\cos\beta + k^2)}\right].$$

Die Größe unter der Quadratwurzel ist wesentlich positiv, da $\cos\beta < 1$ ist. Folglich ist die zulässige Wurzel:

$$\cos\theta = \frac{1}{k}\left[1 - \sqrt{(1 - 2k\cos\beta + k^2)}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Also liegt die Neigung des Kreisels zur Senkrechten zwischen den Grenzen

$$\beta \qquad \text{und} \qquad \arccos\frac{1 - \sqrt{1 - 2k\cos\beta + k^2}}{k},$$

wofür wir α setzen wollen, und schwankt von einem Werte zum anderen hin und her.

Wenn der Kreisel in sehr schneller Rotation losgelassen wird, d. h. wenn n sehr groß ist, so ergibt sich nach Gl. (48), wenn Glieder bis zu k^2 berücksichtigt werden:

$$\cos\theta = \cos\beta - \frac{k}{2}\sin^2\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Die Grenzen von θ sind also: β und $\arccos(\cos\beta - \frac{1}{2}k\sin^2\beta)$.

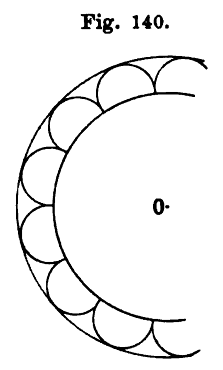
257. Präzessionsbewegung des Kreisels. Nach Gl. (44) ist der Wert von $\dot{\psi}$ am größten, wenn $\dot{\theta} = 0$ ist, es sei denn $Cn^2 + 2mgh$

$\cos\theta - 2K = 0$, in welchem Falle $\dot{\psi}$ null ist. Da $2K = Cn^2 + 2mgh\cos\beta$ ist, so lautet diese Gleichung:

$$2mgh(\cos\theta - \cos\beta) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (50)$$

so daß immer $\dot{\psi}$ null ist, wenn $\cos\theta = \cos\beta$ ist.

Wenn diese Beziehung nicht erfüllt ist, ergibt sich aus $\dot{\theta} = 0$:


Fig. 140.

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2mgh}{A}\,\frac{\cos\beta - \cos\theta}{\sin^2\theta} \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

und aus Gl. (42) ergibt sich für $\dot{\psi}$ ein anderer Grenzwert von θ:

$$\frac{d\psi}{dt} = 2\frac{mgh}{Cn} \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

Die Projektion der Bahn irgend eines Axenpunktes, etwa des Scheitels oder des Schwerpunktes, auf die horizontale Ebene durch O ist, wie in Fig. 140, eine periodische Kurve zwischen zwei Kreisen um O als Mittelpunkt, die den beiden Grenzwerten von θ entsprechen. Im inneren Kreise ist $\dot{\psi} = 0$, so daß dort die Kurve Spitzen hat; im äußeren Kreise hat $\dot{\psi}$ einen Maximalwert (das Doppelte des stationären Wertes, § 260), während $\dot{\theta} = 0$ ist, so daß die Kurve den Kreis berührt.

258. Vervollständigung der Lösung des Problems. Die Bewegung kann vollständig ermittelt und die Lage der Axe für irgend einen Augenblick folgendermaßen gefunden werden. Da $2K = Cn^2 + 2mgh\cos\beta$ ist, ergibt sich für Gl. (45):

$$A\sin^2\theta . \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$
$$= 2mgh(\cos\theta - \cos\beta)\left[(\cos^2\theta - 1) - \frac{C^2n^2}{2A\,mgh}(\cos\theta - \cos\beta)\right] \quad (53)$$

Wenn $\cos\alpha$, $\cos\beta$, c die Wurzeln (in aufsteigender Größenordnung) der kubischen Gl. (46) für $\cos\theta$ sind, so ist α der größere und β der kleinere von den beiden Werten von θ, zwischen denen die Neigung der Axe zur Senkrechten schwankt. Folglich wird, wenn man l für A/mh schreibt, aus der obigen Gleichung:

$$l\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(\cos\theta - \cos\alpha)(\cos\theta - \cos\beta)(\cos\theta - c) \quad (54)$$

Setzt man nun

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos^2\varphi + \cos\beta\sin^2\varphi,$$

so erhält man:

$$\cos\theta - \cos\alpha = (\cos\beta - \cos\alpha)\sin^2\varphi$$
$$\cos\theta - \cos\beta = (\cos\alpha - \cos\beta)\cos^2\varphi$$

womit die Ungleichheit $\alpha > \theta > \beta$ befriedigt ist. Substituiert man dies in Gl. (54), so verwandelt es die Gleichung in:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = p^2 (1 - k^2 \sin^2 \varphi),$$

wo jetzt

$$k^2 = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{c - \cos\alpha}, \quad p^2 = \frac{g(c - \cos\alpha)}{2l}$$

ist. Folglich hat man für irgend einen Wert von φ, der einem von einem Augenblick, in dem φ gleich null oder $\theta = \alpha$ war, gerechneten Werte von t entspricht:

$$pt = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \ldots \ldots \quad (55)$$

Der Wert von t erweist sich also als ein elliptisches Integral der ersten Art. Die Werte von pt (oder K, wie es gewöhnlich geschrieben wird) sind für eine Abstufung von Werten von φ in den Tabellen elliptischer Funktionen gegeben. Somit können sowohl pt als φ, tatsächlich also korrespondierende Werte von t und θ, gefunden werden.

Um die Lösung zu vervollständigen, muß man zeigen, wie korrespondierende Werte von t und ψ zu erhalten sind. Nach Gl. (42) erhält man, wenn man $2f$ für Cn/A schreibt:

$$\frac{d\psi}{dt} = 2f \frac{\cos\beta - \cos\theta}{1 - \cos^2\theta} = f\left(\frac{1 + \cos\beta}{1 + \cos\theta} - \frac{1 - \cos\beta}{1 - \cos\theta}\right).$$

Wenn man den oben für θ festgestellten Ausdruck benutzt und

$$\frac{\cos\beta - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = m_1, \quad \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{1 - \cos\alpha} = -m_2$$

setzt, so ergibt sich:

$$\frac{d\psi}{dt} = f\left[(1 + m_1)\frac{1}{1 + m_1 \sin^2\varphi} - (1 + m_2)\frac{1}{1 + m_2 \sin^2\varphi}\right] \quad (56)$$

Nun ist aber, wie wir gesehen haben:

$$p\,dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

so daß wir schließlich erhalten:

$$p\psi = f\left[(1 + m_1)\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + m_1 \sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - (1 + m_2)\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + m_2 \sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\right] \quad \ldots \quad (57)$$

eine Formel, die ψ in Gliedern elliptischer Integrale der dritten Art ausspricht. Wie vorher können auch hier Werte von ψ und φ für jeden aktuellen Fall in den Tabellen nachgesehen werden. (Wegen weiterer Informationen über diese Frage muß auf die Lehrbücher der Elliptischen Funktionen verwiesen werden.)

259. Bewegungsgleichungen des Kreisels. Die soeben gegebene Darlegung enthält die wichtigsten Tatsachen, die die Kreiselbewegung angehen. Der Gegenstand ist von großem physikalischem Interesse wegen der genauen Analogie zwischen dieser Bewegung und dem elastischen Verhalten eines dünnen runden Drahtes von einer in allen Richtungen gleichen Biegsamkeit (15. Kapitel) und auch wegen seiner Anwendung auf die wichtige und schwierige Frage von der Stabilität der Bewegung. Es ist von jeher sehr aufgefallen, daß ein Kreisel oder ein Gyrostat (der nichts weiter ist, als ein Kreisel, der auf Lagern läuft, die an einem ihn einschließenden Behältnis angebracht sind) in Rotation stabil ist in einer Lage, in der er ohne Drehung gänzlich unstabil sein würde. Es ist dasselbe Phänomen, das sich in der Erhaltung der Richtung der Erdaxe und der Axe einer Flintenkugel darbietet. Mit Rücksicht auf die Wichtigkeit dieser Seite der Frage fügen wir eine kurze Skizzierung der Untersuchungsmethoden der Stabilität der stationären Kreiselbewegung bei, d. h. derjenigen Bewegung, bei welcher $\dot{\theta}$ und $\dot{\psi}$ konstant sind.

Zunächst aber wollen wir die Lagrangesche Methode erläutern, indem wir sie zur Auffindung der Gleichungen der Kreiselbewegung anwenden, obgleich diese, wie der Leser sich überzeugen kann, leicht auf anderen Wegen zu erhalten sind. Nähere Belehrung über die stationäre Bewegung und die kleinen Schwankungen um diesen Zustand ist mit Hilfe dieser Gleichungen leicht zu erbringen.

Als unabhängige Koordinaten mögen θ, ψ und der der Geschwindigkeit ω entsprechende Winkel gewählt werden. Indessen geht nur die Geschwindigkeit ω, nicht die Koordinaten, in den Ausdruck für die kinetische Energie ein. Wir haben also:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \frac{d\theta}{dt}} = A\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = A\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \sin\theta\cos\theta - C\left(\omega + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta\right)\frac{d\psi}{dt}\sin\theta,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \frac{d\psi}{dt}} = A\frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\sin^2\theta\right) + C\frac{d}{dt}\left[\left(\omega + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta\right)\cos\theta\right], \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \omega} = \frac{d}{dt}\left(\omega + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta\right), \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\, mgh\sin\theta.$$

Daher lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d^2\theta}{dt^2} - \left[A\frac{d\psi}{dt}\cos\theta - C\left(\omega + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta\right)\right]\frac{d\psi}{dt}\sin\theta = mgh\sin\theta \\ \frac{d}{dt}\left[A\frac{d\psi}{dt}\sin^2\theta + C\left(\omega + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta\right)\cos\theta\right] = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\omega + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um OC, also $\omega + \dot{\psi}\cos\theta$, dem Anfangswert, n, gleich bleibt. Durch diese selbe Gleichung wird die zweite nach der Integration verwandelt in:

$$A\frac{d\psi}{dt}\sin^2\theta + Cn\cos\theta = H.$$

Dieses sind die schon in § 254 in Bezug auf die Erhaltung des Moments der Bewegungsgröße gefundenen Resultate.

260. Stationäre Kreiselbewegung. Nach Gl. (42) und mit Rücksicht auf den Wert $Cn\cos\beta$ von H ist $A\dot{\psi}\sin^2\theta = Cn(\cos\beta - \cos\theta)$, und, wenn die Winkelgeschwindigkeit n sehr groß wird, schwankt $\cos\theta$, wie aus Gl. (49) ersichtlich ist, zwischen den Grenzen

$$\cos\beta \quad \text{und} \quad \cos\beta - \frac{2\,mgh\,A\sin^2\beta}{C^2n^2},$$

so daß die beiden Werte von θ sehr annähernd gleich sind. Demnach ist der äußerste Wert, den $A\dot{\psi}\sin^2\theta$ haben kann:

$$\frac{2\,mgh\,A\sin^2\beta}{Cn},$$

so daß, wenn n sehr groß ist, $\dot{\psi}$ sehr klein sein muß. Die erste der Bewegungsgleichungen (58) kann in der Form

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2} - \left[\left(A\frac{d\psi}{dt}\cos\theta - Cn\right)\frac{d\psi}{dt} + mgh\right]\sin\theta = 0$$

geschrieben werden. Ist die Bewegung stationär, so ist θ konstant, und folglich $\ddot{\theta} = 0$. So erhält man die Gleichung der stationären Bewegung:

$$\left[\left(A\frac{d\psi}{dt}\cos\theta - Cn\right)\frac{d\psi}{dt} + mgh\right]\sin\theta = 0 \quad . \quad . \quad (59)$$

Sie ist erfüllt, wenn entweder $\sin\theta = 0$ oder

$$A\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\cos\theta - Cn\frac{d\psi}{dt} + mgh = 0$$

wird. Der erste dieser Fälle ergibt $\theta = 0$ oder $\theta = \pi$, d. h. der Schwerpunkt liegt entweder senkrecht über oder senkrecht unter O.

Wenn aber $\cos\beta$ endlich ist, so führt dies zu einem unendlichen Werte von $\dot\psi$ und ist unvereinbar mit der Tatsache, daß θ zwischen den genannten engen Grenzen liegen muß.

Die zweite Beziehung ergibt annäherungsweise, da $\dot\psi$ klein ist:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{mgh}{Cn} \quad \dots \dots \dots \dots (60)$$

für die Winkelgeschwindigkeit der stationären Präzessionsbewegung; wie man sieht, ist dies die Hälfte des aus Gl. (52) oben sich ergebenden Maximalwertes. Wenn man die Gleichung auflöst, indem man θ_1 für den konstanten Wert von θ einsetzt, so erhält man:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Cn}{2A\cos\theta_1}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\,A\,mgh}{C^2n^2}\cos\theta_1}\right) \quad \dots (61)$$

Die Werte von $\dot\psi$ müssen reell sein, und folglich muß sich, wenn $h\cos\theta_1$ positiv ist, d. h. wenn der Schwerpunkt über dem Niveau des Punktes O liegt, ergeben:

$$n^2 > \frac{4\,A\,mgh\cos\theta_1}{C^2},$$

damit die stationäre Bewegung möglich wird. Wird der Kreisel mit sehr großem n und mit $\dot\psi$, $\dot\theta$ beiden gleich null, losgelassen, so muß, da $\dot\psi$ klein bleibt, das Minuszeichen vor dem Wurzelzeichen in Gl. (61) gelten. Als erste Annäherung an $\dot\psi$ erhält man hieraus:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{mgh}{Cn}$$

wie vorher.

Eine zweite Annäherung ist:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{mgh}{Cn}\left(1 + \frac{A\,mgh}{C^2n^2}\cos\theta_1\right) \quad \dots \dots (62)$$

Der Fall der anderen Wurzel der Gl. (61) erfordert eine besondere Untersuchung, auf die wir hier indessen nicht eingehen wollen.

261. Kleine Schwankungen um stationäre Bewegung. Die kleinen Schwankungen um eine stationäre Bewegung können untersucht werden, indem man $\dot\psi = \dot\psi_1 + \dot\psi'$ und $\theta = \theta_1 + \theta'$ setzt, wo $\dot\psi_1$, θ_1 stationäre Werte bezeichnen, um die herum die Bewegung schwankt, und $\dot\psi'$, θ' kleine variable Größen sind, deren zweite und höhere Potenzen vernachlässigt werden können; setzt man diese in die Gleichungen der Bewegungsgröße und in die Gl. (58) für $\ddot\theta$ ein, und ist die Bedingung der stationären Bewegung erfüllt:

$$Cn = \frac{mgh}{\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2} + A\,\frac{d\psi}{dt}\cos\theta_1,$$

so erhält man zwei simultane Gleichungen, die uns (mit angenommenen Werten

$$f \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + a\right), \qquad g \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + b\right)$$

für $\dot{\psi}_1$, θ_1) befähigen, die Schwankungsperiode τ zu berechnen[1]). Es ergibt sich:

$$\tau = \frac{2\pi A \frac{d\psi_1}{dt}}{\sqrt{A^2\left(\frac{d\psi_1}{dt}\right)^4 - 2\,mgh\,A\left(\frac{d\psi_1}{dt}\right)^2 \cos\theta_1 + m^2 g^2 h^2}} \quad . \; . \; . \quad (63)$$

262. Stabilität der Bewegung. Verhalten des Gyrostaten. Der hier erläuterte Vorgang ist äußerst wichtig, da es derjenige ist, welcher häufig angewandt wird, um kleine Störungen eines Zustandes stationärer oder regelmäßiger Bewegung zu erforschen. Auch ist er derart, daß man durch ihn die Stabilität einer gegebenen Bewegung prüfen kann, d. h. daß durch ihn die Frage beantwortet werden kann, ob, wenn die Bewegungen unbedeutend gestört werden, das System kleine Schwankungen um diesen Bewegungszustand ausführen oder sich mehr und mehr von ihm entfernen wird. Ein verwickeltes Beispiel dafür ist die in § 184 erwähnte Frage der Stabilität des Sonnensystems. Ein sehr einfaches Beispiel anderseits ist die Bewegung eines Teilchens längs der untersten erzeugenden Linie innerhalb einer geneigten geraden zylindrischen Röhre oder längs der obersten erzeugenden Linie außerhalb; im ersten Falle ist die Bewegung offenbar stabil — eine kleine seitliche Störung wird das Teilchen nur veranlassen, seinen Lauf zu verfolgen, indem es kleine Schwankungen um die erzeugende Linie ausführt; im letzteren Falle würde eine solche Störung das Teilchen veranlassen, dauernd die erzeugende Linie und schließlich die Röhre zu verlassen.

Fig. 141.

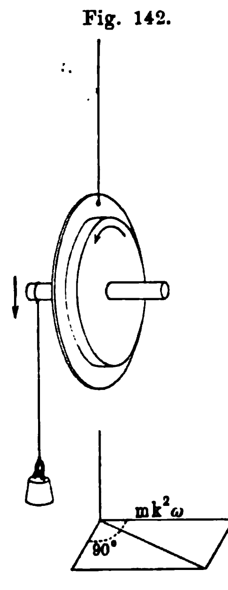


Die obige Untersuchung genügt, die meisten der interessanten Erscheinungen zu erklären, die ein Kreisel darbietet, der aus einem auf Lagern, die an dem ihn umgebenden Rahmen oder Gehäuse befestigt sind, laufenden massiven Schwungrad besteht. Ein solcher Kreisel

[1]) Näheres z. B. in Rouths Dynamik, Leipzig 1898.

heißt ein Gyrostat; in einer Form ist er ein wohlbekanntes Spielzeug, in einer anderen ein Instrument, das geeignet ist, einige der geheimnisvollsten physikalischen Erscheinungen zu erklären; die letztere Form ist wiedergegeben in der Fig. 141 (a. v. S.), die einen mit einer feinen Kante auf einer Glasplatte stehenden Gyrostaten zeigt. Das Gehäuse erscheint in der Zeichnung aufgeschnitten, um das Schwungrad freizulegen, das auf einer Spindel angebracht ist, die in den am Gehäuse angebrachten Lagern liegt. Von dem Schwungrad ist ein Durchschnitt gegeben, um die Konstruktion anzuzeigen. Wie der Durchschnitt zeigt, besteht das Schwungrad aus einer dünnen Scheibe mit massivem Rande. Fig. 142 illustriert einen einfachen Fall: Der Gyrostat hängt an einem Faden von einem Punkte des Gehäuses herab in der Ebene des Schwungrades, derart, daß der Schwerpunkt unter dem Aufhängepunkte liegt. Ein Gewicht hängt an einem Faden von dem einen Axenende herab und erzeugt dadurch ein Moment um eine horizontale Axe in der Ebene des Schwungrades, das als um die Axe der Figur schnell rotierend angenommen wird. Der Gyrostat neigt sich nicht merklich, sondern ändert sein Azimut mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ in nahezu stationärer Bewegung, allerdings mit Superposition von Schwankungen von der Periode

Fig. 142.



$$\tau = \frac{2\pi A \frac{d\psi}{dt}}{\sqrt{A^2 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^4 + m^2 g^2 h^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

wo m die am Axenende aufgehängte Masse und h ihre Entfernung von der Linie des Fadens ist. A ist selbstverständlich das Trägheitsmoment des Gyrostaten (einschließlich Rad und Gehäuse, zusammen als ein starrer Köper gedacht) um einen Durchmesser des Schwungrades. Der Wert von $\dot{\psi}$ ist mgh/Cn (wo C sich auf das Rad bezieht und m die Masse des ganzen Instrumentes ist), so daß sich bei sehr großem n der Ausdruck

$$\tau = 2\pi \frac{A}{Cn} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

ergibt. Er würde auch die Formel für die Oszillationszeit eines schnell rotierenden Gyrostaten oder Kreisels sein, dessen Axe horizontal liegt und der an einem Axenende gehalten wird, wie in Fig. 144. Das die Präzession erzeugende Kräftepaar würde, wie bei der obigen Erörterung,

vom Gewichte des Kreisels herrühren. Die vollständige Theorie des Gyrostaten enthält Glieder, die von der Bewegung des Gehäuses abhängen, das sich nicht mit dem Schwungrade dreht; doch sind diese hier vernachlässigt. Es dürfte keine große Schwierigkeit für den Leser sein, die obigen Gleichungen derart zu modifizieren, daß die Trägheit des Gehäuses mit in die Rechnung eingeht.

Wird die Präzession anderweitig durch ein angreifendes Kräftepaar erzeugt, so gilt für das Moment dieses Kräftepaares die Formel:

$$L = Cn\frac{d\psi}{dt} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (66)$$

wo, wie man sich erinnern muß, $\dot{\psi}$ die Präzessionswinkelgeschwindigkeit um eine Axe ist, die gleichzeitig zur Kreiselaxe und zur Axe des Kräftepaares senkrecht ist.

Im allgemeineren Falle eines Winkels θ zwischen Kreisel- und Präzessionsaxe (während die Kräftepaaraxe nach wie vor auf der Ebene jener senkrecht ist) ist die obige Formel durch die kompliziertere, leicht zu erweisende

$$L = Cn\frac{d\psi}{dt}\sin\theta - A\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\cos\theta$$

zu ersetzen.

Allgemeine Erklärung der Präzessionsbewegung[1]). Der Ursprung der Präzessionsbewegung kann allgemein für den in Fig. 142 veranschaulichten Fall aus folgenden Erwägungen klar gemacht werden. Ein von dem Gewichte herrührendes Kräftepaar erzeugt fortwährend ein Moment der Bewegungsgröße um eine horizontale Axe senkrecht zur Rotationsaxe einfach dadurch, daß es die Rotationsaxe im Azimut herumdreht. In der Zeit dt wird die Rotationsaxe aus irgend einer gegebenen Lage um einen Winkel $\dot{\psi}\,dt$ herumgedreht, und infolgedessen entsteht ein Moment der Bewegungsgröße $Cn\sin(\dot{\psi}\,dt)$, d. h. $Cn\dot{\psi}\,dt$ um eine horizontale Axe senkrecht zu jener Lage. Dieses ist gleich mit $L\,dt$, so daß

$$Cn\frac{d\psi}{dt} = L$$

wird.

Um die Entstehung der Azimutdrehung zu veranschaulichen, denken wir uns eine vertikale Ebene, die die Rotationsaxe des Gyrostaten aus Fig. 142 enthält. Diese teilt das Flugrad in zwei Hälften. In einer

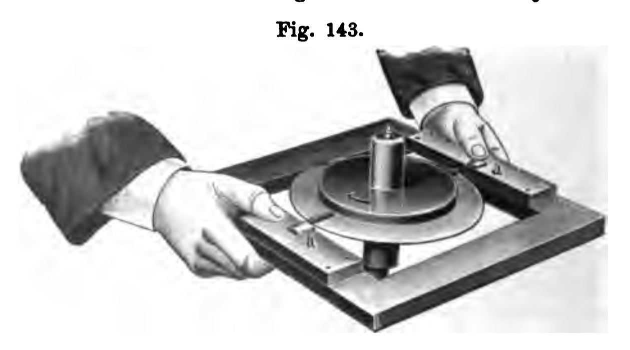
---

[1]) Den folgenden Exkurs (bis S. 282) war der Verf. so freundlich, für die deutsche Ausgabe neu einzufügen.

Hälfte, der linken, haben alle Teilchen mehr oder weniger eine absteigende, in der anderen entsprechend eine aufsteigende Bewegung. Nun erinnern wir uns des Kräftepaares L als der Ursache eines Moments der Bewegungsgröße um eine horizontale Axe durch das Zentrum in der Ebene des Flugrades. Ein Teilchen, das eben etwa den obersten Punkt des Flugrades überschritten und den Abstieg nach der horizontalen Linie zu begonnen hätte, hat in dem vorhergehenden Zeitraume eine Rechts-Linksbewegung angenommen infolge der Entstehung des Moments der Bewegungsgröße um jene Linie, die in diesem Zeitelement stattgefunden hat. Mit Abnahme der Entfernung von der horizontalen Linie strebt das Teilchen (abgesehen von etwa entstehendem Zuwachs an Bewegungsgröße), die einmal erlangte Bewegungsgröße beizubehalten, und strebt daher, sich schneller von rechts nach links zu bewegen. Ebenso wird ein Teilchen unter der horizontalen Linie, das sich von ihr weg bewegt und infolgedessen in jedem Zeitelement eine Bewegungsgröße von links nach rechts erteilt bekommt, bestrebt sein, sich mit wachsender Entfernung im nächsten Zeitelement langsamer von links nach rechts zu bewegen. Folglich besteht in jedem Augenblicke ein Bestreben des Teils, der zurzeit die linke Seite des Rades ausmacht, sich von rechts nach links zu bewegen, und ebenso kann gezeigt werden, daß die andere Seite das Streben hat, sich von links nach rechts zu bewegen. Auf diese Weise dreht sich das Rad um die vertikale Linie.

Erläuterungen der gyrostatischen Wirkung. Stabilität und Instabilität. Die hier abgebildete Form des Gyrostaten bietet

Fig. 143.



viele bedeutsame und interessante Beispiele der durch die Rotation einem Körper verliehenen Eigenschaften. Der folgende einfache Fall ist von besonderem Interesse zur Auseinandersetzung von Stabilität und Instabilität. Ein Gyrostat wird, wie in Fig. 143, an zwei Zapfen a, a gehalten, die in einer Linie an entgegengesetzten Enden eines Durchmessers der kreisförmigen, vorragenden, die Mitte des Gehäuses umgebenden Kante liegen. Diese Zapfen ruhen auf einem horizontalen

Rahmen, derart, daß sie eine horizontale Axe bilden, um die der Gyrostat sich drehen kann. Gleichviel nun, ob der Schwerpunkt der unterstützten Masse über oder unter dieser horizontalen Axe liegt, es findet Gleichgewicht statt, wenn die Axe vertikal steht, und dieses Gleichgewicht ist im letzteren Falle stabil und ist es sogar auch im ersteren, wenn das Flugrad sich schnell dreht und, sobald die Axe von der Vertikalen abweicht, Präzessionsbewegung zugelassen wird.

Wenn jedoch der Schwerpunkt nahezu in die horizontale Verbindungslinie der Zapfen fällt, so daß die Gravitationsstabilität nur einen kleinen positiven oder negativen Wert hat, und die tragende Axe a, a im Azimut herumgedreht wird, so ist die vertikale Lage der Rotationsaxe stabil oder unstabil, je nachdem die Richtung der Azimutbewegung mit oder gegen die Richtung der Rotationsbewegung geht. Wenn man also den Rahmen so wie in der Figur hält und ihn in der durch den Pfeil auf dem Kreisel angedeuteten Richtung — der Rotationsrichtung — dreht, so bleibt der Gyrostat in Ruhe; kehrt man aber die Bewegungsrichtung um, so dreht sich das Gehäuse in den Zapfen und der Gyrostat kehrt sich um, so daß die Bewegungsrichtung mit der Richtung der Azimutbewegung in Einklang kommt. Dann bringt eine weitere Drehung in derselben Richtung im Azimut keine Wirkung hervor; wird aber die Richtung der Azimutbewegung umgekehrt, so kehrt sich der Gyrostat wieder um u. s. f.

Die Theorie hiervon ist leicht aus der ersten der Gl. (58) zu erhalten. Hier ist θ die Neigung der Rotationsaxe gegen die Vertikale, n die Winkelgeschwindigkeit des Flugrades, $\dot{\psi}$ die (konstante und kleine) Winkelgeschwindigkeit der Azimutbewegung. Auch ist durch Superposition h sehr klein. Folglich kann, wenn das Glied in $\dot{\psi}^2$ vernachlässigt und θ für $\sin\theta$ gesetzt wird, die Bewegungsgleichung in der Form

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2} + Cn\frac{d\psi}{dt}\,\theta = 0$$

geschrieben werden, wo A und C wieder die vorhin erläuterte Bedeutung haben.

Die Lösung dieser Gleichung stellt eine Schwingungsbewegung um die vertikale Lage oder nicht schwingende Entfernung aus jener Lage dar, je nachdem $n\dot{\psi}$ positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem die Azimutbewegung mit der Rotation oder gegen sie gerichtet ist. Im ersteren Falle herrscht Stabilität, im letzteren Instabilität des Gyrostaten in der vertikalen Lage.

Im Falle der Stabilität ist die Periode einer kleinen Schwingung einfach:

$$2\pi\sqrt{\frac{A}{Cn\frac{d\psi}{dt}}}.$$

Beispiele gyrostatischer Wirkung. Barogyroskop von Gilbert. Die eben beschriebene Anordnung des Gyrostaten ist dem von Gilbert (C. R. **94**, 1882, p. 199) zur Demonstration der Erdrotation angegebenen und von ihm Barogyroskop genannten Apparate sehr ähnlich. Doch wird bei diesem der Schwerpunkt der lastenden Masse mit Hilfe eines kleinen Gleitgewichtes unter die horizontale Axe gebracht, und die Zapfen a, a sind genau konstruierte Schneiden, die auf harten glatten Platten aufliegen. Zur Diskussion der Theorie dieses Instrumentes kann Gl. (66) herangezogen werden.

Zuerst sei die horizontale Axe ostwestlich gerichtet und die Rotationsaxe um einen Winkel θ gegen die Vertikale geneigt und so, daß das obere Ende dieser Axe nach Norden geneigt ist, wie im Punkte P in der Zeichnung. Wenn dann λ die Breite des Ortes bezeichnet, können wir die Winkelgeschwindigkeit der Erde, Ω, auf zwei Komponenten zurückführen, eine $\Omega \sin(\lambda + \theta)$ um die Rotationsaxe, die andere $\Omega \cos(\lambda + \theta)$ um eine senkrecht zur Rotationsaxe, im Meridian nach Norden gezogene Axe PQ. Wenn man die Richtung der Winkelgeschwindigkeit von oben gesehen als gegen den Uhrzeiger, d. h. n und Ω als in derselben Richtung, annimmt, so ergibt die Komponente $\Omega \cos(\lambda + \theta)$ eine stetige Präzessionswinkelgeschwindigkeit des Gyrostaten, die, wenn Gleichgewicht vorhanden ist, als von dem Kräftepaar $mgh \sin\theta$ geliefert angesehen werden kann, wo m die Masse des Gyrostaten (Flugrad und Gehäuse) und h den Abstand des Schwerpunktes von der horizontalen Axe bezeichnet. Folglich ist nach Gl. (66), wenn man $\Omega \cos(\lambda + \theta)$ für $\dot\psi$ setzt, ohne weiteres

Fig. 144.

$$Cn\,\Omega \cos(\lambda + \theta) = mgh \sin\theta$$

und daher

$$tg\,\theta = \frac{Cn\,\Omega \cos\lambda}{Cn\,\Omega \sin\lambda + mgh} \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Ist n entgegengesetzt gerichtet, so ist das obere Ende der Axe südwärts geneigt, und die Neigung wird durch den Ausdruck

$$tg\,\theta = \frac{Cn\,\Omega \cos\lambda}{Cn\,\Omega \sin\lambda - mgh} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

gegeben sein. Es ist also in diesem Falle die Abweichung θ der Rotationsaxe von der Vertikalen größer als im anderen.

Auch der allgemeinere Fall, in dem die horizontale Axe a, a einen Winkel φ mit der ostwestlich gerichteten horizontalen Linie, und die Rotationsaxe, wie zuvor, einen Winkel θ mit der Vertikalen bildet, ist leicht zu behandeln. Zunächst ist zu bemerken, daß die Rotationsaxe

nicht länger im Meridian liegt. Dagegen sind die Komponenten von Ω um die Vertikale und um die Horizontale im Meridian $\Omega \sin\lambda$ bezw. $\Omega \cos\lambda$. Die letztere hat eine Komponente $\Omega \cos\lambda \cos\varphi$ um eine horizontale Axe nach Norden, senkrecht zu a, a. Die Komponente dieser nun um eine Axe senkrecht zur Rotationsaxe und zur horizontalen Axe und nach Norden ist $\Omega \cos\lambda \cos\varphi \cos\theta$. Die Komponente $\Omega \sin\lambda$ der Erdrotation hat eine Komponente $-\Omega \sin\lambda \sin\theta$ um die soeben bezeichnete Axe. Folglich ist, unter der Annahme, daß n und Ω in der gleichen Richtung stattfinden, die von dem Kräftepaar $mgh \sin\theta$ herrührende stetige Präzessionswinkelgeschwindigkeit in diesem Falle $\Omega(\cos\lambda \cos\varphi \cos\theta - \sin\lambda \sin\theta)$, und es ergibt sich:

$$Cn\,\Omega(\cos\lambda \cos\varphi \cos\theta - \sin\lambda \sin\theta) = mgh \sin\theta$$

oder

$$tg\,\theta = \frac{Cn\,\Omega \cos\lambda \cos\varphi}{Cn\,\Omega \sin\lambda + mgh} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a')$$

Wie zuvor wird, wenn die Rotationen n und Ω entgegengesetzt sind, das obere Ende der Rotationsaxe nach Süden gedreht werden, und der Nenner des Ausdruckes für $tg\,\theta$ wird alsdann $Cn\,\Omega \sin\lambda - mgh$ sein.

Es wird von Gilbert angegeben, daß er mit einem exakt konstruierten Apparate dieser Art gute experimentelle Ergebnisse erzielte. Gl. (b) ist von ihm (a. a. O.), aber ohne Beweis, aufgestellt worden.

Beispiele gyrostatischer Wirkung. Virtuelle Zunahme des Trägheitsmoments eines Torsionspendels. Das folgende, von Lord Kelvin (B. A. Report 1883) gefundene Ergebnis ist gleichfalls von großem Interesse in seinen Folgerungen für mögliche kinetische Erklärungen der Trägheitseigenschaften der Materie. Ein Gyrostat hat den Schwerpunkt von Flugrad und Gehäuse (das als symmetrisch auf beiden Seiten des Flugrades angenommen wird) im Zentrum des Flugrades. Dann wird dem Flugrade eine rasche Drehung erteilt, und darauf wird der Gyrostat an einem Punkte des Gehäuses in der Ebene des Flugrades am unteren Ende eines langen vertikalen Stahldrahtes aufgehängt, so daß die Rotationsaxe — wenigstens sehr annähernd — horizontal liegt. Wird der Gyrostat im Azimut herumgedreht, so daß der Draht eine Drillung erfährt, und dann sich selbst überlassen, so schwingt er im Azimut um die Vertikale infolge der Torsionselastizität des Drahtes, und diese Schwingungen sind viel langsamer als diejenigen, welche dasselbe System ausführen würden, wenn das Flugrad keine eigene Rotation hätte. Das Trägheitsmoment des Gyrostaten um die vertikale Axe um sein Zentrum wird durch die rasche Rotation des Flugrades virtuell enorm gesteigert.

Die Theorie ist annähernd kurz die folgende. Infolge der Richtungsänderung der Rotationsaxe bei der Drehung im Azimut neigt sich diese Axe in einem kleinen Winkel θ gegen die Horizontale, und der Schwerpunkt weicht von der Vertikalen durch den Aufhängepunkt des Gyrostaten

so weit ab, daß ein Kräftepaar ins Spiel kommt, das bestrebt ist, den Zuwachsgrad der Erzeugung des Moments der Bewegungsgröße aufzuheben, welches die Bewegung im Azimut um eine horizontale Axe senkrecht zur Rotationsaxe hervorruft. Dieses Kräftepaar ist mit θ proportional, da θ klein ist, und kann mit $\mu\theta$ bezeichnet werden. Folglich erhält man nach Gl. (66), wenn man φ als Winkelablenkung im Azimut setzt:

$$Cn\frac{d\varphi}{dt} = \mu\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Wegen der Neigung θ der Rotationsaxe gegen die Horizontale aber liefert die Rotation des Gyrostaten eine Komponente des Moments der Bewegungsgröße $Cn\theta$ um die Vertikale, die sich daher im Verhältnis $Cn\dot{\theta}$ ändert. Der gesamte Zuwachsgrad von Erzeugung des Moments der Bewegungsgröße um die Vertikale ist daher $C\ddot{\varphi} + Cn\dot{\theta}$, und dies muß dem durch den Draht erteilten Torsionskräftepaar gleich sein, nämlich $-\tau\varphi$, wo τ die Torsionsgeschwindigkeit des Drahtes (s. § 638) ist. Somit ist

$$C\frac{d^2\varphi}{dt^2} + Cn\frac{d\theta}{dt} = -\tau\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Nun ist aber nach Gl. (c)

$$\frac{d\theta}{dt} = Cn\,\frac{\frac{d^2\varphi}{dt^2}}{\mu},$$

so daß die soeben hingeschriebene Bewegungsgleichung die Form

$$\left(C + \frac{C^2n^2}{\mu}\right)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \tau\varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

annimmt. Das Trägheitsmoment wird also virtuell von C auf $C + C^2n^2/\mu$ gesteigert, und die Schwingungsperiode wird durch die Rotation von $2\pi\sqrt{C/\tau}$ auf

$$2\pi\sqrt{\frac{\mu C + C^2n^2}{\mu\tau}}$$

verlängert.

Es folgt aus Gl. (c), daß, wenn

$$\varphi = a\sin(pt - \alpha)$$

ist, auch

$$\theta = \frac{Cnpa}{\mu}\cos(pt - \alpha)$$

ist, so daß der Wert von θ sich nach dem einfach harmonischen Gesetze in derselben Periode wie der von φ ändert, aber mit einer Phasenverschiebung von $\pi/2$.

263. Die Erde als Kreisel. Präzession. Die Theorie des Kreisels ist darum so besonders interessant, weil die Erde tatsächlich ein Riesenkreisel ist mit einer Präzessionsbewegung, die den Anziehungskräften von Sonne und Mond (welche keine genau durch den Schwerpunkt der Erde hindurchgehenden Resultanten haben) und in sehr geringem Grade der Wirkung der Planeten zuzuschreiben ist.

Die Erde kreiselt in der Periode eines Sonnentages um eine in einem Winkel von $66^0\ 32'\ 48''$ zur Ebene der Ekliptik geneigte Axe; die Ebene des Äquators ist zu der der Ekliptik in einem Winkel von $23^0\ 27'\ 12''$ geneigt. Die Anziehung der Sonne übt nun ein Kräftepaar aus, das die Tendenz hat, die Äquatorebene mit der Ekliptik zur Deckung zu bringen, gerade wie die Schwere die Tendenz hat, den Kreisel herunterzuziehen, so daß sein Schwerpunkt in die horizontale Ebene durch O fällt; und gerade so wie der Kreisel nicht umfällt, sondern sich fortbewegt mit einer solchen Präzession, daß, wenn die Bewegung stationär ist, die Axe einen Kegel um die Senkrechte OC beschreibt, so beschreibt die Erdaxe als Resultante der Momente aller auf sie ausgeübten Kräfte eine kegelförmige Bewegung im Weltraume von einer Periode von ungefähr 26 000 Jahren. Die Bahn des Nordpols der Erde ist also ein Kreis zwischen den Sternen der Himmelskugel hindurch um den Pol der Ekliptik.

Es gibt drei hauptsächliche periodische Störungen der Präzessionsbewegung als Ursachen der sog. Nutation der Erde, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann. Die gedachten Störungen sind übrigens von der Natur erzwungener Schwankungen, da sie durch Kräfte hervorgerufen werden, die ihre eigene Periode haben.

264. Elementare Berechnung der Präzession bei stationärer Bewegung. Die folgende Methode zur Untersuchung der stationären Bewegung eines Kreisels ist einfach, dient zur Erläuterung der Idee einer augenblicklichen Rotationsaxe, wie sie oben, § 94 erklärt worden ist, und kann direkt auf die Präzessionsbewegung der Erde angewandt werden. Der Kreisel dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um seine Axe und relativ zur ZOC-Ebene, während sich der Schwerpunkt mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ um OZ dreht. Erfolgt die Rotation um die Kreiselaxe, von oben gesehen, gegen den Uhrzeiger, so wird die Präzessionsbewegung, von oberhalb Z (Fig. 145) aus gesehen, ebenfalls dem Uhrzeiger entgegen gerichtet sein. Da der

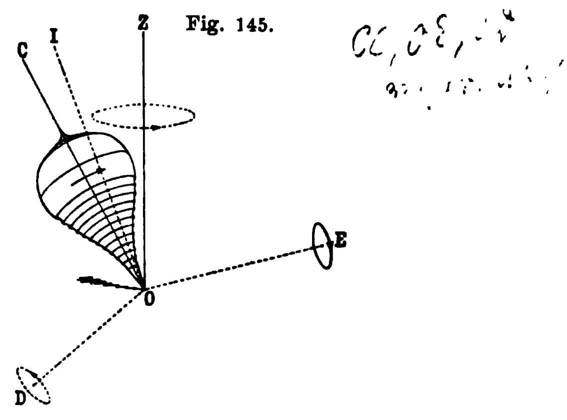


Fig. 145.

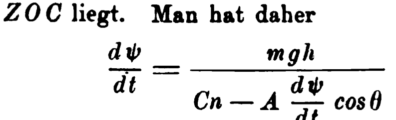
Es ist aber nach Gl. (71) leicht zu beweisen, daß

$$\sin(\theta-\beta)=\sin\theta\left(1-\frac{A}{Cn}\frac{d\psi}{dt}\cos\theta\right)\frac{Cn}{K} \quad \cdot \cdot \quad (72)$$

ist; folglich beträgt der von Q in der Zeit dt um OZ zurückgelegte Winkel

$$\frac{mgh\,dt}{Cn-A\,\frac{d\psi}{dt}\cos\theta}\,.$$

Dies muß gleich $\dot{\psi}\,dt$ sein, da die Bewegung stationär ist und die Axe des resultierenden Moments der Bewegungsgröße immer in der Ebene ZOC liegt. Man hat daher



$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{mgh}{Cn-A\,\frac{d\psi}{dt}\cos\theta}$$

oder

$$A\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\cos\theta-Cn\,\frac{d\psi}{dt}+mgh=0,$$

also wieder dasselbe Ergebnis.

Fig. 146.



Wenn $\theta=\pi/2$ ist, d. h. wenn die Kreiselaxe horizontal liegt, verschwindet das erste Glied.

Bei großem n gilt Gl. (70) annähernd, wie wir gesehen haben, wenn das erste Glied weggelassen wird; sie ist anwendbar auf einen Gyrostaten in stationärer Bewegung, gleichviel, ob er auf der sein Gehäuse umgebenden Schneide ruht (Fig. 143) mit seiner Axe in einer zur Senkrechten geneigten Axe oder ob er an einem Faden hängt, der an dem die Axe einschließenden Teile des Gehäuses befestigt ist (Fig. 146).

266. Zahlenbeispiel für die Präzession des Gyrostaten. Als Zahlenbeispiel nehmen wir das folgende: Ein Gyrostat hängt mit horizontaler Axe an einem Seil, das in dem die Axe in einer Entfernung von 5 cm vom Trägheitsmittelpunkt des Ganzen umgebenden Gehäuse befestigt ist. Das Schwungrad wiegt 1500 g, hat einen Gyrationsradius von 4 cm und rotiert mit einer Geschwindigkeit von 200 Umdrehungen in der Sekunde. Die Masse des Rades und Gehäuses zusammen beträgt 2200 g. Es ist die Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung bei stationärer Bewegung zu finden.

Das Moment des Gewichtes um den Befestigungspunkt des Seiles, also mgh, ist in CGS-Einheiten annähernd 2160×5000. Der Wert von Cn ist $1800 \times 16 \times 400\pi$. Folglich ist $\dot{\psi}=0{,}298$, d. h. die

Axe dreht sich in der horizontalen Ebene mit einer Winkelgeschwindigkeit von etwa einem Drittel des dem Radius gleichen Bogens oder von reichlich 18° in der Sekunde; in 20 Sekunden findet also ein Präzessionsumlauf statt.

Die Tatsache, daß ein so unterstützter und in der beschriebenen Weise sich bewegender Gyrostat sich mit horizontaler Axe erhalten kann, obgleich der Schwerpunkt nicht in die durch den Unterstützungspunkt gelegte Senkrechte trifft, ist als paradox angesehen worden. Sie ist es aber ebensowenig wie das Verhalten eines gewöhnlichen Kreisels, der sich mit zur Senkrechten geneigter Axe dreht, vorausgesetzt, daß die eigentliche Präzessionsbewegung ungehindert sich entwickeln kann.

Der Leser kann sich in dem hier Erläuterten üben, indem er die allgemeine Wirkung der Einführung eines Kräftepaares von helfender oder hemmender Wirkung auf die Präzessionsbewegung betrachtet. Für einen Kreisel, der in der gewöhnlichen Weise auf einer horizontalen Ebene tanzt, oder für einen Gyrostaten, der auf der der Ebene des Schwungrades entgegengesetzten Schneide in eine gegen die Senkrechte geneigte Lage gebracht ist, oder für einen Gyrostaten, der an einem Faden hängend kreiselt, wie in Fig. 146, veranlaßt ein hemmendes Kräftepaar den Körper, auf die gewöhnliche Weise, unter der Wirkung der Schwere, zu fallen; ein helfendes Kräftepaar veranlaßt den Schwerpunkt, sich aufzurichten. In dieser Weise kann auch die Wirkung der Reibung an der Spitze eines gewöhnlichen Kreisels beim Aufrichten des Schwerpunktes aufgefaßt werden. Wir haben hier keinen Raum, die vollständige Rechnung der Kreiselbewegung zu geben für den Fall des Kreiselns auf einer rauhen Ebene auf einer verrundeten Spitze von endlicher Größe, so daß ein reibendes Kräftepaar von endlichem Moment darauf Anwendung findet. Der Leser möge in dieser Hinsicht z. B. Jelletts Theorie der Reibung zu Rate ziehen, in welcher der Gegenstand ausführlich behandelt ist.

267. Präzessionsbewegung der Erde. Die Präzessionsbewegung, im besonderen die der Erde, wird durch das in Fig. 147 (a. f. S.) gezeichnete Modell gut erläutert. Die Kugel, deren südliches Ende weggeschnitten ist, ist so abgeglichen, daß sie mit dem vom Nordpol hervorragenden Stäbchen sich gegen die innere Seite eines horizontalen Ringes stützt; sie stellt die Erde dar. Raumkegel und Körperkegel (§ 264) haben ihre Scheitel im Mittelpunkte der Kugel; zur Basis hat jener den Kreis der Berührungspunkte des Stäbchens mit den successiven Punkten des Ringes, dieser den Kreis der Berührungspunkte des Ringes mit den successiven Punkten des Stäbchens. Die Ebene des Ringes ist mit der Ekliptik parallel zu nehmen; der vertikale Kegelwinkel ist das Doppelte des Winkels zwischen der Äquatorebene und der Ekliptik, d. h. das Doppelte der sog. Schiefe der Ekliptik. Da die Erdrotation in dem dem Uhrzeiger entgegengesetzten Sinne stattfindet, so geht die Prä-

zessionsbewegung mit dem Uhrzeiger. Der Raumkegel ist in dem Modell in richtigem, der Körperkegel in enorm übertriebenem Größenverhältnis dargestellt.

Der Durchmesser des rollenden Kreises kann für die Erde leicht berechnet werden unter der Annahme, daß sie — mit im Raume festem Mittelpunkte und unter gleichförmiger Beschreibung ihrer Präzessionsbewegung in der Periode von 25868 Jahren — kreiselt. Der Durchmesser des Berührungskreises des Raumkegels, d. h. der Durchmesser des Ringes ist in cm ungefähr $128 \times 10^7 \times \sin(23^{\circ}27'12'')$; dies muß aber das 25868 $\times$ $366^1/_4$-fache des Durchmessers des Kontaktkreises des Körperkegels sein, so daß dieser letztere Durchmesser etwa 54 cm wird. Mit anderen Worten: der Schnittpunkt der Momentanaxe mit der Erdoberfläche beschreibt einen Kreis von 27 cm Radius. Das Modell befindet sich im physikalischen Institute der Universität Glasgow, die Zeichnung ist aus Thomson und Taits Natural Philosophy entnommen [1]).

Fig. 147.



268. Gegenwirkung auf den Kreisel seitens der Unterlage. Als Beispiel für § 169 können wir die Gegenwirkung ermitteln, die durch die horizontale Tragfläche auf den Kreisel ausgeübt wird. Wenn die Fläche glatt ist, ist diese Kraft senkrecht nach oben gerichtet, ihr Betrag sei Y. Die Bewegung des Schwerpunktes ist dieselbe, als ob alle Kräfte in ihm vereinigt angriffen. Die senkrecht nach oben gerichtete Komponente ist im Schwerpunkt $Y - mg$. Aber der Schwerpunkt hat eine Beschleunigung $h\dot{\theta}^2$ nach O zu und eine andere $h\ddot{\theta}$ senkrecht zu OC so gerichtet, daß sie θ vergrößert. Also ist offenbar $mh\ddot{\theta} = (mg - Y)\sin\theta$, $mh\dot{\theta}^2 = (mg - Y)\cos\theta$, und demnach

$$Y = mg - mh\left[\frac{d^2\theta}{dt^2}\sin\theta + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cos\theta\right] \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Die Wirkung der Tragfläche ist also um $mh(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)$ geringer als die Schwere des Kreisels.

---

[1]) In der deutschen Ausgabe nicht enthalten.

Der Wert von Y kann nach der folgenden instruktiven Methode gefunden werden. Die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung ist $\frac{1}{2} m h^2 \dot{\theta}^2$, und davon ist der der senkrechten Geschwindigkeitskomponente $h\dot{\theta}$ entsprechende Teil $\frac{1}{2} m h^2 (\dot{\theta} \sin\theta)^2$. Wenn man sich erinnert, daß die in irgend einer Richtung auf einen widerstandslosen Körper ausgeübte Kraft der räumliche Zuwachsgrad (in eben dieser Richtung) der kinetischen Energie ist, sieht man, daß die vom Boden dem Kreisel erteilte, über die Schwere mg hinaus aufwärts gerichtete Kraft der nach oben gerichtete Zuwachsgrad von $\frac{1}{2} m h^2 (\dot{\theta} \sin\theta)^2$ ist, d. h. der Zuwachs dieser Größe pro Zuwachseinheit der Höhe $h \cos\theta$ des Schwerpunktes.

Demnach ergibt sich

$$Y = mg + \frac{1}{2} \frac{d\left[m h^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \sin\theta\right)^2\right]}{d(h\cos\theta)}$$

oder

$$Y = mg + \frac{1}{2} m h \frac{d\left(\frac{d\theta}{dt} \sin\theta\right)^2}{d(\cos\theta)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (74)$$

Der Leser mag durch Differentiation beweisen, daß dies genau der durch den anderen Prozeß erhaltene Wert von Y ist.

269. Gyrostatische Wirkung des Schwungrades oder der Armatur der Dynamomaschine. Wenn ein Schwungrad auf Lagern läuft, die nicht fest sind, sondern sich mit dem Körper, an dem sie befestigt sind, herumbewegen, so treten gyrostatische Kräfte ins Spiel, die zwar manchmal übersehen werden, die aber doch von praktischer Wichtigkeit sind. Betrachten wir z. B. an einer Dynamomaschine die Armatur, die schnell um eine in Lagern befestigte Axe an Bord eines Schiffes kreiselt. Liegt diese Axe in der Querrichtung des Schiffes, so bringt das Rollen des Schiffes Kräfte ins Spiel, die in jedem Augenblicke aus einer auf das eine Lager wirkenden Kraft nach dem Bug zu und einer gleichen auf das andere Lager wirkenden Kraft nach dem Steuer zu bestehen. Die stampfende Bewegung des Schiffes hat keine solche Wirkung. Wenn anderseits die Armaturaxe in der Längsrichtung des Schiffes liegt, ruft das Stampfen Kräfte auf die Lager hervor, die eine nach Steuerbord, die andere nach Backbord des Schiffes gerichtet, während das Rollen keine solche Wirkung hervorruft. Diese Kräfte kehren sich mit der Umkehrung der Bewegung um, und so entsteht ein sich fortwährend umkehrender Druck, abwechselnd auf die Vorderseite und Rückseite jedes Lagers.

Derselbe Vorgang spielt sich ab mit den rotierenden Teilen der Maschinen und mit dem Schraubenschaft in seinen Lagern, wenn das Schiff stampft, nur sind in diesen Fällen die Winkelgeschwindigkeiten selten so groß, daß sie die Wirkung bedeutend machen könnten.

Eine Ausnahme bildet der Fall von Dampfturbinen, die mit großer Tourenzahl laufen. Hier ist zwar die Wirkung des Rollens gleich null, die des Stampfens aber derart, daß sie ein alternierendes, von der gyrostatischen Wirkung herrührendes Kräftepaar ins Spiel bringt, welches bestrebt ist, das Schiff um eine vertikale Axe zu drehen. Eine plötzliche Kursänderung des Schiffes würde überdies ein gyrostatisches Kräftepaar um eine horizontale Axe ins Spiel bringen.

Der Betrag der Kraft kann folgendermaßen gefunden werden. Es sei die Winkelgeschwindigkeit, mit der das Schiff rollt (oder stampft), $\dot{\psi}$ und die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Maschinenteils n, sein Trägheitsmoment um die Axe sei C; dann entspricht $\dot{\psi}$ genau der Winkelgeschwindigkeit (§ 262) der Präzessionsbewegung des Gyrostaten in der horizontalen Ebene unter dem Kräftepaar L, das um eine zur Rotationsaxe und zur Ebene der Präzessionsbewegung senkrechte Axe wirkt. Das Moment des Kräftepaares L ist $Cn\dot{\psi}$ (§ 262). Für die Präzessionsbewegung von der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$, die durch das Rollen des Schiffes dem rotierenden Maschinenteil erteilt wird, muß ein Kräftepaar vom Betrage $Cn\dot{\psi}$ durch die Lager der Axe erteilt werden; wenn l die Entfernung zwischen den Zentren der Lager ist, so ist die Kraft auf jedes von ihnen $Cn\dot{\psi}/l$. Sie ist daher dem Trägheitsmoment des rotierenden Teiles und jeder der Winkelgeschwindigkeiten n und $\dot{\psi}$ proportional; sie ist am größten in der Mitte einer Roll- (oder Stampf-) Bewegung des Schiffes und null an ihrem Anfang und Ende, wenn das Schiff seine Winkelbewegung umkehrt.

Diese Kräfte sind, wie nochmals bemerkt werden muß, derart, daß sie ein Kräftepaar um eine Axe hervorrufen, die gleichzeitig zur Rotationsaxe und zu der Axe, um die das Rollen oder Stampfen stattfindet, senkrecht ist; sie werden im Falle einer Dynamomaschine manchmal fälschlich als Kräfte bezeichnet, die auf Spitze und Boden der Lager wirken.

270. Zahlenbeispiel gyrostatischer Wirkung der Dynamomaschine an Bord. Als Zahlenbeispiel nehmen wir den Fall eines großen Alternators, dessen Armatur 10 Zentner wiegt, einen Gyrationsradius von 60 cm hat und mit einer Geschwindigkeit von 600 Umdrehungen in der Minute läuft. Wir nehmen die Axe in der Querrichtung des Schiffes an und denken uns das Schiff durch einen Gesamtbetrag von 30^0 in einer Periode von 10 Sekunden rollend. Mit g und cm als Massen- und Längeneinheit beträgt das Trägheitsmoment der Armatur 18×10^8; die Winkelgeschwindigkeit der Rotation der Armatur beträgt im Bogenmaß 20π in der Sekunde; die maximale Winkelgeschwindigkeit des Schiffes ist $2\pi \times 15/(10 \times 57{,}3) = 3\pi/57{,}3 = 0{,}165$ im Bogenmaß in der Sekunde. Folglich ist das auf die Lager ausgeübte Kräftepaar in einer Ebene parallel zur Basis der Dynamomaschine gleich $18 \times 10^8 \times 20\pi \times 0{,}165$ in CGS-Ein-

beiten. Beträgt die Entfernung zwischen den Mittelpunkten der Lager 60 cm, so ist die jedem Lager erteilte maximale Kraft in kg (Gewichtsmaß) ausgedrückt diese Zahl durch 981 000 × 60, dividiert, d. h. sie ist etwa 307. Die auf die Vorder- oder Rückseite jedes bei jeder halben Umdrehung umgekehrten Lagers ausgeübte Kraft ist also ungefähr eine Drittel Tonne.

---

271. Ebene Bewegung auf rotierende Axen bezogen. Ehe wir die Dynamik eines Systemes von Körpern verlassen, wird es von Nutzen sein, die Bewegung eines Teilchens oder eines starren Körpers in Beziehung auf bewegte Axen zu betrachten.

Als ein erstes, einfaches Beispiel nehmen wir (Fig. 148) den Fall eines Teilchens B, das sich in einer Ebene bewegt, und dessen Lage

Fig. 148.

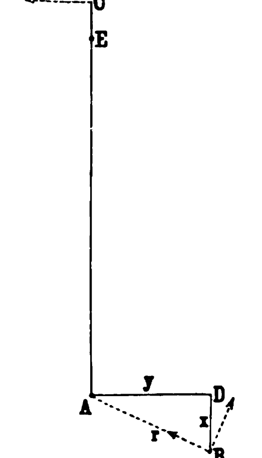
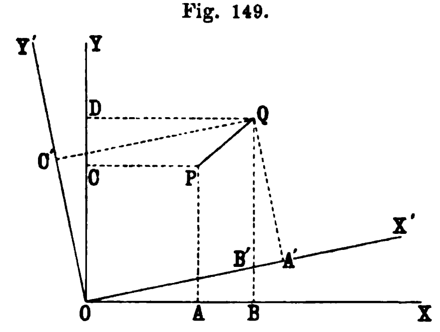


Fig. 149.



durch rechtwinkelige Koordinaten x, y bestimmt ist, die von einem in Ruhe befindlichen Anfangspunkte A aus gezogen sind. Wir nehmen an, daß die Axen mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit n um A rotieren in der durch den Pfeil bei B angegebenen Richtung. Auf die sich bewegenden Axen bezogen sind die Geschwindigkeitskomponenten von B gleich $\dot{x}, \dot{y}$; aber außer diesen hat das Teilchen noch Geschwindigkeitskomponenten, die von der Bewegung der Axen herrühren. Um diese letzteren Komponenten zu finden, stellen wir uns B starr mit den Axen verbunden vor, so daß $\dot{x}, \dot{y}$ null sind; dann wird es sich mit der Winkelgeschwindigkeit n um A drehen, und seine Liniengeschwindigkeit, die senkrecht zu AB statthat, ist nr, wenn $r = AB$ ist. Die mit x parallele Komponente hiervon ist $-ny$, und ebenso ist die mit y parallele Komponente nx. Die gesamten Geschwindigkeitskomponenten u, v des Teilchens, bezogen auf feste Axen, die mit den Lagen der x- bezw. y-Axe in dem betrachteten Augenblicke zusammenfallen, ergeben sich daher aus den Gleichungen

$$u = \frac{dx}{dt} - ny, \qquad v = \frac{dy}{dt} + nx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Die Bedeutung von u, v wird sich vielleicht aus Fig. 149 (a. v. S.) klarer erkennen lassen. Die sich drehenden Axen sind durch OX, OY in einer Lage und durch OX', OY' in einer folgenden, der ersten benachbarten Lage dargestellt. In dem dazwischenliegenden Zeitraume dt möge ein Punkt P sich von P nach Q bewegen; die Verrückung längs der sich drehenden x-Axe erfolgt von OA nach OA' und längs der y-Axe von OC nach OC'. $OA' - OA$ ist die Änderung in x, $OC' - OC$ ist die Änderung in y; der Grenzwert von $(OA' - OA)/dt$, wenn dt kleiner und kleiner gewählt wird, ist $\dot{x}$; ebenso ist der Grenzwert von $(OC' - OC)/dt$ gleich $\dot{y}$.

Wenn wir jetzt die aktuellen Geschwindigkeiten des Punktes P parallel mit den OX, OY-Axen finden wollen, so haben wir für die Komponenten von PQ in bezug auf diese Axen: AB bzw. CD. AB ist aber um $B'A'$, also um $QB' \times \sin B'QA'$, kleiner als $OA' - OA$. Der Winkel $B'QA'$ ist $n\,dt$, und bei kleinem dt wird $QB' = y$ und $\sin B'QA' = n\,dt$. Folglich wird $AB = OA' - OA - B'A' = (\dot{x} - ny)\,dt$. Wenn wir die aktuelle Geschwindigkeit längs OX mit u bezeichnen, haben wir $AB = u\,dt$ und also $u = \dot{x} - ny$. Ebenso können wir, wenn v die aktuelle Geschwindigkeit längs OY ist, zeigen, daß $v = \dot{y} + nx$ ist.

Kehren wir jetzt zu Fig. 148 zurück und betrachten wir ein Teilchen, dessen Koordinaten, auf die x, y-Axen bezogen, zahlenmäßig gleich u, v sind. Die Geschwindigkeitskomponenten dieses Teilchens im Raume werden in entsprechender Weise $\dot{u} - nv$, $\dot{v} + nu$ sein. Dies sind aber die zeitlichen Änderungsgrade von u, v und sind folglich die Beschleunigungen des ersten Teilchens in bezug auf feste Axen, die für diesen Augenblick mit den bewegten x, y-Axen zusammenfallen. Demnach haben wir für die Komponenten der Beschleunigung die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} - nv &= \frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} - n^2x \\ \frac{dv}{dt} + nu &= \frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} - n^2y \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (76)$$

Wenn n sich stetig ändert, wird $\dot{u}$ das Glied $-\dot{n}y$ und $\dot{v}$ das Glied $\dot{n}x$ enthalten, das daher den Größen auf der rechten Seite von Gl. (76) beigefügt werden muß.

272. Komponenten einer Richtungsgröße, auf rotierende Axen bezogen. Es mag hier bemerkt werden, daß, wenn P, Q die mit den x, y-Axen parallelen Komponenten irgend einer Richtungsgröße sind, diese Größe durch einen Punkt dargestellt werden kann, dessen Koordinaten zahlenmäßig, in einer beliebigen Skala ausgedrückt, gleich P, Q sind. Dann wird der Punkt, wenn P, Q sich ändern, seine Lage ändern, und die zeitlichen Änderungsgrade der Komponenten, bezogen

auf feste Axen, die für den Augenblick mit den rotierenden Axen zusammenfallen, werden bzw. sein:

$$U = \frac{dP}{dt} - nQ, \qquad V = \frac{dQ}{dt} + nP. \quad . \quad . \quad (77)$$

In genau derselben Weise würden wir für die zeitlichen Änderungsgrade von U, V, auf feste Axen bezogen, die für den Augenblick mit den rotierenden Axen zusammenfallen, die Werte $\dot{U} - nV$, $\dot{V} + nU$ finden. Für konstantes n ergibt sich somit:

$$\frac{dU}{dt} - nV = \frac{d^2P}{dt^2} - 2n\frac{dQ}{dt} - n^2P$$

$$\frac{dV}{dt} + nU = \frac{d^2Q}{dt^2} + 2n\frac{dP}{dt} - n^2Q.$$

Dieser Prozeß kann natürlich unbegrenzt häufig zur Auffindung sukzessiver zeitlicher Änderungsgrade benutzt werden; so sind die zeitlichen Änderungsgrade der letzten Komponenten

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2U}{dt^2} - n\frac{dV}{dt} - n\left(\frac{dV}{dt} + nU\right) &= \frac{d^2U}{dt^2} - 2n\frac{dV}{dt} - n^2U \\ &= \frac{d^3P}{dt^3} - 3n\frac{d^2Q}{dt^2} - 3n^2\frac{dP}{dt} + n^3Q \\ \frac{d^2V}{dt^2} + n\frac{dU}{dt} + n\left(\frac{dU}{dt} - nV\right) &= \frac{d^2V}{dt^2} + 2n\frac{dU}{dt} - n^2V \\ &= \frac{d^3Q}{dt^3} + 3n\frac{d^2P}{dt^2} - 3n^2\frac{dQ}{dt} - n^3P \end{aligned}\right\} (78)$$

Bei nicht konstantem n müssen die aus seiner Änderung hervorgehenden Glieder in die Werte für $\dot{U}$, $\dot{V}$, $\ddot{U}$, $\ddot{V}$ eingesetzt werden.

Die gleichen Ergebnisse gelten, wenn die Richtungsgröße nicht auf zwei Dimensionen beschränkt ist, wie man alsbald (§ 280) sehen wird.

273. Bewegungsgleichungen eines Teilchens, auf rotierende Axen bezogen. Bei nunmehriger Rückkehr zu dem Teilchen bei B (Fig. 148) sei seine Masse m und die parallel mit den positiven Richtungen der x- und y-Axe auf es wirkenden Kräfte seien X, Y. Die Bewegungsgleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} m\left(\frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} - n^2x\right) &= X \\ m\left(\frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} - n^2y\right) &= Y \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

Als Beispiel möge das Teilchen von der Masse eins sein und nach dem festen Mittelpunkt A zu mit einer Kraft μ/r^2 angezogen werden, wo $r = AB$ ist. Die Werte von X, Y sind $-\mu x/r^3$, $-\mu y/r^3$, und daher sind die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} - n^2x = \frac{-\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} - n^2y = \frac{-\mu y}{r^3}$$

oder, wie man es auch schreiben kann:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\mu}{r^3} - n^2\right)x = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\mu}{r^3} - n^2\right)y = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (80)$$

Der Leser mag zur Übung den Ausdruck für die kinetische Energie finden und aus diesem und dem Wert der potentiellen Energie μ/r diese Bewegungsgleichungen nach der Lagrangeschen Methode ableiten.

Wenn man jetzt A als mit der Winkelgeschwindigkeit n um einen festen Punkt E auf der Strecke AC in einer Entfernung a von A rotierend annimmt, so braucht man, wie oben bemerkt wurde, einfach zu $\dot{x}$, $\dot{y}$ die korrespondierenden Geschwindigkeitskomponenten von A hinzuzufügen. Diese sind na in der y-Richtung und null in der x-Richtung. Also bleibt u ungeändert, aus v wird $\dot{y} + n(x + a)$. Die Beschleunigungen werden daher $\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2(x + a)$ und $\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y$, und wenn die Kräfte dieselben sind wie vorher, sind die Bewegungsgleichungen wie die oben angegebenen mit der Einsetzung von $n^2(x + a)$ für n^2x.

274. Elementare Mondtheorie. Angenäherte Bewegungsgleichungen des Mondes. Energiegleichung. Nun sei aber angenommen, daß es drei anziehende Körper gibt, einen in C von sehr großer Masse, einen in A von beträchtlich kleinerer Masse und einen dritten in B von einer Masse, die ihrerseits klein ist im Vergleich mit A, sowie daß die Entfernung AC sehr groß ist im Vergleiche mit AB. So ergeben sich drei Körper, die zur Darstellung des Sonne-Erde-Mond-Systems dienen können.

Die Bewegung der beiden ersten ist nahezu die einer Drehung um ihren gemeinsamen Schwerpunkt E, der wegen der großen Masse der Sonne in C, den Mittelpunkt der Sonne, verlegt werden kann; tatsächlich liegt er nur ungefähr 445 km vom Sonnenzentrum nach der Erde hin, also noch tief im Sonnenkörper. Wir wollen ferner den Mond als einen unendlich kleinen Satelliten, der sich um die Erde dreht, ansehen, d. h. die Beschleunigung der Erde nach dem Monde zu soll im Vergleiche mit der des Mondes nach der Erde hin zu vernachlässigen sein. Die Masse des Mondes ist $^1/_{81}$ der Erdmasse, und der gemeinsame Schwerpunkt von Erde und Mond liegt fast 4800 km vom Erdmittelpunkte entfernt, so daß die hier gemachte Annahme, im Gegensatz zur vorigen, nur eine rohe Annäherung an die Wahrheit bedeutet.

Wir betrachten also die Erde als mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit n in einem Kreise vom Radius a um C als Mittelpunkt

fortschreitend, während sich der Mond um die Erde in derjenigen Bahn dreht, welche sich aus der Bewegung, die er in irgend einem Augenblick hat und den auf ihn wirkenden Kräften, den Anziehungen von Erde und Sonne, ergibt.

Die Beschleunigung der Erde nach der Sonne zu ist in irgend einem beliebigen Augenblick $n^2 a$; das ist die Kraft pro Masseneinheit nach der Sonne zu in der Entfernung a. Folglich ist die pro Masseneinheit auf die Masseneinheit in B nach der Sonne zu ausgeübte Kraft $n^2 a \,.\, a^2/R^2$ oder $n^2 a^3/R^2$, wo $R^2 = (CB)^2 = (x + a)^2 + y^2$ ist. Die Komponenten hiervon in der wachsenden x, y-Richtung sind die Beschleunigungen des Teilchens in B in diesen Richtungen; diese Komponenten sind $-n^2 a^3 (x + a)/R^3$ und $-n^2 a^3 y/R^3$. Nun ist aber annähernd, da x und y klein im Vergleiche mit a sind, $(x + a)/R^3 = 1/(x + a)^2 = 1/a^2 - 2x/a^3$ und $y/R^3 = y/a^3$, wenn Größen, die höhere Potenzen als die dritte von $1/a$ enthalten, vernachlässigt werden. Also sind die Komponenten der von der Kraft nach der Sonne zu herrührenden Beschleunigung $-n^2 a + 2 n^2 x$ und $-n^2 y$. Außer diesen gibt es die von der Erde herrührenden Beschleunigungen in derselben Richtung, nämlich $-\mu x/r^3$ und $-\mu y/r^3$. Folglich sind die Gesamtbeschleunigungen längs x und y:

$$-n^2 a + 2 n^2 x - \frac{\mu x}{r^3} \quad \text{und} \quad -n^2 y - \frac{\mu y}{r^3}.$$

Wenn man diese den schon vorhin berechneten Beschleunigungen $\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 (x + a)$ und $\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y$ gleichsetzt, erhält man die Gleichungen der Mondbewegung mit Rücksicht auf die gewählten Axen. Sie lauten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\mu}{r^3} - 3n^2\right) x = 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + \frac{\mu}{r^3}\, y = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $\dot{x}$, die zweite mit $\dot{y}$, so ist die Summe der Produkte:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 3n^2 x^2 - 2\frac{\mu}{r}\right] = 0,$$

woraus man durch Integration

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] - \frac{3}{2} n^2 x^2 = \frac{\mu}{r} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

erhält, wo C eine Konstante ist; dies ist die Gleichung der relativen Energie.

275. Graphische Darstellung der Mondbahn in bezug auf die Erde. Wenn die Krümmung der wirklichen Bahn oder der Bahn

in bezug auf die Erde in jedem Punkte bekannt ist, kann die Bahn in der Weise gezeichnet werden, daß aufeinander folgende kurze Kreisbögen von den aufeinander folgenden Krümmungszentren als Mittelpunkte beschrieben werden (s. oben § 105). Die Beschreibung der relativen Bahn im vorliegenden Falle ist von großem Interesse im Hinblick auf die neueren Untersuchungen in der Mondtheorie, die von G. W. Hill und von Poincaré ausgeführt worden sind. Wir wollen deshalb die Krümmungen im vorliegenden Falle berechnen.

Fig. 150.

Die Richtungskosinus eines Elementes der wirklichen Bahn in B sind $(\dot{x} - ny)/\dot{s}$, $[\dot{y} + n(x+a)]/\dot{s}$, wo $\dot{s}^2 = (\dot{x} - ny)^2 + [\dot{y} + n(x+a)]^2$ ist. $\dot{s}$ ist natürlich die Geschwindigkeit in B. Die auf das Teilchen eins wirkenden Kräfte ergeben längs der Normalen nach dem Krümmungsmittelpunkte zu aufgelöst die Komponente

$$\left.\begin{aligned} N = &-\left(n^2 y + \frac{\mu y}{r^3}\right)\frac{\frac{dx}{dt} - ny}{\frac{ds}{dt}} \\ &+ \left(2n^2 x - n^2 a - \frac{\mu x}{r^3}\right)\frac{\frac{dy}{dt} + n(x+a)}{\frac{ds}{dt}} \end{aligned}\right\} \quad (83)$$

und das ist $\dot{s}^2/\varrho$, wo ϱ der Krümmungsradius ist. Somit ergibt sich $1/\varrho$ für die wirkliche Bahn durch Division des Ausdruckes auf der rechten Seite durch $\dot{s}^2$.

Um die Krümmung der relativen Bahn zu finden, multipliziert man die erste Bewegungsgleichung mit $\dot{y}$, die zweite mit $\dot{x}$ und zieht das erste Produkt vom zweiten ab. Schreibt man $\dot{s}_r^2$ für $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$, das Quadrat der relativen Geschwindigkeit, so erhält man die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt} = \frac{\mu}{r^3}\left(\frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y\right) - 2n\left(\frac{ds_r}{dt}\right)^2 - 3n^2 x\frac{dy}{dt}.$$

Aus der Größe auf der linken Seite wird, wenn sie durch $\dot{s}_r$ dividiert wird, die Beschleunigungskomponente in der relativen Bahn nach dem Krümmungsmittelpunkte zu; sie wird somit gleich $\dot{s}_r^2/\varrho_r$, wo ϱ_r der Krümmungsradius dieser Bahn in B ist. Daher ergibt der Ausdruck auf der rechten Seite durch $\dot{s}_r^3$ dividiert

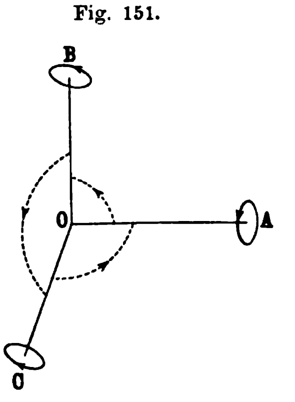
$$\frac{1}{\varrho_r} = \frac{N}{\left(\frac{ds_r}{dt}\right)^2} - \frac{2n}{\frac{ds_r}{dt}} \quad \dots\dots\dots \quad (84)$$

wo N jetzt die Normalkomponente in B derjenigen Kraft bezeichnet, deren Komponenten längs x und y die Werte $-(\mu/r^3 - 3n^2)x$, $-\mu y/r^3$ haben. Das Quadrat der Geschwindigkeit $\dot{s}_r^2$ in der Bahn ist durch Gl. (82) gegeben.

Dieses Ergebnis stimmt überein mit einem von Lord Kelvin[1]) gefundenen und von Maclean benutzten, um nach der schon erwähnten graphischen Methode die in Fig. 150 gezeigte relative Bahn zu zeichnen. Die benutzten Daten waren: $\mu = 1000$, $n = 1$, $2C = -130$, der Anfangswert von x war 2, der von y war null.

276. Bewegung im Raume, auf bewegte Axen bezogen. Es kommt viel darauf an, die Bewegung eines Systemes auf drei zueinander senkrechte Axen beziehen zu können, die sich um ein System von drei, im Raume fest angenommenen Axen drehen. Wir können z. B. die Bewegung eines Teilchens auf der Erdoberfläche auf drei Axen beziehen, deren eine, etwa die z-Axe, mit der Senkrechten nach oben an dieser Stelle zusammenfällt, deren beide andere, die x- und y-Axe vom Erdmittelpunkte etwa nach Süden und Osten in der Ebene senkrecht zur z-Axe gezogen sind. Diese Axen kann man als bewegt ansehen in bezug auf andere Axen, die mit bezug auf die Fixsterne festgestellt sind. Wenn man den Erdmittelpunkt als im Raume fest betrachtet, kann man als eine dieser festen Axen die durch den Pol hindurchgehende Axe der Erdrotation und die beiden anderen senkrecht zueinander in der Äquatorebene annehmen.

Fig. 151.



In vielen Fällen ist es aber praktisch, die bewegten Axen als bewegt mit Bezug auf ein System von drei festen Axen anzusehen, die mit den bewegten Axen in dem betreffenden Augenblicke zusammenfallen. Da diese nach ihrer Lage in bezug auf das gewöhnliche Haupt-Bezugsystem bekannt sind, so erlauben sie, die Bewegung oder die Lage des Körpers, wenn nötig, auf dieses letztere System zu beziehen.

Betrachten wir also einen Punkt, der auf drei zueinander senkrechte Axen OA, OB, OC bezogen ist, die sich in irgend einem Augenblicke mit den Winkelgeschwindigkeiten θ_1, θ_2, θ_3 umeinander drehen; d. h. OB, OC drehen sich in ihrer eigenen Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit θ_1 um OA; OC, OA drehen sich in ihrer eigenen Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit θ_2 um OB; und ebenso drehen sich OA, OB mit der Winkelgeschwindigkeit θ_3 um OC. Die Bewegungsrichtungen sind in Fig. 151 angegeben.

---

[1]) Philosophical Magazine, November 1892.

Wenn dann x, y, z die auf die sich drehenden Axen bezogenen Koordinaten irgend eines Teilchens sind, so sind seine Geschwindigkeitskomponenten, auf die sich drehenden Axen bezogen, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Die genaue Bedeutung der Komponenten $\dot{x}, \dot{y}$ ist oben, § 271, für zwei Axen erklärt worden; dieselbe Erklärung ist vollständig auf den vorliegenden Fall anwendbar. Um die anderen Teile der Geschwindigkeitskomponenten zu finden, ist zu beachten, daß das Axensystem sich zugleich mit den Winkelgeschwindigkeiten $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ um die augenblickliche Lage der Axen selbst dreht. Betrachten wir die Wirkung der Drehung des Paares OA, OB um OC; das Ergebnis ist, daß zu $\dot{x}$ das Glied $-\theta_3 y$ zugefügt wird, gerade wie $-ny$ in dem schon in § 271 behandelten Fall eingeführt wurde, da hier θ_3 die Rolle der Winkelgeschwindigkeit n spielt. Ebenso fügt die Bewegung des Paares OC, OA mit der Winkelgeschwindigkeit θ_2 um OB zu $\dot{x}$ das Glied $\theta_2 z$ hinzu, gerade wie in dem früheren Falle nx zu $\dot{y}$ hinzugefügt wurde. Wir haben daher für die tatsächliche Geschwindigkeit u parallel zur x-Axe:

$$u = \frac{dx}{dt} - y\theta_3 + z\theta_2.$$

Die vor sich gehende Richtungsänderung von OA kann dieses Ergebnis nicht beeinflussen. Für einen verschwindend kurzen Zeitraum dt ändern sich die Lagen der Ebenen AOB, COA, aus denen die Glieder $-y\theta_3$, $z\theta_2$ entstehen, nur infinitesimal in ihrer Richtung, und so sind diese Glieder im Grenzwerte unberührt.

Durch denselben Prozeß erhält man entsprechende Ergebnisse für die aktuellen Geschwindigkeiten, parallel den beiden anderen Axen OB, OC. Somit hat man die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} - y\theta_3 + z\theta_2 \\ v &= \frac{dy}{dt} - z\theta_1 + x\theta_3 \\ w &= \frac{dz}{dt} - x\theta_2 + y\theta_1 \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (85)$$

277. Beliebige Richtungsgröße im Raume, auf rotierende Axen bezogen. Beispiele. Wie frühere, so ist auch dieser Prozeß auf die Berechnung der Änderungsgrade der Komponenten einer beliebigen Richtungsgröße, bezogen auf rotierende Axen, anwendbar. Es seien also F, G, H die Komponenten (auf die rotierenden Axen in ihrer augenblicklichen Lage bezogen) des Momentes der Bewegungsgröße eines starren Körpers, der sich mit einem festen Punkt (dem Anfangspunkt) dreht; und es seien gleicherweise L, M, N die Komponenten (um die rotierenden Axen) der Momente der Kräfte in dem Körper.

Dann kann man die Koordinaten eines Punktes zahlenmäßig gleich F, G, H setzen und findet dann als ihre Änderungsgrade:

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{dF}{dt} - G\theta_3 + H\theta_2 \\ V &= \frac{dG}{dt} - H\theta_1 + F\theta_3 \\ W &= \frac{dH}{dt} - F\theta_2 + G\theta_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (86)$$

Die Größen auf der rechten Seite sind offenbar die aktuellen Änderungsgrade von FGH (in diesem Augenblick) parallel zu festen, mit OA, OB, OC zusammenfallenden Axen. Wenn man also L, M, N für U, V, W in Gl. (86) einsetzt, erhält man die Bewegungsgleichungen des starren Körpers.

Als ein weiteres Beispiel nehmen wir die Winkelgeschwindigkeiten θ_1, θ_2, θ_3 der Axen selbst. Wenn wir die Winkelgeschwindigkeiten um feste Axen, die für den Augenblick mit den rotierenden Axen zusammenfallen, θ_x, θ_y, θ_z nennen, so haben wir

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta_x}{dt} &= \frac{d\theta_1}{dt} - \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_2 = \frac{d\theta_1}{dt} \\ \frac{d\theta_y}{dt} &= \frac{d\theta_2}{dt} - \theta_3\theta_1 + \theta_1\theta_3 = \frac{d\theta_2}{dt} \\ \frac{d\theta_z}{dt} &= \frac{d\theta_3}{dt} - \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1 = \frac{d\theta_3}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (87)$$

Demnach sind die Änderungsgrade der Winkelgeschwindigkeiten um die rotierenden Axen genau die um feste, mit ihnen zusammenfallende Axen (ein Satz, der nicht etwa schon aus der Tatsache folgt, daß in dem betreffenden Augenblick $\theta_x = \theta_1$, $\theta_y = \theta_1$, $\theta_z = \theta_3$ ist).

---

278. Bewegung relativ zur Erde. Als eine Veranschaulichung nehmen wir hier das Problem der Bewegung eines freien Teilchens nahe einem Punkte P auf der Erdoberfläche, wobei die Axen das sich bewegende System aus § 276 sind, nämlich x, y-Axen nach Süden und Osten durch den Erdmittelpunkt parallel zur horizontalen Ebene in P und eine z-Axe längs der Vertikallinie durch P nach oben gezogen. Wir wollen die Winkelgeschwindigkeit der Erde um die Polaraxe mit n bezeichnen und annehmen, daß die resultierende Schwerkraft in einem Punkte P nach unten gerichtet ist in einer Linie, die mit der zum Horizont Senkrechten einen kleinen Winkel θ bildet. Wenn der Zahlenwert dieser Kraft für die Masseneinheit G ist, so ist die Komponente längs der Senkrechten nach oben: $-G \cos \theta$. Die x-Komponente in P ist $G \cos(\theta + \frac{1}{2}\pi)$ oder $-G \sin \theta$, und die y-Komponente ist null, da

die x- und z-Axe im Meridian liegen. Liegt das Teilchen nicht in P, sondern hat es Koordinaten relativ zu parallelen Axen mit P als Anfangspunkt, x, y, $z - a$, so werden Ergänzungskomponenten X, Y, Z auf das Teilchen wirken, die, wenn x, y, z bekannt sind, aus dem für den Ort des Teilchens geltenden Werte von G leicht berechnet werden können. Außerdem sei angenommen, daß irgend welche andere angreifende Kräfte X', Y', Z' auf das Teilchen wirken.

Wenn λ die geographische Breite bei P bezeichnet, d. h. den Winkel, den die Senkrechte dort mit der Äquatorebene der Erde bildet, so ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde, und folglich auch die des Axensystemes, um die Senkrechte: $n \sin \lambda$, die Winkelgeschwindigkeit um die x-Axe ist $-n \cos \lambda$, und die um die y-Axe ist null. Folglich erhält man nach Gl. (86), wenn man $(F, G, H) = (u, v, w)$, wie sie in Gl. (85) gegeben sind, setzt und beachtet, daß $\theta_1 = -n \cos \lambda$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = n \sin \lambda$ ist, die exakten Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} n \sin \lambda - n^2 \sin \lambda (z \cos \lambda + x \sin \lambda) \\ &\qquad\qquad = X + X' - G \sin \theta \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt} n \cos \lambda + 2\frac{dx}{dt} n \sin \lambda - yn^2 = Y + Y' \\ &\frac{d^2z}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} n \cos \lambda - n^2 \cos \lambda (z \cos \lambda + x \sin \lambda) \\ &\qquad\qquad = Z + Z' - G \cos \theta \end{aligned}\right\} \quad (88)$$

Wählt man den Anfangspunkt auf der Senkrechten (z. B. in P) in einer Entfernung a vom Erdmittelpunkte, so ist die einzige notwendige Veränderung die Einsetzung von $z + a$ für z. Die Gleichungen lauten alsdann:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} n \sin \lambda - n^2 \sin \lambda (z \cos \lambda + x \sin \lambda) \\ &\qquad = X + X' - G \sin \theta + n^2 a \sin \lambda \cos \lambda \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt} n \cos \lambda + 2\frac{dx}{dt} n \sin \lambda - yn^2 = Y + Y' \\ &\frac{d^2z}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} n \cos \lambda - n^2 \cos \lambda (z \cos \lambda + x \sin \lambda) \\ &\qquad = Z + Z' - G \cos \theta + n^2 a \cos^2 \lambda \end{aligned}\right\} \quad (88a)$$

279. Foucaultsches Pendel. Als ein Beispiel sei hier die Bewegung eines einfachen Pendels von der Länge l betrachtet, das in P aufgehängt ist und unter der Wirkung der Schwere kleine Schwingungen um die Senkrechte ausführt. Eine für praktische Zwecke genügende Genauigkeit wird erzielt, wenn man die Bewegung längs der z-Axe gleich null setzt und die Glieder in n^2 auf der linken Seite der x- und y-Gleichungen (s. § 278) vernachlässigt. Die Kraft $-G \sin \theta$ ist zu vernachlässigen, da θ sehr klein ist; die die Bewegung beeinflussenden angreifenden Horizontalkräfte sind die durch die streckende

Kraft T im Faden hervorgerufenen, also gleich $-Tx/l$ bezw. $-Ty/l$. Aber vermöge der z-Gleichung der Bewegung hat man, da die linke Seite gleich null und die angreifende Kraft gleich $-Tz/l = T$ (infolge von $z = -l$) ist:

$$T = G\cos\theta - n^2 a\cos^2\lambda = g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

wo g eine Größe ist, die man die scheinbare Schwere eines Einheitsteilchens längs der Senkrechten (s. § 281) nennen kann. Also hat man, wenn man ω für $n\sin\lambda$ schreibt, die Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega\frac{dy}{dt} + \frac{g}{l}x = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega\frac{dx}{dt} + \frac{g}{l}y = 0 \quad . \quad . \quad (90)$$

Eine angängige Lösung von Gl. (90) für den Fall gewöhnlicher kleiner Schwingungen in einer Ebene ist:

$$x = a\cos mt\cos\omega t, \qquad y = -a\cos mt\sin\omega t \quad . \quad . \quad (91)$$

wo $m = \sqrt{g/l}$ ist. In diesem Spezialfalle ist, wenn $t = 0$ ist, $x = a$, $y = 0$; wenn $\omega t = \pi/2$ ist, $x = 0$ und $y = -a\cos(m\pi/2\omega)$ usw. Die Schwingungsebene des Pendels wird sich daher scheinbar um die Senkrechte drehen, und zwar mit der Winkelgeschwindigkeit ω, d. h. $n\sin\lambda$, und wird in $24/\sin\lambda$ Stunden eine vollständige Umdrehung ausführen.

Dieses Ergebnis wurde von Foucault gefunden, der als erster vorschlug, die Drehung der Erde durch die relative Drehung der Schwingungsebene eines Pendels um die Senkrechte sichtbar zu machen. Es gibt allerdings eine ernstliche praktische Schwierigkeit in der Durchführung des Experimentes, die dem Einflusse der Befestigungsart des Pendelfadens am oberen Ende zuzuschreiben ist. Trotzdem kann das Ergebnis als durch die ausgeführten Experimente vollständig bewiesen angesehen werden.

Es ist klar, daß eine mögliche Art der Schwingung eines frei aufgehängten Pendels eine solche ist, bei der der Pendelkörper sich in einem Kreise bewegt. Für diesen Fall muß eine konstante Verrückung $\sqrt{x^2 + y^2} = a$ statthaben, und die Lösung ist

$$x = a\cos mt, \qquad y = a\sin mt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91')$$

bei geeigneter Wahl des Anfangspunktes der Zeit. (Hier ist m nicht mehr g/l.) Wenn diese Werte in die Differentialgleichungen (85) eingesetzt werden, ergibt jede von ihnen

$$m^2 + 2\omega m - \frac{g}{l} + \omega^2 = 0.$$

Die Wurzeln hiervon sind $-\omega \pm \sqrt{g/l}$ und sind reell. In dem einen Falle geht das Pendel mit der Erddrehung in der Periode $2\pi/[\sqrt{g/l} - \omega]$ herum; im anderen dreht es sich gegen die Erdrotation in der Periode $2\pi/[\sqrt{g/l} + \omega]$. Diese Perioden sind, aus-

geschrieben, $2\pi/(\sqrt{g/l} - n \sin\lambda)$ und $2\pi/(\sqrt{g/l} + n \sin\lambda)$, so daß die Winkelgeschwindigkeit relativ zur Erde im ersten Falle um $n \sin\lambda$, (die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation um die Vertikale am Orte des Experiments), verringert, im zweiten um ebensoviel vergrößert wird.

Dieses und andere analoge Experimente haben als Beweis gegolten, daß die Erde sich absolut, nicht nur relativ zu den Fixsternen, dreht. Anderseits kann das Tatsächliche des Falles darin ausgesprochen werden, daß, wenn die Bewegung auf relativ zu den Fixsternen feste Axen bezogen und jede Wirkung auf den Körper, außer der von der Erde ausgehenden, vernachlässigt wird, die Gleichungen von der einfachen Form sind, die man erhält, indem man aus Gl. (90) die von ω abhängenden Glieder wegläßt, während, wenn sie auf Axen bezogen wird, die auf der Erde fest sind, diese Glieder mit eingeschlossen sein müssen. Die Frage hängt sehr davon ab, was unter „absoluter Rotation" der Erde gemeint ist.

280. Abweichung des fallenden Körpers von der Lotlinie. Abweichung des Geschosses. Als ein weiteres Beispiel sei die Abweichung von der Vertikalen berechnet, die ein Körper erfährt, den man von der Ruhelage in einem Punkte von der Entfernung h über dem auf der Erdoberfläche angenommenen Anfangspunkte losläßt. Die Bewegungsgleichungen sind nach Gl. (88) angenähert:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} n \sin\lambda = 0, \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt} n \cos\lambda + 2\frac{dx}{dt} n \sin\lambda = 0 \\ &\frac{d^2z}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} n \cos\lambda = -g \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (92)$$

Integriert man jede von diesen, so erhält man, da für $t = 0$ auch $x = y = 0$, $\dot{x} = \dot{y} = 0$ ist:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} - 2yn \sin\lambda = 0, \\ &\frac{dy}{dt} + 2zn\cos\lambda + 2xn \sin\lambda = 2hn\cos\lambda, \\ &\frac{dz}{dt} - 2yn\cos\lambda = -gt \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (92a)$$

Die erste und dritte dieser Gleichungen ergeben durch Elimination von y und nochmalige Integration

$$x = (\tfrac{1}{2}gt^2 + z - h)\, tg\,\lambda.$$

Offenbar ist aber $h - z$, die längs der Vertikalen in der Zeit t durchfallene Strecke, sehr annähernd $\frac{1}{2}gt^2$, so daß x, die Abweichung nach Süden, praktisch null wird. Darum kann das dritte Glied in der

zweiten von den integrierten Gl. (92a) als null angenommen werden. Wenn man für z den Wert $h - \frac{1}{2} g t^2$ in das zweite Glied dieser Gleichung einsetzt und für die Abweichung nach Osten in der Zeit t integriert, so erhält man $y = \frac{1}{3} g t^3 n \cos\lambda$. Hat das Teilchen die Oberfläche erreicht, so ist $t = \sqrt{2h/g}$ geworden, und folglich:

$$y = \frac{2}{3} \sqrt{2 h^3/g} \,.\, n \cos\lambda.$$

In mittleren Breiten beträgt hiernach die Fallabweichung bei 100 m Fallhöhe nur etwa 1 cm, bei 1000 m Fallhöhe dagegen schon 32 cm.

Es ist interessant, den Fall zu betrachten, in dem die Geschwindigkeit des fallenden Körpers nahezu horizontal gerichtet ist. Aus den Näherungsgleichungen (92) kann man die durch die Erdrotation veranlaßte Abweichung berechnen, die ein Geschoß erfährt, das mit der Geschwindigkeit V, einer gegebenen kleinen Elevation α und in einer Richtung, die zur positiven (südlichen) Richtung von x um den Winkel β geneigt ist, abgefeuert wird. Der Leser kann die Einzelheiten der Berechnung nach folgendem Stufengange durchnehmen:

Gl. (92), einmal von 0 bis t integriert, ergeben, da anfänglich $\dot{x} = V \cos\alpha \cos\beta$, $\dot{y} = V \cos\alpha \sin\beta$, $\dot{z} = V \sin\alpha$ ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - 2 y n \sin\lambda &= V \cos\alpha \cos\beta \\ \frac{dy}{dt} + 2 z n \cos\lambda + 2 x n \sin\lambda &= V \cos\alpha \sin\beta \\ \frac{dz}{dt} - 2 y n \cos\lambda &= -g t + V \sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (93)$$

Unter Vernachlässigung der Glieder mit n in der ersten und dritten dieser Gleichungen muß man von 0 bis t integrieren und Werte von x und z finden. Setzt man diese in die zweite Gleichung ein und integriert von 0 bis t, so findet man y. Diesen gefundenen Wert setzt man für y in der ersten und dritten von Gl. (93) ein und integriert unter Vernachlässigung der Glieder mit n^2 von 0 bis t; daraus ergibt sich x und z. Die Ergebnisse sind:

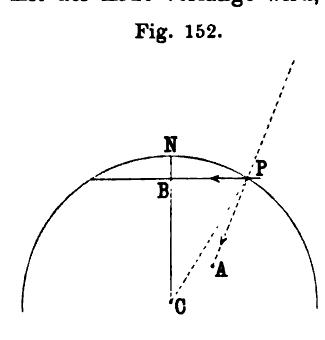
$$\left.\begin{aligned} x &= V t \cos\alpha \cos\beta + V t^2 n \sin\lambda \cos\alpha \sin\beta \\ y &= V t \cos\alpha \sin\beta - V t^2 n (\cos\lambda \sin\alpha + \sin\lambda \cos\alpha \cos\beta) \\ &\quad + \tfrac{1}{3} g t^3 n \cos\lambda \\ z &= -\tfrac{1}{2} g t^2 + V t \sin\alpha + V t^2 n \cos\lambda \cos\alpha \sin\beta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (93\,a)$$

Die Glieder mit n in diesen Gleichungen sind die Abweichungen.

Für eine Anfangsgeschwindigkeit von 750 m, $\alpha = 4^0$, $\lambda = 57^0$ N., $\beta = 0$ und für den ganzen Flugbereich $V^2 \sin 2\alpha / g$ (etwa 8 km) ergibt sich z. B. (ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand) $\delta y = 4{,}7$; d. h. die Geschoßabweichung beträgt 4,7 m nach Westen.

281. Scheinbare und wirkliche Schwere. Die eben auseinandergesetzte Theorie erläutert sowohl die Auflösung der Bewegungen in ihre Komponenten nach verschiedenen Richtungen als die Tatsache, daß die Anziehungswirkung der Erde auf ein Teilchen an irgend einem Orte die zu der Beschleunigung, die durch die Bewegung des Teilchens mit der Erde verlangt wird, notwendige Kraft liefern muß. So hat ein Pendelkörper eine mittlere Bewegung auf dem Parallelkreise des Breitengrades eines Aufhängungsortes. Die Beschleunigung infolge der Schwere erfährt aus diesem Grunde sowohl Größen- als Richtungsänderung. G bezeichnet, wie gesagt, die wirkliche pro Masseneinheit auf das Teilchen P (Fig. 152) wirkende Schwerkraft. Man nimmt, die Erde als Kugel betrachtet, PC, die Linie nach dem Mittelpunkte, als die Richtung von G und löst diese in zwei Komponenten auf, eine PB, längs dem Radius des Parallelkreises in P, die andere in einer Richtung PA, die einen kleinen Winkel mit PC bildet. Die letztere Richtung ist es, welche die Anfangsbeschleunigung g eines Körpers gibt, der, während er sich mit der Erde dreht, unter der Wirkung der Schwere fällt; sie ist nicht nach dem Punkte C hin gerichtet. So ist PA, die senkrechte Richtung des Pendels, in der es in der Ruhelage hängt, und um welche die Schwingungsebene sich dreht, nicht nach dem Erdmittelpunkte zu gerichtet.

Fig. 152.



Die Beschleunigung längs PB ist $n^2 R \cos\lambda$, wo R der Erdradius ist. Folglich ergibt sich, wenn θ der Winkel ist, den PA mit PC bildet, da θ sehr klein ist:

$$\frac{n^2 R \cos\lambda}{g} = \frac{\theta}{\cos BCP} = \frac{\theta}{\sin\lambda};$$

ferner:

$$\frac{g}{G} = \frac{\sin\lambda}{\sin(\lambda + \theta)} = \frac{\sin\lambda}{\sin\lambda + \theta\cos\lambda}.$$

Somit hat man:

$$\left.\begin{aligned} G &= g + n^2 R \cos^2\lambda \quad \text{oder} \quad g = G - n^2 R \cos^2\lambda \\ &\text{und} \\ \theta &= \frac{n^2 R \sin 2\lambda}{2g} = \frac{n^2 R \sin 2\lambda}{2(G - n^2 R \cos^2\lambda)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (94)$$

Der Wert von $n^2 R/g$ ist ungefähr $\frac{1}{289}$, so daß G am Äquator um diesen Bruchteil seiner selbst und an anderen Orten je nach der geographischen Breite um entsprechend weniger vermindert wird, wie die Gl. (94) besagen.

282. Eulersche dynamische Gleichungen. Wenn wir jetzt zu dem Beispiele des rotierenden starren Körpers zurückkehren, so mögen die rotierenden Axen im Körper fest sein und mit den Hauptaxen des Trägheitsmoments zusammenfallen. Das Trägheitsmoment des Körpers um OA sei A, um OB sei es B und C um OC. Die Winkelgeschwindigkeiten, die jetzt auch die Winkelgeschwindigkeiten des starren Körpers um die Axen sind, seien in diesem Falle mit ω_1, ω_2, ω_3 bezeichnet. Dann ist $F = A\omega_1$, $G = B\omega_2$, $H = C\omega_3$. Es wird dann aus den Gl. (86) mit Rücksicht auf Gl. (87):

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} - (B - C)\omega_2\omega_3 &= L \\ B\frac{d\omega_2}{dt} - (C - A)\omega_3\omega_1 &= M \\ C\frac{d\omega_3}{dt} - (A - B)\omega_1\omega_2 &= N \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

Wie schon festgestellt worden ist, sind L, M, N die Momente der den Körper angreifenden Kräfte um die Axen.

Diese Gleichungen sind bekannt als die Eulerschen Gleichungen eines starren Körpers, der, mit einem festen Punkte, um die Hauptaxen für diesen Punkt rotiert. Es ist schon oben § 264 eine Gleichung benutzt worden, die mit der zweiten von diesen äquivalent ist. Hat der Körper (wie z. B. ein Kreisel) eine Symmetrieaxe, um die das Trägheitsmoment C ist, so wird $A = B$, und aus den Gleichungen wird:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} - (A - C)\omega_2\omega_3 &= L \\ A\frac{d\omega_2}{dt} - (C - A)\omega_3\omega_1 &= M \\ C\frac{d\omega_3}{dt} \qquad\qquad\qquad &= N \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

Diese Gleichungen hätten ebensogut zum Ausgangspunkte der Diskussion der Kreiselbewegung gemacht werden können; der Leser mag sie nun zur Übung darauf anwenden. Zu bemerken ist dabei, daß man nicht die Axen OD, OE (Fig. 139) als die Hauptaxen gleichen Moments in den Eulerschen Gleichungen anwenden kann, da OD und OE, obgleich sie immer senkrecht zueinander und zu OC sind, doch im allgemeinen Falle nicht die Bedingung, im Körper fest zu sein, erfüllen. Es möge eine Axe (Fig. 153, a. S. 307), die senkrecht zu OC und im Körper fest ist, einen Winkel φ mit OE' (dem verlängerten EO) in dem in Betracht stehenden Augenblicke bilden. OB sei eine andere Axe in derselben DOE-Ebene und senkrecht zu OA. Die Axen OA, OB drehen sich in jenem Augenblicke mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega + \dot{\psi}\cos\theta$ um OC, die Kreiselaxe. Nun dreht sich aber OD, da

es auf der Ebene ZOC senkrecht steht, mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}\cos\theta$ um OC, und folglich rückt OA mit der Winkelgeschwindigkeit ω von OE' ab. Demnach ist $\dot{\varphi} = \omega$.

Die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 um OA, ω_2 um OB und ω_3 um die Axe OC sind $\dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi$, $\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi$, $\omega + \dot{\psi}\cos\theta$. Das angreifende Kräftepaar ist $mgh\sin\theta$ um OD, und folglich sind die Kräftepaarkomponenten $mgh\sin\theta\sin\varphi$ um OA, $mgh\sin\theta\cos\varphi$ um OB und null um OC; dies sind L, bezw. M, N.

Der Leser sollte die Werte in Gl. (95) einsetzen und sich davon überzeugen, daß die Bewegungsgleichungen (58) § 259 herauskommen. Es kann leicht gemacht werden, indem man φ aus der ersten und zweiten Bewegungsgleichung eliminiert und ω für $\dot{\varphi}$ setzt.

283. Kinetische Energie, ausgedrückt durch die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die Hauptaxen. Man sieht ein, daß die kinetische Energie U durch die Gleichung

$$U = \tfrac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

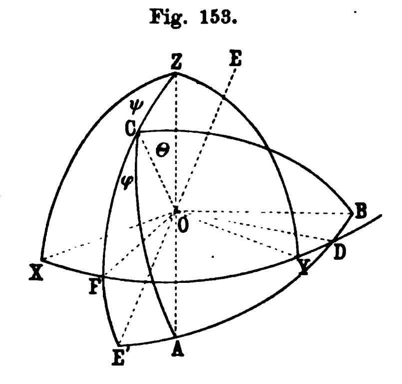
gegeben ist. Dieser Ausdruck für U kann nicht benutzt werden, wenn man nach der Methode von Lagrange zu den Eulerschen Gleichungen gelangen will, und der Grund dafür bietet eine gute Erläuterung der Umstände, unter denen diese Methode zulässig ist. Die Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2, ω_3 um die Hauptaxen sind nämlich nicht Geschwindigkeiten von Koordinaten, die die Lage des Sytems feststellen, wie in § 229 ausgeführt wurde; und ehe ein Versuch gemacht wird, die Bewegungsgleichungen aus dem Ausdruck für die kinetische Energie abzuleiten, muß dieser Ausdruck erst in einen solchen, der derartige Koordinaten einschließt, verwandelt werden.

284. Die Winkelgeschwindigkeiten um die Hauptaxen, durch Lagekoordinaten ausgedrückt. Koordinaten von der hier erwähnten Art sind solche wie θ, ψ, φ, die in der Diskussion der Kreiselbewegung angewandt wurden; auch die Beziehungen zwischen ω_1, ω_2, ω_3 und θ, ψ, φ, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, sind oben gegeben worden. Wir stellen indessen hier, um die Bezugnahme zu erleichtern, die Werte ω_1, ω_2, ω_3 als Funktionen von $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$ und $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$ als Funktionen von ω_1, ω_2, ω_3 zusammen.

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi - \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\varphi, & \frac{d\theta}{dt} &= \omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi \\
\omega_2 &= \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi + \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin\varphi, & \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\omega_2\sin\varphi - \omega_1\cos\varphi}{\sin\theta} \\
\omega_3 &= \frac{d\psi}{dt}\cos\theta + \frac{d\varphi}{dt}, & \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_3 - \frac{\omega_2\sin\varphi - \omega_1\cos\varphi}{tg\,\theta}
\end{aligned}\right\} \quad (98)$$

285. Die Richtungskosinus der Hauptaxen. In Fig. 153 sind drei Punkte X, Y, Z und drei Punkte A, B, C dargestellt, die auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius eins liegen, deren Mittelpunkt O der feste Punkt des Körpers ist. X, Y, Z sind die Enden von drei zueinander senkrechten, im Raume festen Axen; A, B, C sind die Enden der in dem bewegten Körper festen Axen (von O aus). Die Seiten XY YZ, ZX und AB, BC, CA der beiden auf die Kugel gezeichneten sphärischen Dreiecke sind sämtlich Quadranten; der Bogen ZC trifft, verlängert, die Verlängerung von BA in E', und θ, ψ, φ sind die bezeichneten Winkel. Die neun Richtungskosinus von OA, OB, OC, bezogen auf X, Y, Z, sind gleich den Kosinus der auf der Kugel beschriebenen Bogen, die die drei Punkte X, Y, Z mit A, B, C verbinden. Man erhält sie leicht durch die elementaren Formeln der sphärischen Trigonometrie. Wenn α_1, α_2, α_3 die Richtungskosinus von OA, β_1, β_2, β_3, die von OB und γ_1, γ_2, γ_3 die von OC sind, so ergibt sich, da $YD = \psi$, $DB = \varphi$ und $\angle ADY = \theta$ ist:

Fig. 153.



$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \cos\theta\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi \\
\alpha_2 &= \cos\theta\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi \\
\alpha_3 &= -\sin\theta\cos\varphi \\
\beta_1 &= -\cos\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi \\
\beta_2 &= -\cos\theta\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi \\
\beta_3 &= \sin\theta\sin\varphi \\
\gamma_1 &= \sin\theta\cos\psi \\
\gamma_2 &= \sin\theta\sin\psi \\
\gamma_3 &= \cos\theta
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (99)$$

286. Betrachtung der Glieder in den Eulerschen Gleichungen. Die erste der Eulerschen dynamischen Gleichungen kann in der Form

$$A\frac{d\omega_1}{dt} = L + (B - C)\omega_2\omega_3$$

geschrieben werden. Somit kann $A\dot{\omega}$, als von zwei Kräftepaaren, L und $(B - C)\omega_2\omega_3$, herrührend angesehen werden. Das letztere ist das aus der Rotation des Körpers um die Axen OB, OC entstandene zentrifugale Kräftepaar genannt worden, und ebenso sind die entsprechenden Größen in den anderen Gleichungen genannt worden. Es ist nicht schwierig, diese Deutung auf analytischem Wege zu begründen, dieser Weg erscheint aber weniger anschaulich als der folgende, durch

den tatsächlich die Gleichungen jederzeit abgeleitet oder ins Gedächtnis zurückgebracht werden können.

Die auf den Körper wirkenden Kräftepaare L, M, N erzeugen, wie man sagen kann, ein Moment der Bewegungsgröße um OA, OB, OC auf zweierlei Weise: 1. durch die Erzeugung von Winkelgeschwindigkeit um die Axen, 2. durch Änderung der Lage des Körpers. Wenn man sich für den Augenblick OA fest vorstellt, so wird die Drehung von OC um OB herum OC in der Zeit dt um einen Winkel $\omega_2 dt$ näher an OA heranbringen, und dies würde ein Moment der Bewegungsgröße $C\omega_3 \sin(\omega_2 dt) = C\omega_3 \omega_2 dt$ um die feste Linie OA hervorrufen. Also wächst in jenem Augenblicke das Moment der Bewegungsgröße um OA im Verhältnis $C\omega_3 \omega_2$ infolge der Bewegung um OB.

In derselben Zeit dt rückt OB infolge der Drehung um OC von der festen Lage von OA um den Winkel $\omega_3 dt$ ab, und somit vermindert sich das Moment der Bewegungsgröße um OA in jenem Augenblick im Verhältnis $B\omega_2 \omega_3$.

Also ist der gesamte Zuwachsgrad des Moments der Bewegungsgröße um OA in dem betrachteten Augenblicke $A\dot{\omega}_1 - (B - C)\omega_2\omega_3$, und das muß gleich dem Moment L des angreifenden Kräftepaares sein. Ebenso können die anderen Gleichungen erklärt werden.

Es muß bemerkt werden, daß dies nur ein Spezialfall eines Prozesses ist, der auf jede Gruppe rotierender Axen OA', OB', OC', die im Körper fest sind, angewandt werden kann. Es seien h_1, h_2, h_3 die Momente der Bewegungsgröße um drei solche Axen, die sich mit den Winkelgeschwindigkeiten θ_1, θ_2, θ_3 um sich selbst drehen. Dann ist, wie wir wissen, das Änderungsmaß der Bewegungsgröße um OA' gleich $\dot{h}_1 - h_2\theta + h_3\theta_2$. Die einzelnen Teile hiervon können auf dieselbe Weise erklärt werden.

287. Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt ohne Wirkung von Kräften. Der Fall eines sich um einen festen Punkt drehenden starren Körpers, auf den keine äußeren Kräfte wirken, also der Fall, in dem L, M, N sämtlich null sind, ist äußerst interessant. Da keine Kräfte wirken, bleibt die Axe des Maximummoments der Bewegungsgröße, wenn sich der Körper bewegt, unverändert und senkrecht zu der unveränderlichen Ebene durch den Anfangspunkt. Das Moment der Bewegungsgröße um diese Axe, etwa H, ist konstant, so daß sich ergibt:

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = H^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

Auch ist die kinetische Energie des Körpers konstant, so daß man schreiben kann:

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = 2\,U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

Diese Ergebnisse sind leicht von den Eulerschen Gleichungen abzuleiten; denn wenn man die erste von ihnen mit $A\omega_1$, die zweite

mit $B\omega_2$, die dritte mit $C\omega_3$ multipliziert, dann addiert und integriert, so erhält man Gl. (100). Wenn man ferner die erste mit ω_1, die zweite mit ω_2, die dritte mit ω_3 multipliziert, alsdann addiert und integriert, so erhält man Gl. (101).

Die Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe ist

$$\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}.$$

Die Winkelgeschwindigkeiten sind aber durch die Beziehung (101) miteinander verbunden, so daß man, wenn man Strecken x, y, z den Axen parallel so nimmt, daß

$$\omega_1 = \frac{x}{k}\sqrt{2U}, \quad \omega_2 = \frac{y}{k}\sqrt{2U}, \quad \omega_3 = \frac{z}{k}\sqrt{2U}$$

wird, an Stelle von Gl. (101) den Ausdruck

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101\text{a})$$

erhält, die Gleichung eines Ellipsoids, welches als das Momentenellipsoid (s. § 164) angesehen werden kann. Also ist die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe proportional der Länge des mit ihr zusammenfallenden Radiusvektors des Momentenellipsoids.

Während sich der Körper bewegt, ändert sich die Richtung OJ der Momentanaxe sowohl im Körper als im Raume. Ihr Richtungskosinus mit Bezug auf die Hauptaxe des Momentenellipsoids sind ω_1/ω, ω_2/ω, ω_3/ω. Mit den Veränderungen von ω_1, ω_2, ω_3 ändert sich ihre Lage im Körper.

288. Bewegung ohne Einwirkung von Kräften. Poinsotsche Darstellung durch ein auf fester Ebene rollendes Momentenellipsoid. Sylvestersche Messung der Bewegungszeit. Um die Bewegung der Momentanaxe im Raume zu finden, beachte man zunächst, daß die Axe des resultierenden Moments der Bewegungsgröße, d. h. die Senkrechte zu der unveränderlichen Ebene durch den Anfangspunkt, im Raume fest bleibt. Nun sind aber die Komponenten des Moments der Bewegungsgröße mit Bezug auf die Axen des Momentenellipsoids $A\omega_1$, $B\omega_2$, $C\omega_3$, und folglich sind die Richtungskosinus der Axe des resultierenden Moments der Bewegungsgröße mit Bezug auf jene Axen $A\omega_1/H$, $B\omega_2/H$, $C\omega_3/H$. Dies sind aber die Richtungskosinus relativ zu den Hauptaxen des Ellipsoids, des vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene zum Momentenellipsoid am Ende des mit der Momentanaxe zusammenfallenden Radiusvektors gefällten Lotes. Die Komponente der Winkelgeschwindigkeit um diese Senkrechte ist daher

$$\frac{A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2}{H} = \frac{2U}{H}$$

und bleibt konstant, wenn sich der Körper bewegt.

Da diese Senkrechte im Raume fest ist, so ist die Bewegung des Körpers eine derartige, daß das sich mit ihm bewegende Momentenellipsoid immer in Berührung mit einer Ebene bleibt, deren Richtung im Raume fest ist.

Die hiermit eingeführte Ebene ist auch in ihrer Lage bestimmt. Es sei p die Länge des von O auf diejenige Tangentialebene, welche das Momentenellipsoid in seinem Schnittpunkte mit der Momentanaxe berührt, gefällten Lotes OL. Der Kosinus des Winkels zwischen diesem Lot und der Momentanaxe beträgt p/r, und dies hat auch den Wert:

$$\frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2}{r\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2}{\omega H}.$$

Somit ist

$$p^2 = \frac{4\,U^2r^2}{H^2\omega^2} = \frac{2\,k^2\,U}{H^2}.$$

Also ist p von konstanter Länge, und die Ebene ist in ihrer Lage bestimmt.

Man wird bemerken, daß ω^2p^2/r^2 dasselbe ist wie $4\,U^2/H^2$ und folglich konstant ist, d. h. daß die Winkelgeschwindigkeit $\omega p/r$ des Körpers um das Lot konstant ist.

Also ist, wenn der Körper sich dreht, das sich mit ihm drehende Momentenellipsoid immer an seinem Schnittpunkte mit der Momentanaxe mit einer Ebene in Berührung, die, parallel zur unveränderlichen Ebene durch den Anfangspunkt, fest ist. Der Berührungspunkt ist stets momentan in Ruhe, und so kann die Bewegung als eine solche beschrieben werden, bei welcher das Momentenellipsoid auf einer Ebene rollt, und zwar auf einer Ebene, welche parallel ist zur Ebene des resultierenden impulsiven Kräftepaares, das in irgend einem Augenblicke die aktuelle Bewegung aus der Ruhelage erzeugen könnte. Das Zeitintegral dieses Kräftepaares ist natürlich H.

Betrachten wir jetzt ein Ellipsoid, dessen Gleichung auf die Hauptaxen des Momentenellipsoids bezogen lautet:

$$\frac{A}{1 + Ah}x^2 + \frac{B}{1 + Bh}y^2 + \frac{C}{1 + Ch}z^2 = k^2 \quad . \quad . \quad (101\,\text{b})$$

Dies ist ein Ellipsoid, das mit dem Momentenellipsoid konfokal ist und sich wie dieses mit dem Körper bewegt. Eine Ebene, die dieses Ellipsoid in den Punkten x, y, z berührt und parallel zur unveränderlichen Ebene im Anfangspunkte ist, hat ihre Normale in der OL-Richtung. Folglich gilt für eine solche Ebene:

$$\frac{A}{1 + Ah}\,x = RA\omega_1, \quad \frac{B}{1 + Bh}\,y = RB\omega_2, \quad \frac{C}{1 + Ch}\,z = RC\omega_3,$$

wo R eine Konstante ist. Daraus ergibt sich:

$$R^2 = \frac{k^2}{2\,U + hH^2}.$$

Die Koordinaten des Berührungspunktes Q sind also

$$x = R(1 + Ah)\omega_1, \quad y = R(1 + Bh)\omega_2, \quad z = R(1 + Ch)\omega_3,$$

wo R den soeben gefundenen Wert hat. Die Projektion des Radiusvektors OQ auf die Linie OL ist daher

$$\frac{R}{H}[(1 + Ah)A\omega_1^2 + (1 + Bh)B\omega_2^2 + (1 + Ch)C\omega_3^2]$$
$$= \frac{k}{H}\sqrt{2U + hH^2},$$

d. h. eine Konstante. Somit ist diese Tangentialebene im Raume fest.

Wenn r' die Länge von OQ ist und θ den Winkel QOJ bezeichnet, ist die Geschwindigkeit von Q gleich $\omega r' \sin\theta$. Wenn aber φ den Winkel QOL bezeichnet, ist die Entfernung zwischen Q und OL gleich $r' \sin\varphi$, und daher ist die Winkelgeschwindigkeit von Q um OL gleich $\omega \sin\theta / \sin\varphi$. Durch Berechnung der Werte von $\sin\theta$ und $\sin\varphi$ erhält man leicht die Formel:

$$\frac{\omega^2 \sin^2\theta}{\sin^2\varphi} = H^2 \frac{\omega^2 r'^2 - R^2(\omega^2 + 2hU)^2}{H^2 r'^2 - R^2(2U + hH^2)^2},$$

was sich auf $h^2 H^2$ reduziert. Mithin ist die Winkelgeschwindigkeit von Q um OL gleich hH.

Somit ist, wenn die das Ellipsoid [Gl. (101 b)] in Q berührende Ebene sich mit dieser gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit um OL dreht, die Zeit, in der der Körper einen Teil seiner Bewegung ausgeführt hat, gleich dem in dieser Zeit durch diese Ebene zurückgelegten Winkel, durch hH dividiert. Diese Art der Zeitdarstellung rührt von Sylvester her.

289. Polhode und Herpolhode. Die Berührungspunkte der festen Ebene mit dem Momentenellipsoid ergeben zwei geometrische Örter, einen auf der Oberfläche des Ellipsoids, den anderen auf der Ebene. Der erstere heißt die Polhode, der andere die Herpolhode.

Um die Polhode zu finden, braucht man nur den geometrischen Ort der Punkte in dem Körper zu bestimmen, in denen die Tangentialebenen in einer konstanten Entfernung von dem festen Punkte O sind. p sei die konstante Länge des Lotes; es ergeben sich die Gleichungen:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = k^2, \quad A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \frac{k^2H^2}{2U} = \frac{k^2}{p^2} \quad (102)$$

Diese Gleichungen ergeben die einzige Beziehung:

$$A(2UA - H^2)x^2 + B(2UB - H^2)y^2 + C(2UC - H^2)z^2 = 0, \quad (103)$$

die Gleichung eines Kegels, dessen Scheitel der Anfangspunkt ist. Dieser Kegel ist im Körper fest und dreht sich mit ihm. Sein Schnittpunkt mit der Oberfläche des Momentenellipsoids ist der geometrische Ort der Punkte, in denen das Ellipsoid die feste Ebene berührt. Man

kann dies den Körperkegel nennen. Er rollt auf einem festen oder Raumkegel, dessen Schnittpunkt mit der festen Ebene der geometrische Ort der Berührungspunkte des Momentenellipsoids mit der Ebene ist.

Durch Elimination von z zwischen den beiden Gleichungen (102) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} A(A-C)x^2+B(B-C)y^2 &= k^2\left(\frac{H^2}{2U}-C\right) \\ &= k^2\left(\frac{k^2}{p^2}-C\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (104)$$

die Gleichung der Projektion der Polhode auf eine zu OC senkrechte Ebene. Ist C das größte Trägheitsmoment, so hat p^2 seinen kleinsten Wert, wenn das Ellipsoid die Ebene an einem Ende der z-Axe berührt, denn dann ist $z^2 = p^2 = k^2/C$. Der Wert von k^2/p^2 ist in diesem besonderen Falle C und ist in allen anderen Fällen kleiner. Daher ist die Größe auf der rechten Seite von Gl. (104) negativ, und die Koeffizienten von x^2 und y^2 auf der linken Seite sind ebenfalls negativ. Die Projektion der Polhode ist aus diesem Grunde eine Ellipse. Wenn dagegen C das kleinste Hauptmoment ist, sind die Größe auf der rechten Seite von Gl. (104) und die Koeffizienten auf der linken alle positiv. Folglich ist die Kurve auch in diesem Falle eine Ellipse.

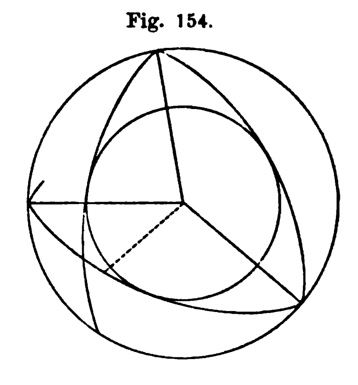
Wenn C das mittlere Moment ist, haben die Koeffizienten von x^2 und y^2 entgegengesetzte Vorzeichen, und die Kurve ist eine Hyperbel. Ist dabei A das größte, B das kleinste Moment, so kann die Gleichung in der Form $ax^2 - by^2 = c$ geschrieben werden, wenn $H^2/2U > C$ ist, und in der Form $by^2 - ax^2 = c$, wenn $H^2/2U < C$ ist, wo a, b, c alle positiv sind. Im ersten von diesen beiden Fällen ist die x-Axe die Hyperbelaxe, im zweiten ist es die y-Axe.

Wenn $H^2/2U$ gerade gleich C, dem mittleren Moment, ist, nimmt die Gleichung die Form $ax^2 - by^2 = 0$ an, welche die beiden geraden Linien $x\sqrt{a} - y\sqrt{b} = 0$, $x\sqrt{a} + y\sqrt{b} = 0$ darstellt. Diese Linien kreuzen sich auf der Axe des mittleren Moments und sind die Projektionen der Polhoden um die Axen des größten und kleinsten Moments auf die x, y-Ebene. Diese sind zwei geschlossene Kurven, deren Projektionen auf Ebenen senkrecht zu den Axen, die sie umgeben, Ellipsen sind, und die sich in der Axe des mittleren Moments treffen. Die geraden Linien trennen diejenigen hyperbolischen Projektionen der Polhoden, welche ihre Axe mit OA parallel haben, von jenen, die ihre Axe parallel mit OB haben; diese Polhode heißt daher die trennende Polhode.

Mit Rücksicht auf die Herpolhode ist hier nicht Raum, mehr zu sagen als daß, da die Polhoden geschlossene Kurven um die Axen des größten und kleinsten Moments sind, die Herpolhode zwischen zwei Kreisen liegen muß, deren gemeinsame Axe das von O auf die feste Ebene gefällte Lot ist. Denn das Quadrat der Entfernung des Berüh-

rungspunktes in irgend einem Augenblicke vom Fußpunkte dieses Lotes ist $r^2 - p^2$, und dafür haben wir den Wert $p^2(\omega^2 H^2/4 U^2 - 1)$. Dadurch, daß man ω seinen größten und kleinsten Wert giebt, erhält man hieraus die Radien der beiden Kreise; offenbar liegt die Herpolhode zwischen ihnen und muß sie, wenn der Körper rollt, abwechselnd berühren. Da die Herpolhode eine Kurve in der festen Ebene ist, muß man, wenn man jeden ihrer Punkte mit dem Anfangspunkte verbindet, einen festen Kegel oder Raumkegel erhalten, auf dem der Körperkegel rollt, während sich der Körper um den festen Punkt dreht.

Fig. 154.



Die Form der Herpolhode ist in Fig. 154 gezeigt; sie ist aus Routh, Dynamik der Systeme starrer Körper (Bd. II, Kap. 4) entnommen. Man beachte, daß die Kurven überall nach dem Mittelpunkte der Kreise zu konkav sind.

290. Stabilität der Bewegung eines Körpers ohne Einwirkung von Kräften. Wir haben diese leichte Skizzierung der Poinsotschen Darstellung der Bewegung durch das Rollen des Momentenellipsoids auf einer festen Ebene hauptsächlich wegen des Lichtes gegeben, das die Diskussion auf die Stabilität der Bewegung eines ohne Einwirkung von Kräften rotierenden Körpers wirft. Wenn sich der Körper um eine der Hauptaxen dreht, kreiselt das Momentenellipsoid nur auf der festen Ebene; wird ein kleiner störender Impuls erteilt, so wird der Körper anfangen, um eine ein wenig abweichende Axe zu rotieren.

Ist die Axe, von der abgewichen wird, die des größten oder kleinsten Trägheitsmoments C, so sind die Polhoden geschlossene Kurven, die diese Axen einschließen, und da in diesem Falle $H^2/2\,U$ sehr annähernd C gleich ist, so ist die elliptische Projektion auf die feste Ebene sehr klein nach jeder Dimension, außer wenn

$k^2(H^2 - 2\,UC)/2\,UA(A - C)$ oder $k^2(H^2 - 2\,UC)/2\,UB(B - C)$

groß ist. Mithin ändert für eine sehr kleine Störung die Rotationsaxe ihre Lage im Körper, aber nur wenig, und man kann die Bewegung stabil nennen. Für eine mäßige Störung indessen kann die Axe, wenn die Ellipse sehr exzentrisch ist, d. h. wenn $A(A - C)/B(B - C)$ sehr klein oder sehr groß ist, bedeutend von der Hauptaxe abweichen, und obgleich die Momentanaxe wieder nahe zur Hauptaxe zurückkehren kann, kann man doch die Bewegung unstabil nennen. Also ist es für beliebige weite Grenzen der Stabilität notwendig, daß die benachbarten Polhoden nahezu kreisförmig seien.

Ist die Axe die des mittleren Moments, so sind die Polhoden in der Nachbarschaft konvex gegen die Axe, so daß die Momentanaxe, wenn sie von der Hauptaxe weggedrängt wird, bedeutend von ihrer Anfangslage abweichen wird, außer wenn die Störung ihr eine Verrückung längs einer der geraden Linien, die die trennende Polhode bilden, erteilt. Da $H^2/2U = B$ ist, erfordert dieser Fall besondere Behandlung. Die Untersuchung zeigt, daß die Bewegung stabil ist, wenn die Verrückung längs der trennenden Polhode erfolgt (vergl. bei Routh).

Die vorangegangene Behandlung des Kreiselproblems wird dem Leser klar machen, daß die Wirkung einer gegebenen Störung um so kleiner ist, je größer die Winkelgeschwindigkeit ist, mit der der Körper um — oder nahezu um — eine Hauptaxe rotiert. Um den Fall möglichst günstig für die Störung anzunehmen, möge sie plötzlich eine Geschwindigkeit ω um eine Axe senkrecht zu derjenigen, um welche der Körper mit der Geschwindigkeit Ω kreiselt, erzeugen. Die Abweichung der Momentanaxe ist alsdann $\operatorname{arctg} \omega/\Omega$. Je größer Ω ist, desto kleiner ist dieser Winkel, und wenn Ω sehr groß ist, so beeinflussen gewöhnliche leichte Störungen kaum die Richtung der Hauptaxe, die nahezu fest im Raume bleibt. Wie wir wissen, hat die Axe eines schnell rotierenden Kreisels nur eine langsame Präzessionsbewegung mit einer leichten Nutationsbewegung zusammengesetzt, auch wenn der Kreisel beträchtlich gegen die Senkrechte geneigt ist, und die Richtung der Erdaxe ändert sich nur mit einer außerordentlich langsamen konischen Bewegung unter dem Einfluß des von der Anziehung durch die Sonne herrührenden Kräftepaares.

Die Wirkung der Tellern, Messern u. s. w. von einem Jongleur beim Werfen erteilten Kreiselbewegung zur Bewahrung der Richtung des Körpers im Raume, erklärt sich ebenfalls auf diese Weise. Diese Körper sind im allgemeinen symmetrisch um eine Axe, um die sie zu kreiseln veranlaßt werden. Ohne dieses Kreiseln würde jede Störung den Körper veranlassen, sich in einer unmöglich vorauszusehenden Weise zu bewegen, und es gäbe keine Gewißheit über die Lage, in der die Körper zu dem Artisten zurückkehren würden.

Eine gut geworfene Wurfscheibe ist gezwungen, sich um ihre Figuraxe zu drehen und bewahrt die Richtung ihrer Axe fast unverändert während ihres Fluges. Eine moderne (natürlich nicht kugelförmige) Flintenkugel erhält ebenfalls eine sehr schnelle Drehung um die Axe ihres kleinsten Moments durch die schraubenförmige Riefung des Laufes, und die Axenrichtung bleibt infolgedessen nahezu unverändert. In solchen Fällen wird die Wirkung der Luft auf den sie durchschneidenden Körper eine bestimmt begrenzte, und es können wiederholte Schüsse unter praktisch gleichen Bedingungen abgegeben werden.

Sechstes Kapitel.

Statik materieller Systeme.

291. Gleichgewichtsbedingungen. Wir wollen nun das Gleichgewicht materieller Systeme etwas ausführlicher betrachten. Aus der Gl. (26) des dritten Kapitels folgt, daß, wenn der Schwerpunkt des Systemes keine Beschleunigung aufweist, die drei Gleichungen

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma Z = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

bestehen. Ist überdies auch der Änderungsgrad des Momentes der Bewegungsgröße des Systems um jede der drei Axen null, so ist

$$\Sigma(Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0 \quad (2)$$

Es ist darauf aufmerksam zu machen, daß diese Gleichungen mit der Möglichkeit von Beschleunigungen der einzelnen Teilchen nicht unverträglich sind. Ferner sei bemerkt, daß die in den Gleichungen auftretenden Kräfte X, Y, Z die äußeren Kräfte sind, da nach § 153 und 155 die inneren Kräfte zwischen den Teilchen bei der Summation in Wegfall kommen.

Wenn das System ein starrer Körper ist, bleiben die Gleichungen natürlich gültig; die Gl. (2) können dann aber in die einfachere Form

$$\Sigma R_x r_x = 0, \qquad \Sigma R_y r_y = 0, \qquad \Sigma R_z r_z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

umgeformt werden, wo R_x die Summe der Komponenten X, Y, Z, projiziert auf die Ebene yz, und r_x die Entfernung $\sqrt{y^2 + z^2}$ des Punktes x, y, z, auf den jene Kraft wirkt, von der x-Axe ist; entsprechende Bedeutung haben R_y und r_y für die zx-Ebene und y-Axe, R_z und r_z für die xy-Ebene und z-Axe. Die Summen $\Sigma R_x r_x$ u. s. w. sind die Momentensummen aller Kräfte in Bezug auf rechtwinklige Axen durch den Anfangspunkt. Aus den Gl. (32) des dritten Kapitels ist ersichtlich, daß, wenn jede dieser Summen null ist, der Körper um keine der Axen eine Winkelbeschleunigung aufweist. Hat also ein starrer Körper weder eine lineare Schwerpunktsbeschleunigung, noch eine Winkelbeschleunigung um irgend eine Axe, so sagt man, er sei im Gleichgewicht, und die Gl. (1) und (2), oder (1) und (3) heißen die Gleichgewichtsbedingungen.

Es ist zu beachten, daß Gleichgewicht in diesem Sinne nicht identisch mit Ruhe ist; vielmehr ist Bewegung des Systems durchaus nicht ausgeschlossen. Der Schwerpunkt desselben kann sich in geradliniger, gleichförmiger Bewegung befinden, und der Körper selbst kann mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe rotieren. Die in dem letzteren Falle stattfindenden Beschleunigungen der Teilchen gegen die Drehungsaxe hin rühren ausschließlich von inneren Kräften her.

Wenn die Gl. (1) gelten, so ist die Summe der Kraftkomponenten nach jeder beliebigen Richtung null; und umgekehrt, wenn die Summe der Kraftkomponenten längs dreier beliebiger, nicht paralleler und nicht in einer Ebene liegenden Richtungen verschwindet, müssen die Gl. (1) gelten. Das erstere ist an sich klar, das letztere läßt sich folgendermaßen einsehen. Die Richtungskosinus dreier nicht in einer Ebene liegenden und nicht parallelen Linien seien l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, l_3, m_3, n_3; dann hat man für die Komponentensummen in ihnen:

$$\begin{aligned} \Sigma K_1 &= l_1 \Sigma X + m_1 \Sigma Y + n_1 \Sigma Z \\ \Sigma K_2 &= l_2 \Sigma X + m_2 \Sigma Y + n_2 \Sigma Z \\ \Sigma K_3 &= l_3 \Sigma X + m_3 \Sigma Y + n_3 \Sigma Z. \end{aligned}$$

Sind nun die linken Seiten gleichzeitig null, so muß, da die Determinante der Größen lmn wegen der gemachten Voraussetzung nicht null ist, auch gleichzeitig $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$ sein.

Ebenso läßt sich zeigen, daß, wenn die Gl. (1) gelten und die Momentensummen um irgend drei nicht parallele und nicht koplanare Axen null sind, sie dann für alle Axen null sind. Die erste Axe (Richtungskosinus $l_1 m_1 n_1$) gehe durch den Punkt $a_1 b_1 c_1$, die zweite ($l_2 m_2 n_2$) durch den Punkt $a_2 b_2 c_2$, die dritte ($l_3 m_3 n_3$) durch den Punkt $a_3 b_3 c_3$; ferner seien wieder xyz die Koordinaten eines Punktes, durch den die Kraft XYZ geht; endlich seien $\lambda \mu \nu$ die Richtungskosinus einer beliebigen durch den Anfangspunkt gehenden Axe. Die Momentensumme in Bezug auf die Axe $(\lambda \mu \nu)$ ist

$$L = \lambda \Sigma (Zy - Yz) + \mu \Sigma (Xz - Zx) + \nu \Sigma (Yx - Xy),$$

und die Momentensummen um die lmn-Axen sind:

$$\begin{aligned} L_1 = l_1 \Sigma \{ Z(y - b_1) - Y(z - c_1) \} + m_1 \Sigma \{ X(z - c_1) - Z(x - a_1) \} \\ + n_1 \Sigma \{ Y(x - a_1) - X(y - b_1) \} \end{aligned}$$

(L_2 und L_3 entsprechend).

Da nun nach Annahme sowohl $L_1 = L_2 = L_3 = 0$, als auch $\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = 0$ ist, müssen alle Summen von der Art $\Sigma Z b_1$, $\Sigma Y c_1$, $\Sigma X b_1$ ... null sein, und es wird

$$l_1 \Sigma (Zy - Yz) + m_1 \Sigma (Xz - Zx) + n_1 \Sigma (Yx - Xy) = 0$$

nebst zwei entsprechenden Gleichungen für die beiden anderen Axen. Da nun wieder die Determinante der lmn von null verschieden ist, zerfallen obige Gleichungen in die drei einfachen:

$$\Sigma(Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0,$$

womit, da die gewählte Richtung und der Anfangspunkt beliebig sind, das Behauptete bewiesen ist.

292. Energiekriterium des Gleichgewichts. Nun betrachte man ein völlig allgemeines System von n Teilchen, welche vermöge von m die Koordinaten verknüpfenden Gleichungen kinematischen Bedingungen unterworfen sind; die Arbeitsgleichung ist alsdann (vergl. § 213, Gl. 37):

$$\delta A = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

wo X, Y, Z die Komponenten der auf das Teilchen x, y, z wirkenden Kraft sind.

Wenn, wie wir hier annehmen wollen, diese Kräfte dem Ganzen keine Arbeit zuführen, wird

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Haben die Kräfte ein Potential, d. h. gibt es eine Funktion V (die potentielle Energie) von der Eigenschaft, daß

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

ist, so wird:

$$\Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Diese Gleichung sagt aus, daß für die kleinen Verrückungen δx, δy, δz die Variation der potentiellen Energie null ist; mit anderen Worten: Wenn von den einwirkenden Kräften bei einem System möglicher Verrückungen der Teilchen keine Arbeit geleistet wird, hat die potentielle Energie für die entsprechende Konfiguration des Systems einen Grenzwert (Maximum, Minimum oder Konstanz gegenüber benachbarten Werten).

293. Ableitung der inneren Kräfte aus den kinematischen Bedingungen. Wenn die Koordinaten der Teilchen des Systems durch m kinematische Beziehungen von der Art der Gl. (41) in § 215 verknüpft sind, so erhält man aus den dort gewonnenen Resultaten die $3n$ Gleichgewichtsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} X_1 + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots &= 0, \\ X_2 + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Dieselben liefern zusammen mit den m Bedingungsgleichungen $3n + m$ Gleichungen, durch welche die $3n$ Koordinaten der Teilchen in ihrer Gleichgewichtskonfiguration und die m unbestimmten Multiplikatoren gefunden werden können.

Die in § 215 gemachten Schlüsse betreffend die Natur der Glieder $\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$, $\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdots$ bleiben hier mit einer leichten Modifikation gültig. Es sind nämlich

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1}, \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_1}$$

die Komponenten der Kraft, welche auf Grund der Bedingung $f_1 = 0$ auf das Teilchen m_1 mit dem Endziele auszuüben ist, daß dieses Teilchen unter der gleichzeitigen Wirkung der gegebenen äußeren Kräfte und der von den anderen $m - 1$ Bedingungen dargestellten Kräfte im Gleichgewicht, d. h. ohne Beschleunigung verbleibe. Diese Kraft ist, wie ebenfalls schon in § 215 erläutert wurde, von der Natur einer Tendenz die Bedingung $f_1 = 0$ zu variieren, d. h. sie wirkt senkrecht zu der durch die Gleichung $f_1 = 0$ dargestellten Oberfläche, wenn in derselben alle Variabeln außer $x_1\, y_1\, z_1$ konstant bleibend gedacht werden.

Wenn die Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ u. s. w. die Zeit explizite enthalten, wie in (45), § 215, so erhält man mit Hilfe von (46), § 215, aus den obigen Gleichungen (6) die Gleichung

$$\Sigma\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right) - \Sigma\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0 \quad . \; . \; . \; (7)$$

welche zeigt, daß in diesem Falle der Effekt der Zwangskräfte nicht, wie bei zeitlich unveränderlichen Bedingungen, null ist, sondern den Wert

$$\Sigma\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

besitzt.

Behufs weiterer Unterrichtung über das Problem des Gleichgewichtes eines Systems verknüpfter Teilchen sei der Leser auf das klassische Werk des Begründers dieser Lehre, Lagrange, „Mécanique analytique" oder auf seine deutsche Bearbeitung verwiesen.

294. Ableitung der Gleichgewichtsgleichungen aus dem Arbeitsprinzip. Nehmen wir jetzt an, das System sei ein starrer Körper. Dann ist die allgemeinste Bewegung, die statthaben kann, zusammensetzbar aus Verschiebungen des Schwerpunktes längs dreier aufeinander senkrechter Axen und aus Drehungen um durch den Schwerpunkt gelegte, zu jenen Axen parallele Axen.

Die Koordinaten eines Punktes P seien x, y, z, die des Schwerpunktes a, b, c. Dann ist

$$x = a + x', \qquad y = b + y', \qquad z = c + z',$$

wo x', y', z' die Koordinaten von P, bezogen auf den Schwerpunkt, sind. Nun werde der Schwerpunkt derart verschoben, daß a, b, c um

δa, δb, δc wachsen, und gleichzeitig werde der Körper um Axen parallel zu Ox, Oy, Oz durch den Schwerpunkt um die Winkel $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ gedreht. Dann ist nach § 276:

$$\delta x = \delta a + z'\delta\eta - y'\delta\zeta$$
$$\delta y = \delta b + x'\delta\zeta - z'\delta\xi$$
$$\delta z = \delta c + y'\delta\xi - x'\delta\eta.$$

Sind nun X, Y, Z die Kraftkomponenten, die auf P wirken, so ist für den ganzen Körper

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \delta a\Sigma X + \delta b\Sigma Y + \delta c\Sigma Z \\ \quad + \delta\xi\Sigma(Zy' - Yz') + \delta\eta\Sigma(Xz' - Zx') + \delta\zeta\Sigma(Yx' - Xy')\end{array}\right\}(8)$$

Für das Gleichgewicht muß nach Gl. (40) des vierten Kapitels die bei diesen Ortsänderungen geleistete Arbeit verschwinden.

Die hier dargestellten Verrückungen entsprechen den sechs Freiheitsgraden des Körpers und müssen voneinander unabhängig sein. Folglich müssen die Koeffizienten der sechs verschiedenen δ (da man z. B. alles bis auf δa gleich null wählen kann) einzeln verschwinden, und es wird

$$\Sigma X = 0, \ldots, \qquad \Sigma(Zy' - Yz') = 0, \ldots;$$

das sind aber wieder die sechs Gleichgewichtsgleichungen eines starren Körpers.

295. Schraubenbewegung eines Körpers. Freiheitsgrade. Es ist in § 115 gezeigt worden, daß, wenn ein Körper sich wie eine Mutter gegen eine feste Schraube bewegen kann, er einen einzigen Freiheitsgrad besitzt; es leuchtet das ein, wenn man bedenkt, daß der Winkel, um den sich die Mutter dreht, und die Strecke, um welche sich ihr Schwerpunkt gleichzeitig fortschiebt, durch eine unveränderliche Beziehung miteinander verknüpft sind, daß also eine Bewegung dieser Art durch die Veränderungen einer einzigen unabhängigen Variabeln bestimmt ist. Sind δa, δb, δc die Änderungen von a, b, c und $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ die Rotationen um drei rechtwinklige Axen, dann sind diese sechs Größen für einen vollkommen freien Körper voneinander unabhängig. Ein einziger Zwang wird eingeführt, wenn sie durch eine einzige Gleichung miteinander verknüpft sind, z. B. durch die Gleichung

$$A\delta a + B\delta b + C\delta c + G\delta\xi + H\delta\eta + J\delta\zeta = 0 \quad . \quad . \quad (9)$$

Die Auferlegung einer solchen Beziehung beseitigt einen der sechs Freiheitsgrade des Körpers, die Auferlegung von fünf derartigen Bedingungen würde dem Körper nur noch einen einzigen Freiheitsgrad belassen, und es ist leicht einzusehen, daß diese Freiheit von der soeben erläuterten Art sein würde. Denn es seien fünf solche Gleichungen gegeben, die voneinander unabhängig sind, derart, daß die Determinante aus den Koeffizienten einer jeden Gruppe von vier Variationen von null verschieden ist; man kann dann fünf beliebige der Größen δ

durch die sechste ausdrücken, d. h. die ganze Verrückung ist festgestellt, sobald z. B. die Winkelverrückung $\delta\xi$ um die x-Axe angegeben wird: es ist eine Schwerpunktsverschiebung in ganz bestimmter Richtung, verbunden mit einer Drehung um eine bestimmte durch ihn gehende Axe. Aber dieser Vorgang ist, wie in § 114 gezeigt wurde, äquivalent mit einer linearen Verschiebung, parallel mit dieser letztgenannten Axe, zusammen mit einer Drehung um eine bestimmte parallele Axe; d. h. die Verrückung läßt sich auf die einer Mutter gegen eine Schraube zurückführen.

296. Bedingung, unter der ein Renk keine Verrückung gegen eine gegebene Schraube hervorbringt. Reziproke Schrauben. In § 177 haben wir ein Kräftesystem betrachtet, das wir einen „Renk" nannten, und seine „Höhe" als Verhältnis des resultierenden Moments der Kräfte um die Axe des Renks zu seiner Intensität, d. h. zu der resultierenden Kraft längs der Axe, bezeichnet. Wir können die Axe des Renks als die der Schraube bezeichnen und überhaupt von einem Renk entweder im eigentlichen oder im Sinne einer Schraube sprechen.

Es möge nun unser Körper von einem Renk von der Intensität F auf der Schraube β angegriffen werden; das Kräftepaar sei G, die Höhe des Renks also $G/F = p_\beta$. Nun möge der Körper die Freiheit haben, sich um eine Schraube α von der Höhe p_α in der senkrechten Entfernung h von p_β zu bewegen, und es soll die Arbeit betrachtet werden, die der Renk bei einer Drillung von der Amplitude $\delta\varphi$ um α leistet. Das Kräftepaar des Renks zerfällt in zwei Kräftepaare, eins um die Schraube α vom Moment $G \cos(\alpha, \beta)$, wo (α, β) der Winkel zwischen beiden Schrauben ist, und das andere vom Moment $G \sin(\alpha, \beta)$ und mit einer zu α senkrechten Axe. Die Kraft F anderseits zerfällt in zwei Kräfte, eine gleich $F\cos(\alpha, \beta)$ parallel mit α die andere. $F\sin(\alpha, \beta)$ senkrecht zu α und im senkrechten Abstande h davon. Die Verrückung längs der Axe von a endlich ist $p_\alpha\delta\varphi$. Folglich ist die bei der Verrückung geleistete Arbeit

$$\delta A = G\cos(\alpha, \beta)\delta\varphi + F\cos(\alpha, \beta)p_\alpha\delta\varphi - Fh\sin(\alpha, \beta)\delta\varphi,$$

oder, kürzer geschrieben:

$$\delta A = F[(p_\alpha + p_\beta)\cos(\alpha, \beta) - h\sin(\alpha, \beta)]\delta\varphi \quad . \quad . \quad (10)$$

Damit diese Arbeit für die Verrückung φ null sei, muß

$$(p_\alpha + p_\beta)\cos(\alpha, \beta) - h\sin(\alpha, \beta) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

sein. Dieser Ausdruck kann der Arbeitskoeffizient der Verrückung um die Schraube α genannt werden. Da der Ausdruck symmetrisch in Bezug auf α und β ist, sieht man ein, daß er ungeändert bliebe, wenn umgekehrt der Renk auf die Schraube wirkte und der Körper freie Drehung um die Schraube β hätte. Wir wollen den Ausdruck mit $R_{\alpha\beta}$ oder kurz mit R bezeichnen. Zwei Schrauben heißen reziprok,

wenn R verschwindet, d. h. wenn ein Renk auf die eine Schraube keine Arbeit leistet bei einer Bewegung des Körpers auf der anderen; oder auch, was damit zusammenhängt, wenn ein Renk auf die eine Schraube keine Verrückung des Körpers auf der anderen hervorrufen kann.

Schneiden sich die beiden Schrauben, d. h. ist $h = 0$, so sind sie reziprok, falls entweder $p_\alpha + p_\beta = 0$ oder $(\alpha, \beta) = \pi/2$ ist, d. h. die beiden Schrauben müssen entweder entgegengesetzt gleiche Höhe haben oder senkrecht gekreuzt sein. Verlaufen sie senkrecht zueinander, ohne sich aber zu kreuzen, so ist $R = - h \sin(\alpha, \beta)$, es sei denn, daß p_α oder p_β unendlich ist; ist $p_\alpha = \infty$, so ist der Körper unfähig zu rotieren; ist $p_\beta = \infty$, so ist die Intensität des Renks null; da nun $(\alpha, \beta) = \pi/2$ ist, so kann der Renk den Körper im ersteren Falle nicht in Bewegung setzen, im letzteren hat das Kräftepaar keine Komponente um α, der Körper wird sich also ebenfalls nicht bewegen; in diesem Spezialfalle sind also die Schrauben ebenfalls reziprok.

Wenn α und β zusammenfallen, ist $h = 0$, und der Körper wird sich nicht bewegen, wenn p_α und p_β beide null oder beide unendlich sind. Im ersteren Falle gibt es kein Kräftepaar, und der Körper seinerseits kann nur rotieren; im zweiten Falle gibt es keine Kraft, der Körper aber kann sich nur verschieben — man sieht, in keinem von beiden Fällen gibt es eine Bewegungsarbeit, d. h. die Schrauben sind reziprok. Da es sich hier eigentlich nur um eine und dieselbe Schraube handelt, kann man das Resultat auch so ausdrücken: Schrauben von der Höhe null oder unendlich sind mit sich selbst reziprok.

Wir haben in der Kinematik (§ 121) gesehen, daß ein Zylindroid durch zwei Schrauben bestimmt ist. Hier läßt sich daran der Satz anschließen, daß, wenn eine Schraube zu zwei gegebenen Schrauben reziprok ist, sie zu allen auf dem dazu bestimmten Zylindroid gelegenen Schrauben reziprok ist.

Es ist nämlich an derselben Stelle nachgewiesen worden, daß eine Drehung um irgend eine Schraube ψ auf dem Zylindroid ausgedrückt werden kann als eine Drehung um zwei gegebene Schrauben θ, φ auf demselben. Da nun ein auf β wirkender Renk keine Arbeit auf einen Körper leisten kann, der sich frei um θ oder φ drehen kann, so kann er auch bei einer Drehung um ψ keine Arbeit leisten. Man kann also kurz sagen: die Schraube β ist reziprok zu dem Zylindroid θ, φ.

297. Durch die Theorie der Schrauben gelieferte Gleichgewichtsbedingungen. Kehren wir nun zu der Frage des Gleichgewichts zurück, so haben wir für jeden Freiheitsgrad des Körpers eine Gleichung von der Form (11). Bezeichnen also α, β, γ . . . die verschiedenen Schrauben, um die sich der Körper bewegen kann, und ist θ der Renk, auf den sich die Kräfte reduzieren, so hat man die folgenden Gleichgewichtsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}(p_\alpha + p_\theta)\cos(\alpha,\theta) - h\sin(\alpha,\theta) = 0\\ (p_\beta + p_\theta)\cos(\beta,\theta) - h\sin(\beta,\theta) = 0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\} \quad \dots \quad (12)$$

Für einen starren Körper gibt es, wenn er vollkommen frei ist, sechs solche, voneinander unabhängige Gleichungen; die Freiheit wird beschränkt durch die Einführung von Zwangen, welche durch Gleichungen von der Form (9) ausgedrückt werden. Sind m solcher Gleichungen vorhanden, wo m höchstens gleich 6 sein kann, so ist die Zahl der Freiheitsgrade gleich $6 - m$.

So kann, wenn $m = 4$ ist, bewiesen werden, daß im Zustande des Gleichgewichtes der Renk, auf den sich die Kräfte reduzieren, zu jeder der beiden Schrauben reziprok sein muß; es gibt also in diesem Falle nur zwei Freiheitsgrade, d. h. es bestehen für den Körper nur zwei unabhängige Gleichungen von der Form (12).

Sind zwei Schrauben, um welche der Körper die Freiheit hat sich zu bewegen, bestimmt, so hat der Körper die Freiheit der Bewegung um jede beliebige, auf dem durch sie bestimmten Zylindroid gelegene Schraube.

Ein Zylindroid enthält alle (an Zahl natürlich unendlichen) Schrauben, die zu zwei gegebenen Schrauben in der betreffenden Beziehung stehen; es heißt daher ein Schraubenkomplex von der zweiten Ordnung; ebenso bilden alle Schrauben, die sich aus drei gegebenen konstruieren lassen, einen Schraubenkomplex dritter Ordnung, usf. Ein Schraubenkomplex von der sechsten Ordnung enthält hiernach alle Schrauben, die aus sechs gegebenen abgeleitet werden können; ein Körper aber, der sich um sechs gegebene Schrauben bewegen kann, ist offenbar ein vollkommen freier Körper; es ergibt sich also, daß ein Schraubenkomplex sechster Ordnung — der höchste, den es überhaupt gibt — jede beliebige Linie im Raume enthält.

Näheres hierüber findet man in dem schon zitierten Werke von Ball (oder in der auch in deutscher Bearbeitung erschienenen Sammlung der Ballschen Abhandlungen); auch sei bemerkt, daß der Gegenstand eng verknüpft ist mit der von Plücker, Klein u. a. behandelten Theorie der linearen Gruppen.

---

298. Zurückführung der angreifenden Kräfte auf zwei. Die an einem Körper angreifenden Kräfte können natürlich auf unzählige Weisen auf zwei zurückgeführt werden. Es ist nur nötig, irgend eine der Auflösungen in eine Kraft K und ein Kräftepaar P zu betrachten, das in einer gegen K unter einem bestimmten Winkel φ geneigten Ebene liegt; alsdann denke man sich P ersetzt durch zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte, die eine, P/a, in einem Punkte der Wirkungslinie von K, längs der Projektion von K auf die Ebene

von P, die andere, ebenfalls P/a, in einem Abstande a von der durch K und die eben genannte Kraft bestimmten Ebene. Die beiden sich schneidenden Kräfte K und P/a ergeben eine Resultante

$$R = \sqrt{K^2 + \frac{P^2}{a^2} + \frac{2KP}{a} \cos\varphi}$$

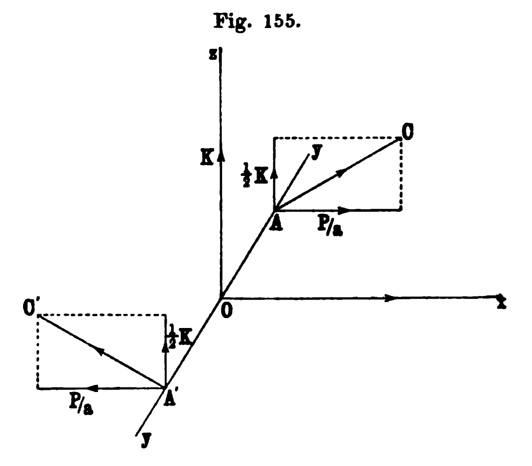
in einer zu der des Kräftepaares senkrechten Ebene, während der Winkel dieser Ebene gegen die Richtung der Kraft gleich

$$\arccos\left[\frac{\left(K + \frac{P}{a}\cos\varphi\right)}{R}\right]$$

ist. Diese Resultante R und die andere Kraft P/a bilden ein dem angreifenden äquivalentes System zweier Kräfte.

Ein Spezialfall der Zurückführung auf zwei Kräfte, welcher der Beachtung wert ist, ist folgender. In Fig. 155 sei Oz die Zentralaxe des Systems. Die Kraft K ist senkrecht zur Ebene des Kräftepaares gerichtet. Das letztere werde nun durch zwei entgegengesetzte Kräfte ersetzt, deren jede gleich P/a und parallel zur Axe Ox gerichtet ist, die aber in zwei Punkten A und A' angreifen, die von O auf der Axe Oy um $a/2$ bezw. $-a/2$ abstehen; ebenso werde die Kraft K durch zwei Kräfte ersetzt, deren jede gleich $K/2$ und zu Oz parallel ist, und die ebenfalls in A bzw. A' angreifen. Die Kräfte $K/2$ und P/a in A ergeben die Kraft

Fig. 155.



$$\frac{1}{2}\sqrt{K^2 + \frac{4P^2}{a^2}}$$

nach AC hin, die gleich große Kraft in A' ist nach C' gerichtet; beide sind gegen die Ebene xOy nach derselben Seite um den Winkel $\operatorname{arctg}(Ka/2P)$ geneigt.

299. Weitere Diskussion des Arbeitskriteriums des Gleichgewichtes. Kehren wir jetzt zu dem allgemeinen Falle eines materiellen Systems beliebiger Art zurück, so können wir leicht einsehen, daß die notwendige und hinreichende Bedingung der Unveränderlich-

keit irgend einer Konfiguration desselben, also des Gleichgewichts des Systems in dieser Konfiguration, die ist, daß die angreifenden Kräfte bei keiner unendlich kleinen Verrückung des Systems aus dieser Lage Arbeit leisten, wenigstens so weit, als unendlich kleine Größen erster Ordnung in Betracht kommen. Mit anderen Worten: Wenn δx, δy, δz irgend welche unendlich kleine Änderungen der Koordinaten x, y, z sind, so muß die Summe

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

für die Änderungen der Konfiguration verschwinden. Dabei bedeuten X, Y, Z Arbeitskräfte, wie sie in § 214 definiert sind, und die Summe ist über alle Punkte zu nehmen, an denen Kräfte angreifen und die sich so bewegen, daß die Kräfte Arbeit leisten.

Um einzusehen, daß diese Bedingung erfüllt ist, nehmen wir den Fall eines Systems, dessen Konfiguration durch m unabhängige Koordinaten p, q ... bestimmt ist; die Arbeit für unendlich kleine Änderungen derselben ist hier

$$\delta A = P\delta p + Q\delta q + \cdots \tag{13}$$

Wenn diese Summe für alle möglichen Arten der Variation verschwindet, müssen die auf jeden Teil des Systems wirkenden Kräfte ein Gleichgewichtssystem darstellen, andernfalls mindestens bei einer oder einigen Variationsarten Arbeit geleistet werden würde; die Bedingung ist also hinreichend. Um zu sehen, daß sie auch notwendig ist, können wir die Freiheit des Systems auf irgend eine Koordinate, etwa p, beschränken; die Arbeit ist dann $P\delta p$. Ist dies nicht gleich null, so kann es zu null gemacht werden durch Ausübung einer Kraft P' von der Beschaffenheit, daß für eine Verrückung δp das Produkt $(P + P')\delta p$ gleich null, also $P = -P'$ ist; damit ist das System im Gleichgewicht, es kann also vorher nicht im Gleichgewicht gewesen sein; die Annahme, daß $P\delta p$ nicht null sei, ist also falsch.

Die Beschränkung der Freiheit des Systems auf irgend eine der möglichen Freiheiten, wie sie hier gedacht wurde, ist immer ausführbar mit Hilfe reibungsloser Zwange.

Die durch Einführung von Zwangen sich ergebenden Gleichungen des Gleichgewichts für die einzelnen Teilchen des Systems sind schon in § 293 angegeben worden.

Da die Koordinaten p, q ... unabhängig voneinander sind, zerfällt die Arbeitsgleichung in lauter einzelne, und es ist

$$P = 0, \qquad Q = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{14}$$

300. Stabiles, labiles und neutrales Gleichgewicht. Im Falle eines konservativen Systems, wo keine Arbeit zur Überwindung von Reibungswiderständen verbraucht wird, hat die Arbeit den Wert

$$\delta A = -\left(\frac{\partial V}{\partial p}\delta p + \ldots\right),$$

wo V die potentielle Energie ist; d. h. die Arbeit ist gleich der Verminderung der potentiellen Energie bei den Verrückungen $\delta p \ldots$; anderseits haben wir gesehen, daß für das Gleichgewicht V einen ausgezeichneten Wert haben muß; im allgemeinen, wenn auch nicht in allen Fällen, ist es ein Maximum oder Minimum. In dem Falle des Minimums würde jede Verrückung aus der Gleichgewichtskonfiguration die potentielle Energie (bei Berücksichtigung höherer Glieder) steigern, d. h. die Kräfte, welche man zur Hervorrufung der Verrückung anwenden würde, müßten im ganzen genommen den von V abhängigen, durch die Verrückung ins Spiel gerufenen Kräften entgegenarbeiten. Verrückt man also das System und überläßt es dann sich selbst, indem man die verrückenden Kräfte wieder entfernt, so kehrt das System dank den in ihm wachgerufenen, von V herrührenden Kräften wieder in die Gleichgewichtskonfiguration zurück. Diese Art von Gleichgewicht heißt deshalb stabil.

Wenn im Gegenteil die Kräfte, welche die Verrückung hervorbringen, in gleichem Sinne wie die durch die Verrückung ausgelösten, durch V bestimmten Kräfte wirken — ein Fall, der eintreten wird, wenn V ursprünglich ein Maximum war —, so entfernt sich das System, nach einer kleinen Verrückung sich selbst überlassen, noch weiter von der Gleichgewichtskonfiguration. Dieses Gleichgewicht heißt deshalb unstabil oder labil.

Wenn endlich die von V abhängigen Kräfte nach einer kleinen Verrückung immer noch null sind, so besteht das Gleichgewicht auch in der neuen Konfiguration fort, und es heißt indifferent oder neutral.

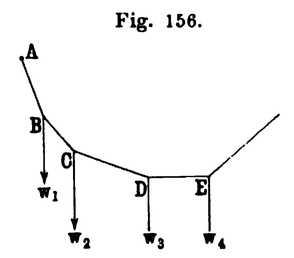
Beispiele hierfür finden sich allenthalben, so z. B. bei dem Gleichgewicht der Körper unter Wirkung der Schwere, wie bei einem, mit einem seiner Punkte auf einer Fläche ruhenden Körper. Im tiefsten Punkte einer konkaven Fläche ist eine homogene Kugel im stabilen, im höchsten Punkte einer konvexen Fläche ist sie im labilen, auf einer Ebene ist sie im neutralen Gleichgewichte. Eine nicht-homogene, z. B. aus einer hölzernen und einer eisernen Halbkugel zusammengesetzte, Kugel ist dagegen schon auf einer Ebene im stabilen oder labilen Gleichgewichte, je nachdem, bei horizontaler Holz-Eisengrenze, das Eisen oder das Holz sich unten befindet. Ein Ellipsoid endlich ist, auch wenn es homogen ist, auf der Ebene nicht im neutralen, sondern im stabilen oder labilen Gleichgewicht, je nachdem es auf einem Endpunkte der kleinsten oder der größten Axe ruht. Offenbar ist in allen diesen Fällen das Gleichgewicht stabil, wenn der Schwerpunkt des Körpers möglichst tief liegt, labil, wenn er möglichst hoch liegt.

Übrigens kann das Gleichgewicht für gewisse Verrückungen stabil, für andere labil oder neutral sein. Liegt z. B. eine Kugel auf einem Sattel, so daß von den beiden zueinander senkrechten Hauptschnitten der Fläche der eine konkav, der andere konvex ist, so ist das Gleich-

gewicht für Verrückungen auf jenem stabil, auf diesem labil. Und das vorhin betrachtete Ellipsoid auf der Ebene befindet sich, wenn es auf dem Endpunkte der mittleren Axe ruht, in demselben Falle; ein Rotationsellipsoid aber befindet sich, wenn es auf einem Äquatorpunkte ruht, für Drehungen im Äquator im neutralen, für Drehungen im Meridian im stabilen oder labilen Gleichgewichte, je nachdem es von verlängertem oder abgeplattetem Charakter ist.

301. Gleichgewichtsbeispiel: Das Seilpolygon. Ein weiteres, sehr lehrreiches Beispiel für die Gleichgewichtsbedingungen bietet das in Fig. 156 dargestellte Seilpolygon dar. Eine Anzahl Gewichte $w_1, w_2, \ldots w_n$ ist in den Punkten $B, C, D \ldots M$ in verschiedenen gegenseitigen Abständen an einem unausdehnbaren Seile aufgehängt, das in seinen Endpunkten A und N befestigt ist. Es ist die Aufgabe, die Neigungen der aufeinander folgenden Strecken des Seiles gegen die Horizontale, sowie die in ihnen herrschenden Spannungen zu finden.

Fig. 156.



Die Masse des Seiles selbst nehmen wir als so gering an, daß sie vernachlässigt werden kann und die Wirkung der Schwere darauf nicht in Betracht gezogen zu werden braucht. Auch nehmen wir an, daß das Seil keine Steifigkeit besitze, mit anderen Worten, daß irgend ein Teil von ihm unter der Wirkung von an seinen Enden angreifenden Teilen nur dann im Gleichgewicht sein könne, wenn diese Kräfte gleich und entgegengesetzt sind und das ganze Seilstück zwischen ihnen in der Richtung ihrer Wirkung liegt; beide Annahmen sind in der Wirklichkeit natürlich nur annähernd erfüllbar. Die angreifenden Kräfte sind die Gewichte $w_1, w_2 \ldots w_n$, und es ist zunächst klar, daß unter ihrer Wirkung das Seil sich in die durch A und N bestimmte Vertikalebene einstellen wird. Die Längen der einzelnen Strecken $AB, BC, \ldots MN$ seien $a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1}$ (es ist nämlich eine Strecke mehr als Gewichte vorhanden); die senkrechten Tiefen der Punkte $B, C, \ldots N$ unter dem Niveau von A seien $y_1, y_2 \ldots y_n, y_{n+1}$, ihre horizontalen Abstände von A seien $x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}$. Alsdann ist für irgend eine mögliche Verrückung die Arbeitsgleichung

$$\delta A = w_1 \delta y_1 + w_2 \delta y_2 + \cdots + w_n \delta y_n,$$

deren rechte Seite für den Gleichgewichtszustand null werden muß.

Dazu kommen die rein geometrischen Gleichungen:

$$x_1^2 + y_1^2 = a_1^2$$
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = a_2^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2 = a_n^2$$
$$(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2 = a_{n+1}^2,$$

welche die $n + 1$ Beziehungen

$$x_1 \delta x_1 + y_1 \delta y_1 = 0$$
$$(x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1) + (y_2 - y_1)(\delta y_2 - \delta y_1) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(x_n - x_{n-1})(\delta x_n - \delta x_{n-1}) + (y_n - y_{n-1})(\delta y_n - \delta y_{n-1}) = 0$$
$$(x_{n+1} - x_n)(-\delta x_n) + (y_{n+1} - y_n)(-\delta y_n) = 0$$

liefern; bei der letzten von ihnen ist berücksichtigt, daß $\delta x_{n+1} = 0$ und $\delta y_{n+1} = 0$ ist.

Multipliziert man jetzt die erste der letzteren Gleichungen mit einem Faktor λ_1, die zweite mit $\lambda_2, \ldots$, die letzte mit λ_{n+1} und addiert sie zueinander und zur Arbeitsgleichung, so kann man, da jetzt alles unabhängig ist, die Koeffizienten der δx und δy einzeln gleich null setzen und erhält

$$\lambda_1 x_1 - \lambda_2 (x_2 - x_1) = 0$$
$$\lambda_2 (x_2 - x_1) - \lambda_3 (x_3 - x_2) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_n (x_n - x_{n-1}) - \lambda_{n+1} (x_{n+1} - x_n) = 0$$

und

$$\left.\begin{aligned} w_1 + \lambda_1 y_1 - \lambda_2 (y_2 - y_1) = 0 \\ w_2 + \lambda_2 (y_2 - y_1) - \lambda_3 (y_3 - y_2) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_n + \lambda_n (y_n - y_{n-1}) - \lambda_{n+1} (y_{n+1} - y_n) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (15)$$

Die Gleichungen für die x kann man auch folgendermaßen zusammenfassen:

$$\lambda_1 x_1 = \lambda_2 (x_2 - x_1) = \lambda_3 (x_3 - x_2) = \cdots = \lambda_{n+1} (x_{n+1} - x_n) = \tau,$$

wodurch alle λ auf eine und dieselbe Konstante τ zurückgeführt werden. Setzt man dies nun in die Gleichungen (15) ein, so erhält man die n Gleichungen, nach den w aufgelöst:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \tau \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1}{x_1}\right) \\ w_2 &= \tau \left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_n &= \tau \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} - \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (16)$$

Sind $\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_{n+1}$ die Neigungen der Strecken $a_1, a_2 \ldots a_{n+1}$ gegen die Horizontale, so ist:

$$tg\,\theta_1 = \frac{y_1}{x_1}, \quad tg\,\theta_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \ldots,$$

die Gl. (16) können somit geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \tau\,(tg\,\theta_2 - tg\,\theta_1) \\ w_2 &= \tau\,(tg\,\theta_3 - tg\,\theta_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_n &= \tau\,(tg\,\theta_{n+1} - tg\,\theta_n) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (17)$$

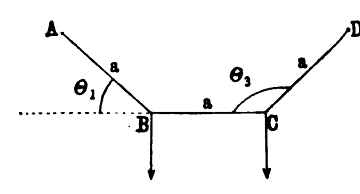
Diese Gleichungen haben offenbar die Bedeutung, daß τ die horizontale Komponente der Spannung in allen Strecken ist; auf jedes Teilchen muß eben nach beiden Seiten derselbe horizontale Zug ausgeübt werden, für die beiden Enden jeder Strecke ist er ebenfalls derselbe, also ist er durchweg der gleiche. Anderseits stellen die rechten Seiten in (16) oder in (17) die vertikalen Zugkomponenten der Strecken auf jedes Teilchen dar. Die Spannungen in den Strecken selbst endlich sind offenbar $\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \ldots \lambda_{n+1} a_{n+1}$.

Zur vollständigen Bestimmung von $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n+1}$ hat man noch die beiden Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin\theta_2 + \cdots + a_{n+1} \sin\theta_{n+1} &= h \\ a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos\theta_2 + \cdots + a_{n+1} \cos\theta_{n+1} &= l \end{aligned}\right\} \quad \ldots (18)$$

wo h und l der vertikale und der horizontale Abstand zwischen A und N ist. Nunmehr kann man mittels der Gl. (17) alle übrigen tg durch $tg\,\theta_1$ und τ ausdrücken, dies in (18) einsetzen und somit auch noch θ_1 und τ finden.

Fig. 157.



Als Spezialbeispiel können wir den einfachen Fall zweier gleicher Gewichte, Fig. 157, betrachten, welche durch drei gleiche Strecken a miteinander und den beiden, um l voneinander entfernten, in gleichem Niveau befindlichen festen Punkten verbunden sind. In diesem Falle lauten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} w &= \tau\,(tg\,\theta_2 - tg\,\theta_1) = \tau\,(tg\,\theta_3 - tg\,\theta_2) \\ \sin\theta_1 &+ \sin\theta_2 + \sin\theta_3 = 0 \\ \cos\theta_1 &+ \cos\theta_2 + \cos\theta_3 = \frac{l}{a}; \end{aligned}$$

setzen wir nun, wie es der Symmetrie halber sein muß, $\theta_2 = 0$ (BC horizontal), so wird:

$$\begin{aligned} tg\,\theta_1 + tg\,\theta_3 &= 0 \\ \sin\theta_1 + \sin\theta_3 &= 0 \\ \cos\theta_1 + \cos\theta_3 &= \frac{l}{a} - 1; \end{aligned}$$

nach den beiden ersten wird $\theta_3 = 2\pi - \theta_1$, d. h. θ_1 und θ_3 sind Supplementwinkel oder, wenn man sie beide nach außen rechnet, gleich, wiederum entsprechend der Symmetrie; der weiter noch mögliche Fall

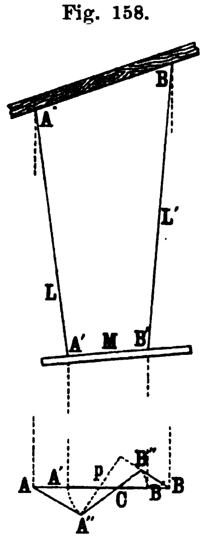
$\theta_3 = -\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ist unzulässig, weil dann nach der letzten Gleichung $l = a$ würde, während doch $l > a$ sein muß; schließlich gibt die letzte Gleichung:

$$\theta_1 = arccos \frac{l - a}{2a};$$

für $l = 2a$ wird z. B. $\theta_1 = 60^0$, für $l = 3a$ wird $\theta_1 = 0$, das Seil ist dann geradlinig gespannt. Wie man sieht, ist dieser Spezialfall rein geometrisch, die Gewichte spielen gar keine Rolle.

302. Weiteres Beispiel: Bifilare Aufhängung. Als ein Beispiel für die Stabilität des Gleichgewichtes wollen wir jetzt eine Anordnung betrachten, die einen Bestandteil vieler wichtiger Apparate der Physik bildet. Ein Körper von gegebener Masse M ist an zwei Drähten L, L' von gegebenen Längen aufgehängt, deren obere Enden an zwei festen, nicht notwendig in einer horizontalen Linie liegenden Punkten befestigt sind; auch die unteren Enden der Drähte, wo sie an dem Körper befestigt sind, brauchen nicht auf gleichem Niveau zu liegen und auch nicht beiderseits gleich weit von der durch den Schwerpunkt des Körpers gezogenen Vertikalen entfernt zu sein.

Fig. 158.



In dem unteren Teile der Fig. 158 sind A und B die auf eine horizontale Ebene gefällten Projektionen der oberen, A' und B' die der unteren Drahtenden, A'' und B'' die derselben Punkte im abgelenkten Zustande; es wird sich zeigen, daß das System im stabilen Gleichgewicht ist, wenn AB und $A'B'$ in eine und dieselbe Linie fallen.

Daß in diesem Falle überhaupt Gleichgewicht herrscht, folgt zunächst schon daraus, daß dann die Drähte in einer Ebene liegen. Denn im abgelenkten Zustande ist jeder der Drähte gegen die durch die oberen Aufhängepunkte gelegte Vertikalebene geneigt, und es tritt ein Kräftepaar ins Spiel, das den Körper in die frühere Lage zurückzuführen strebt. Die horizontalen Komponenten der Spannung der Drähte wirken längs $A''A$ und $B''B$ und sind einander gleich und parallel, da wir annehmen, daß der Schwerpunkt des Körpers in allen Lagen des letzteren stets in derselben Vertikalen bleibe. Die Summe der vertikalen Komponenten der Drahtspannungen anderseits ist gleich Mg, dem Gewichte des Körpers. Wird also die eine von ihnen, etwa die in AL, durch $\frac{1}{2}Mg(1 + c)$ bezeichnet, so ist die andere, in L', durch $\frac{1}{2}Mg(1 - c)$ zu bezeichnen; ebenso muß, wenn h die mittlere Höhe

von A über A' und von B über B' ist, die erstere Höhe $h(1+f)$, die letztere $h(1-f)$ sein; dabei wird, wenn c positiv ist, f positiv oder negativ sein, je nachdem in dem Drahte von größerer vertikaler Höhe die größere oder die kleinere Spannung wirkt.

Es sei P das durch eine Ablenkung ins Spiel gebrachte Kräftepaar und p die senkrechte Entfernung zwischen den beiden parallelen Linien AA'' und BB''. Dann sind die Horizontalkräfte längs diesen Linien je gleich P/p; sie müssen in A'' bzw. B'' angebracht werden, um die Ablenkung aufrecht zu erhalten. Da nun für jeden Draht die Vertikale, die Horizontale und die Drahtrichtung selbst die Richtungen dreier im Gleichgewichte befindlicher Kräfte bezeichnen, müssen die beiden Gleichungen

$$\frac{AA''}{h(1+f)} = \frac{P/p}{\frac{1}{2}Mg(1+c)}, \qquad \frac{BB''}{h(1-f)} = \frac{P/p}{\frac{1}{2}Mg(1-c)}$$

bestehen. Nun ist aber die Summe der Dreiecksflächen ACA'', BCB'' gleich $\frac{1}{2}(AA''+BB'')p$ oder, wenn $AB = 2a$, $A'B' = 2b$ und θ der Ablenkungswinkel ACA'' ist, gleich $2ab\sin\theta$. Es ergibt sich also

$$\tfrac{1}{2}(AA''+BB'')p = \frac{2Ph}{Mg}\,\frac{1-cf}{1-c^2} = 2ab\sin\theta,$$

und folglich

$$P = Mg\,\frac{ab\,(1-c^2)}{h\,(1-cf)}\sin\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Dies lehrt, daß für eine gegebene Ablenkung θ das Drehungsmoment desto kleiner ist, je größer h ist, d. h. die Empfindlichkeit ist desto größer, je größer die mittlere Länge der Drähte ist. Ferner ist P desto größer, je größer a und b sind, und es wird mit jeder dieser Größen gleichzeitig null; d. h. die Empfindlichkeit ist desto kleiner, je größer a und b sind, und, für a oder b gleich null, ist sie unendlich groß.

In der Praxis wählt man gewöhnlich symmetrische Anordnung, d. h. es werden sowohl die oberen, als auch die unteren Drahtenden in horizontale Linien gelegt, und C liegt in der Mitte zwischen A und B, also auch zwischen A' und B'. In diesem Falle ist

$$P = Mg\,\frac{ab}{h}\sin\theta$$

$$h = \sqrt{l^2 - AA''^2} \qquad (AA'')^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta,$$

also

$$h^2 = l^2 - (a-b)^2 - 4ab\sin^2\frac{\theta}{2},$$

und schließlich

$$P = \frac{Mg\,ab\sin\theta}{\sqrt{l^2-(a-b)^2-4ab\sin^2\dfrac{\theta}{2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

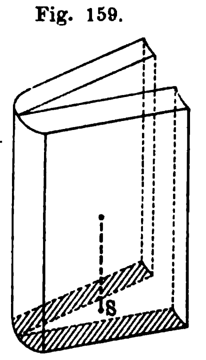
Ist der obere und der untere Fädenabstand nahezu gleich und überdies klein gegenüber ihrer Länge, so wird einfach

$$P = Mg \frac{ab}{l} \sin \theta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Daß die potentielle Energie ein Minimum ist, wenn die Fäden in einer Ebene liegen, folgt einfach daraus, daß in jeder anderen Stellung der Ebene der Körper gehoben wird.

303. Stabilität des Gleichgewichtes von Körpern in Ruhe oder in stationärer Bewegung. Schwerpunkt. Fahrzeuge, die sich auf Kurven bewegen. Für einen Körper, der unter der Wirkung der Schwerkraft auf einer Ebene ruht, wird als Bedingung stabilen Gleichgewichtes gewöhnlich diese angegeben, daß das vom Schwerpunkt gefällte Lot mit seinem Fußpunkte in die Grundfläche des Körpers hineinfalle. Diese Bedingung ist allerdings immer hinreichend, aber sie ist nicht immer notwendig, wenigstens wenn der Begriff „Grundfläche" oder „Basis" im üblichen Sinne verstanden wird. Bei einem homogenen Hohlzylinder trifft z. B. das Schwerpunktslot in die Mitte des Loches in der Basis, und trotzdem ist das Gleichgewicht stabil. Ein Körper von der Form der Fig. 159, also z. B. ein keilförmig auf die Kante gestelltes Buch, ist ferner im stabilen Gleichgewichte, obgleich das Schwerpunktslot die Ebene in S, also außerhalb der Grundfläche, trifft. Man muß also den Begriff „Basis" erweitern, indem man die Enklaven und die einspringenden Teile der Umgebung mit einbezieht. Man kann sich die Sache auch dadurch veranschaulichen, daß man um die äußere Kontur der Grundfläche einen Faden legt und straff zieht; die von ihm alsdann umschlossene Fläche ist die „Basis" im hier in Betracht kommenden Sinne.

Fig. 159.



Fällt also das Schwerpunktslot mit seinem Fußpunkte außerhalb der so definierten Basis, so ergeben die abwärts- und aufwärtsgerichteten Kräfte eine den Körper um eine horizontale Axe umkippende Resultante. Auf diese Weise kommt das Umkippen eines Karrens oder Fahrzeuges zustande, der auf einem Abhange so läuft, daß ein Rad höher steht als das andere, oder auf ebenem Wege, wenn das eine Rad über ein hinreichend hohes Hindernis läuft.

Je höher der Schwerpunkt des Fahrzeuges liegt, desto größer ist die Gefahr des Umkippens, d. h. desto kleiner ist der Winkel, um den das Fahrzeug geneigt werden kann, ohne umzufallen. Dieser Winkel ist das Maß der Stabilitätsgrenze des Körpers. In Fig. 160 (a. f. S.) sei S der Schwerpunkt des Körpers, C der Fußpunkt des von ihm auf die Basis

des Körpers gefällten Lotes, A ein Punkt der Stützkante, B ein Punkt der gehobenen Kante und D der Fußpunkt des von S auf die Grundebene gefällten Lotes. Dann ist CSA oder $arctg\ CA/CS$ der Winkel, um den der Körper geneigt werden kann, ohne umzukippen, und dieser Winkel ist desto kleiner, je größer CS ist. In der Figur ist die Neigung kleiner, der Neigungswinkel ist nämlich nur CSD oder BAD, und folglich ist das Gleichgewicht stabil; die Grenze der Stabilität wird erreicht, sobald D mit A zusammenfällt. In der Praxis spielt die Stabilität dieser Art, die auch Standfestigkeit genannt wird, eine große Rolle.

Es sei bei dieser Gelegenheit bemerkt, daß, wenn hier der Kürze halber vom „Schwerpunkte" des Körpers gesprochen wird (vergl. S. 149), damit eigentlich der Massenmittelpunkt gemeint ist. Der Schwerpunkt eines Körpers ist, streng genommen, derjenige im Körper feste Punkt, durch den — wenn er überhaupt existiert —, die Resultante der

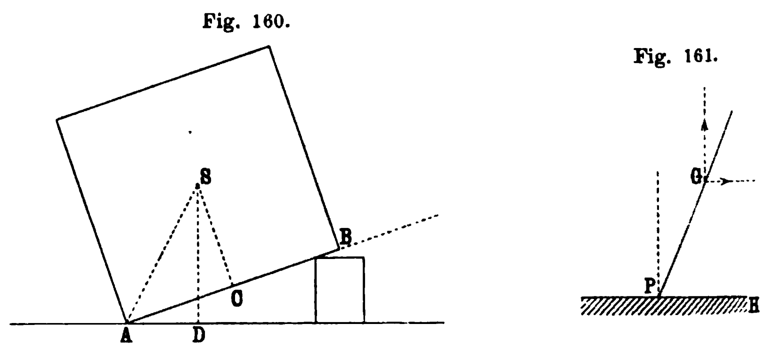


Fig. 160.
Fig. 161.

Gravitationskräfte auf die Teilchen des Körpers stets hindurchgeht, in welche Lage gegenüber der Erde der Körper auch gebracht werden möge. Streng genommen gibt es einen solchen Punkt gar nicht allgemein für alle Körper, sondern nur für Massenverteilungen, welche bestimmte Bedingungen erfüllen. Wir werden diese Frage in der Lehre von der Gravitation erörtern; für jetzt sei nur bemerkt, daß, da die Gravitationskräfte für die Teilchen von Körpern von so mäßigen Dimensionen, als sie gewöhnlich betrachtet werden, sämtlich annähernd parallel sind, ihre Resultante in allen Fällen durch einen kleinen, den Massenmittelpunkt umgebenden Raum geht und daß infolgedessen der Massenmittelpunkt sehr nahezu mit dem Schwerpunkte identifiziert werden darf.

Wenn ein Körper — z. B. ein Eisenbahnwagen — sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer Kurve bewegt, so müssen die auf ihn wirkenden Kräfte, abgesehen von denen, welche die Beschleunigung nach dem Krümmungsmittelpunkte liefern, im Gleichgewichte sein. Aus diesem Grunde ist die äußere Schiene höher als die innere gelegt, so daß der Wagen sich nach innen neigt.

Ist m die Masse, v die Geschwindigkeit des Wagens und r der

Krümmungsradius der Kurve, so ist die nach dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn (die als eben angenommen werden möge) gerichtete Kraft gleich mv^2/r. Die Gegenwirkung der Schienen auf den Wagen muß derartig sein, daß sie eine durch seinen Schwerpunkt gehende Resultante ergibt, welche in zwei Komponenten zerlegt werden kann, eine vertikale gleich seinem Gewichte und eine horizontale gleich mv^2/r. Folglich muß die Neigung einer quer gegen die Schienen gezogenen Linie gegen die Horizontale gleich $\operatorname{arctg}(mv^2/rmg)$, d. h. gleich $\operatorname{arctg}(v^2/gr)$ sein. Dies zeigt, daß die Neigung eigentlich für jede Geschwindigkeit eine andere sein müßte; in der Praxis ist sie einer gewissen, durch die Umstände an die Hand gegebenen Geschwindigkeit angepaßt, und diese darf bei der Fahrt nicht überschritten werden; auch der Übergang von der geradlinigen zur gekrümmten Strecke wird nach gewissen praktischen Regeln ausgeführt, auf welche einzugehen hier nicht der Ort ist.

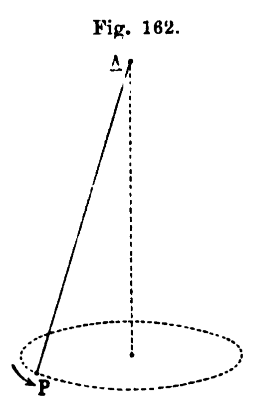
Nun denke man sich ferner in einem solchen Wagen ein Pendel aufgehängt. Die Pendelkugel wird sich nach außen bewegen, bis der Faden so stark gegen die Vertikale geneigt ist, daß er einen der Beschleunigung v^2/r entsprechenden horizontalen Gegenzug liefert; die Neigung des Fadens ist dann wiederum $\operatorname{arctg}(v^2/gr)$, d. h. der Faden steht senkrecht auf der Linie, die quer gegen die Schienen läuft.

Beim raschen Umbiegen um eine Ecke neigt der Radfahrer seine Maschine nach der Seite der Ecke. In Fig. 161 sei PH die Horizontale, PG die Richtung des gegen die Vertikale geneigten Gestelles der Maschine. In Anbetracht des Eingreifens der Räder in den Boden wirkt eine horizontale Kraft in der Richtung PH auf sie, außerdem aber eine vertikale Kraft gleich dem Gewichte der Maschine mit dem Fahrer; die Resultante ist nach PG gerichtet; ganz ähnlich verhält es sich bei Wettrennen auf kreisförmiger oder ovaler Bahn. Die Formeln sind in diesen Fällen den obigen ganz entsprechend.

304. Gleichgewicht eines in einem Fahrzeug mit beschleunigter Bewegung aufgehängten Pendels. Als ein weiterer Fall relativen Gleichgewichtes werde der Fall eines Pendels betrachtet, das in einem Eisenbahnwagen hängt, welcher eine konstante Beschleunigung in der Richtung der Bewegung erfährt. Das Pendel wird eine Neigung nach rückwärts annehmen, groß genug, um einen Zug nach vorn vom Betrage $m\alpha$ auf die Kugel auszuüben, wo α die Beschleunigung ist; daraus folgt, daß die Neigung des Fadens gegen die Vertikale gleich $\operatorname{arctg}\alpha/g$ sein wird. Ist die Bewegung des Wagens in demselben Maße verzögert, so ist die Neigung des Pendels ebenso groß, aber nach vorn gerichtet. Geht die gleichförmige Bewegung in beschleunigte oder verzögerte über, so wird das Pendel abgelenkt, schwingt so lange hin und her, als die Beschleunigung sich ändert, und kommt erst zur Ruhe, wenn sie konstant geworden ist.

305. Einfaches konisches Pendel. Auch das sogenannte konische Pendel kann zur Veranschaulichung des relativen Gleichgewichtes dienen. An einem festen Punkte A ist mittels eines Fadens von zu vernachlässigender Masse ein Massenteilchen m in P aufgehängt; infolge der Wirkung der Schwerkraft beschreibt das letztere in gleichförmiger Bewegung (denn alle Punkte der Bahn sind gleichberechtigt) einen Kreis um die durch den Aufhängepunkt gelegte Vertikale AC bzw. um deren Endpunkt C. Die Horizontalkomponente des von dem Faden ausgeübten Zuges T ergibt die notwendige Beschleunigung des Teilchens gegen den Mittelpunkt C der Kreisbahn hin; die vertikale Komponente hält dem Gewichte des Teilchens das Gleichgewicht. Ist nun v die Geschwindigkeit des Teilchens und r der Radius der Bahn, l die Länge des Fadens und θ seine Neigung gegen die Vertikale, so hat man:

Fig. 162.



$$T \sin\theta = \frac{m v^2}{l \sin\theta}$$

$$T \cos\theta = mg,$$

und folglich:

$$v^2 \cos\theta = g l \sin^2\theta;$$

ist nun τ die Umlaufszeit, so hat man:

$$\tau = 2\pi l \frac{\sin\theta}{v} \quad \text{und} \quad v^2 = 4\pi^2 l^2 \frac{\sin^2\theta}{\tau^2},$$

und somit:

$$g\tau^2 = 4\pi^2 l \cos\theta,$$

oder schließlich:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos\theta}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

d. h. die Periode unseres konischen oder Kreispendels ist gleich der eines einfachen Pendels (mit vertikaler Schwingungsebene), dessen Länge gleich der vertikalen Höhe des Aufhängepunktes A des konischen Pendels über der Kreisebene, also über C, ist. Es sei bemerkt, daß man die Schwingungsdauer des gewöhnlichen Pendels durch diesen Vergleich mit dem konischen Pendel (ebenso wie nach der Hodograph-Methode) auf elementarem Wege finden kann, obwohl sie an sich, wegen der während der Periode fortwährend veränderlichen Geschwindigkeit, ein Problem der Integralrechnung darstellt.

306. Zusammengesetztes konisches Pendel. Nunmehr sei das Pendel aus einem starren Körper gebildet, der sich in einer vertikalen Ebene um einen Punkt A (Fig. 163) bewegen kann, der in einer verti-

kalen Axe steckt, um die er sich im Azimut drehen kann, ähnlich wie bei den mit Gewichten versehenen Armen des Zentrifugalregulators der Dampfmaschine. Er sei symmetrisch um die durch A und den Schwerpunkt S gelegte Axe und rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω bei konstanter Neigung θ gegen die Vertikale. Man soll die Rotationsdauer τ als Funktion von ω und θ finden.

Diese Aufgabe kann ohne weiteres auf Grund der Erwägung gelöst werden, daß es sich hier um nichts anderes als ein Kreiselproblem handelt, wobei die Bewegung des Kreisels durch die Bedingung beschränkt ist, daß die Präzession um die Vertikale (§ 264) gleichförmig sei; die Lösung kann auch direkt aus den Eulerschen Bewegungsgleichungen (§ 282) abgeleitet werden (s. u.). Indessen ist es lehrreich, das Problem selbständig zu lösen.

Fig. 163.

Zunächst stellen wir fest, daß die Summe der um eine durch A senkrecht zur Papierebene gelegten Axe genommenen Momente der Massenbeschleunigungen der Teilchen nach der Vertikale hin gleich der Summe der Momente der entsprechenden Gravitationskräfte sein muß, d. h. gleich $Mgl \sin \theta$, wenn M die Gesamtmasse des Pendels und l die Entfernung zwischen S und A ist.

Ferner sei P ein Teilchen von der Masse m, das in einer zur Axe AS senkrechten Ebene PQR liege. Von P fälle man ein Lot PR auf die Ebene, welche durch die Symmetrieaxe und die Vertikale bestimmt ist, und es sei x der Abstand des Fußpunktes dieses Lotes von der Symmetrieaxe, l' die Strecke AQ und y die Strecke PR. Der Abstand PU des Teilchens von der Vertikalen ist alsdann:

$$PU = \sqrt{(l' \sin \theta - x \cos \theta)^2 + y^2}.$$

Folglich ist die Kraft, die erforderlich ist, um die zur Rotation nötige Beschleunigung in der Richtung PU zu liefern, gleich:

$$m \omega^2 \sqrt{(l' \sin \theta - x \cos \theta)^2 + y^2}.$$

Das Moment dieser Kraft um die durch A senkrecht zur Papierebene gelegte Axe ergibt sich durch Multiplikation ihrer Komponente längs RU mit der Länge AU; jene Komponente ist $m\omega^2 (l' \sin \theta - x \cos \theta)$, diese Länge ist $l' \cos \theta + x \sin \theta$, folglich das gesuchte Moment gleich:

$$m \omega^2 [(l'^2 - x^2) \sin \theta \cos \theta - l' x (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)].$$

Bei der Summierung dieses Moments für alle in derselben Ebene gelegenen Teilchen ist zu beachten, daß, da l' und θ für sie dieselben Werte haben und der Symmetrie halber jedem $+x$ ein $-x$ entspricht, das zweite Glied obigen Ausdrucks keinen Beitrag zur Summe liefert; für das ganze Pendel wird somit die Summe gleich:

$$\omega^2 \sin\theta \cos\theta\, (\Sigma\,(m\,l'^2) - \Sigma\,(m\,x^2)).$$

Ist nun B das Trägheitsmoment des Pendels um die durch A senkrecht zum Papier gelegte Axe, C dasjenige um die Symmetrieaxe, so ist obige Klammergröße gleich $B - C$. Setzt man dieses Moment schließlich dem der Schwere gleich, so erhält man:

$$\omega^2 = \frac{Mgl}{(B - C)\cos\theta}$$

oder, da $\omega = 2\pi/\tau$ ist:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{(B - C)\cos\theta}{Mgl}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Aus den Eulerschen Gleichungen (§ 282) findet man dasselbe Resultat folgendermaßen. Man setze die Winkelgeschwindigkeit um die Symmetrieaxe gleich ω_3, die um die auf SAU in A senkrechte Axe gleich ω_2, dann ist in der Gleichung $A\dot{\omega}_1 - (C - B)\,\omega_3\,\omega_2 = L$

$$L = Mgl\sin\theta,\ \omega_1 = 0,\ \dot{\omega}_1 = 0,\ \omega_3 = \omega\cos\theta,\ \omega_2 = \omega\sin\theta.$$

Man erhält also sofort die obige Formel für ω.

Endlich kann man auch den Gedankengang von § 286 benutzen, um zur Lösung des Problems zu gelangen; es bleibe dies dem Leser überlassen.

Wenn das Pendel ein einfaches Massenteilchen und die Aufhängung gewichtslos ist, wird $B = ml^2$, $C = 0$, $M = m$, und man kommt zu dem Fall von § 305 zurück.

307. Gleichgewicht eines Teilchens auf einer Fläche oder auf einer Kurve. Wenn die Fläche, auf welcher das Teilchen die Freiheit hat sich zu bewegen, glatt ist, so ist die einzige für das Gleichgewicht notwendige Bedingung die, daß die Resultante der darauf wirkenden Kräfte senkrecht auf der Fläche stehe; sie wird dann durch die Gegenwirkung der Fläche kompensiert. Die Richtungskosinus der Normale der Fläche seien l, m, n, die Komponenten der Kraft seien X, Y, Z; für das Gleichgewicht muß alsdann

$$\frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

sein. Anderseits sind die Koordinaten x, y, z eines Punktes P auf einer Fläche durch eine Gleichung von der Form $\varphi(x, y, z) = 0$ miteinander verknüpft, wo φ eine Funktion von x, y, z bedeutet. Sind dx, dy, dz erlaubte Zuwachse von x, y, z, also $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ ihre

neuen Werte, so gilt auch für diese dieselbe Gleichung, und wenn man von ihr die alte abzieht, erhält man:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dz = 0;$$

eine Gleichung, welche nach den Regeln der analytischen Geometrie aussagt, daß $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$ die Komponenten einer Linie sind, die auf derjenigen Linie PQ, deren Komponenten dx, dy dz sind, senkrecht steht. Dies gilt aber für jede beliebige an der betrachteten Stelle auf der Fläche gezogene kleine Linie PQ; folglich muß jene erstgenannte Linie in P auf der Fläche selbst senkrecht stehen, d. h. $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$ sind mit den Richtungskosinus l, m, n der Flächennormale proportional, und man kann statt Gl. (24), indem man $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$ für l, m, n einsetzt und dann umkehrt, auch schreiben:

$$\frac{1}{X}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{Y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{Z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Die hierin enthaltenen beiden Gleichungen, im Verein mit der Flächengleichung $\varphi(x, y, z) = 0$, bestimmen die Koordinaten des Gleichgewichtspunktes P.

Ähnlich, wenn das Teilchen sich nur auf einer Kurve bewegen kann. Eine Kurve im Raume ist durch zwei die Koordinaten x, y, z der Kurvenpunkte verknüpfende Gleichungen charakterisiert, d. h. sie läßt sich als die Schnittlinie zweier Flächen ansehen. Es seien jetzt l, m, n die Richtungskosinus der in einem Punkte P an die Kurve gelegten Tangente; dann muß, wenn das Teilchen in P im Gleichgewicht sein soll, die in die Kurvenrichtung fallende Kraftkomponente null sein; diese Komponente setzt sich aber aus den nach den Axen genommenen Komponenten X, Y, Z in der Weise $lX + mY + nZ$ zusammen; man hat also:

$$lX + mY + nZ = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Diese Gleichung, im Verein mit den beiden Kurvengleichungen $\varphi(x, y, z) = 0$ und $\psi(x, y, z) = 0$ bestimmt den Ort des Gleichgewichtes.

Kehren wir jetzt zur Fläche zurück und nehmen wir an, sie sei rauh. Dann wollen wir die Resultante der angreifenden Kräfte (ohne die Reibung) in zwei Komponenten zerlegen, eine senkrecht zur und eine in der Tangentialebene. Die erstere ist $lX + mY + nZ$, wenn wieder l, m, n die Richtungskosinus der Normale bezeichnen; wir wollen sie N nennen. Dividiert man diese Komponente N durch die ganze Kraft $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, so erhält man offenbar den Kosinus des Winkels θ zwischen der Normale und der Richtung der ganzen Kraft. Der Komplementwinkel zu θ hat aber als Kosinus den $\sin\theta$, also $\sqrt{1 - \cos^2\theta}$, und folglich ist die Tangentialkomponente der Kraft gleich

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,.\,\sqrt{1 - \cos^2\theta},$$

oder, anders ausgedrückt, gleich

$$\sqrt{(nY - mZ)^2 + (lZ - nX)^2 + (mX - lY)^2};$$

wir wollen diese Komponente T nennen. Dann ist die Gleichgewichtsbedingung, wenn μ eine Konstante ist:

$$\mu N \pm T = 0 \quad \text{. . . . . (27)}$$

Keine noch so große Kraft, welche mit der Flächennormale einen Winkel θ kleiner als $arctg\,\mu$ bildet, kann das Teilchen in Bewegung setzen. Denn jede solche Kraft hat eine Normalkomponente N' und eine Tangentialkomponente T' mit der Beziehung $N' tg\,\theta = T'$, und da $tg\,\theta < \mu$ ist, so ist $T' < \mu N'$; aber durch N' wird eine Reibung im Betrage von $\mu N'$ ins Spiel gebracht, diese ist größer als die Tangentialkraft T', und folglich kann keine Bewegung eintreten.

Nun möge die Resultante der angreifenden Kräfte in der Richtung der in dem Punkte P auf der Fläche errichteten Normale wirken, und man denke sich um den Punkt P herum eine geschlossene Kurve auf der Fläche gezogen von der Eigenschaft, daß für jeden Punkt Q dieser Kurve der Winkel, den die Normale in ihm mit der Normale in P bildet, gerade gleich $arctg\,\mu$ ist. In dem von dieser Kurve eingeschlossenen Gebiete ist dann $\theta < arctg\,\mu$, in diesem ganzen Flächenstücke ist also das Teilchen im Gleichgewicht.

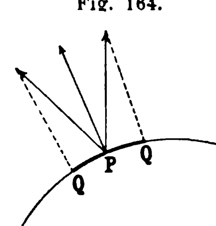
Ebenso verhält es sich mit dem Gleichgewicht eines Teilchens auf einer rauhen Kurve. Die Tangentialkomponente der Kraft ist $lX + mY + nZ$, wenn l, m, n wieder die Richtungskosinus der Tangente sind, die Komponente, welche auf der Tangente senkrecht steht, aber in der durch diese und die ganze Kraft bestimmten Ebene liegt, ist

$$\sqrt{(mZ - nY)^2 + (nX - lZ)^2 + (lY - mX)^2}.$$

Folglich ist, wenn μ wieder eine Konstante ist, die Gleichgewichtsbedingung:

$$\left.\begin{aligned} &lX + mY + nZ \\ &\qquad + \mu \sqrt{(mz - nY)^2 + (nX - lZ)^2 + (lY - mX)^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Fig. 164.



Diese Gleichung zusammen mit den beiden Kurvengleichungen bestimmt den Gleichgewichtsbereich QPQ; denn auch hier gibt es nicht bloß einen Punkt, sondern eine ganze Strecke, auf welcher der Winkel θ zwischen der ganzen Kraft und der Kurvennormalen (in derselben Ebene) kleiner als $arctg\,\mu$ ist.

Der Winkel $arctg\,\mu$ heißt **Ruhewinkel**; er ist desto größer, je rauher die Fläche bezw. die Kurve ist.

Die Fig. 164 deutet die betrachteten Verhältnisse für die Kurve (wie für die Fläche im Durchschnitt) in leicht verständlicher Weise an.

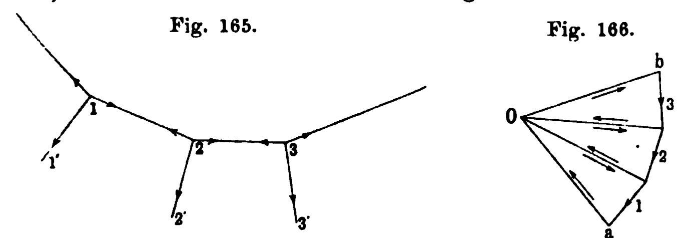
Siebentes Kapitel.

Graphische Statik.

---

308. Seilpolygon und Kräftepolygon. In der Technik werden die auf die verschiedenen Teile einer Konstruktion oder Maschine wirkenden Kräfte meistens durch graphische Prozesse bestimmt. Von diesen sei hier ein kurzer Bericht mit einigen wenigen Beispielen gegeben; man wird aber im folgenden viele weitere Anwendungen finden.

Als ein zur Einführung geeignetes Beispiel sei das Problem des Seilpolygons gewählt, dessen analytische Lösung für einen bestimmten Fall in § 301 betrachtet wurde. In jedem Punkte 1, 2, 3 des Polygons (Fig. 165) können drei Kräfte als wirksam angesehen werden, nämlich



zwei längs den anstoßenden Teilen der Kette und als dritte die angreifende Kraft, je nach Lage des Falles 1 1', 2 2' ... In jedem Teile 12, 23 der Kette zieht die Spannung längs dem betreffenden Teile mit gleichen und entgegengesetzten Kräften an den Enden. Wir wollen nun der Figur des Seilpolygons eine andere Figur, das entsprechende Kräftepolygon, zur Seite stellen.

Da die drei Kräfte in jedem Punkte 1, 2 ... im Gleichgewichte sein müssen, so müssen sie durch die drei Seiten eines Dreieckes der Reihe nach (§ 142) darstellbar sein; sie können also durch jedes Dreieck dargestellt werden, mit dessen Seiten ihre Richtungen parallel sind. Wenn wir also z. B. 1 1' nehmen, so zeichnen wir ein Dreieck, dessen Seiten den Kräften in 1 parallel sind; wir bezeichnen den Punkt, in dem sich die beiden die Kräfte in den beiden Teilen der Kette darstellenden Linie treffen, mit *O* und geben durch Pfeile im Inneren des Dreieckes die Richtungen an, in denen diese Kräfte auf den Punkt 1 wirken. Durch einen Pfeil auf der dritten Seite und die der Mitte

jener Seite gegenübergestellte Zahl 1 ist die in 1 im Seilpolygon wirksame angreifende Kraft bezeichnet.

Nun wird diejenige Seite dieses Dreiecks, welche die Kraft von 1 nach 2 in dem Seilpolygon darstellt, mit umgekehrtem Pfeil die entgegengesetzte, von 2 nach 1 gerichtete Kraft darstellen. Wenn wir nun eine Linie vom Ende von 1 (Fig. 166) parallel mit der angreifenden Kraft in 2 (Fig. 165) ziehen, bis sie eine von O aus parallel mit der Kraft im Kettenteile 2 bis 3 gezogene Linie trifft, so fügen wir in Fig. 166 (a. v. S.) dasjenige Dreieck hinzu, dessen Seiten und innere Pfeile die Größen und Richtungen der in 2 im Seilpolygon wirkenden Kräfte darstellen. Die die angreifende Kraft darstellende Linie ist mit 2 bezeichnet. So wird also die Kraftdarstellung (Fig. 166) konstruiert durch Beifügung eines Dreieckes für aufeinander folgende Punkte, an denen Kräfte die Kette angreifen; die Zeichnung kann entweder auf eine teilweise Reihenfolge von Punkten 1, 2 ... beschränkt oder durch Einschließung sämtlicher derartiger Punkte mitsamt den Endpunkten, an denen die Kette gehalten wird, vervollständigt werden. (In den Figuren werden nur drei Kräfte veranschaulicht, aber es kann natürlich eine beliebige Anzahl davon geben.)

309. Ableitung der einem gegebenen System äquivalenten Kräfte aus dem Kräftepolygon. Die Linien 1, 2... (Fig. 166) bilden die Seiten eines Polygons, das die angreifenden Kräfte darstellt, und das wir das Kräftediagramm oder Kräftepolygon nennen wollen, und es soll bewiesen werden, daß die zwei die beiden Enden des Polygons mit O verbindenden Kräfte, in demselben Sinne wie in Fig. 166 genommen, zwei Kräfte darstellen, die bei geeignetem Angriff auf einen starren Körper gerade die Kräfte 1, 2 ... äquilibrieren würden, wenn diese ohne Änderung der in Fig. 165 gegebenen Größe und Wirkungslinie denselben Körper angriffen.

Denn diese beiden Kräfte haben, wenn alle Kräfte in einen Punkt des Körpers übertragen werden (wie in § 177 ausgeführt wurde), eine Resultante, die der von 1, 2 ... gleich und entgegengesetzt ist. Ferner stellen die Linien bO, Oa die streckenden Kräfte in den Schlußteilen der Kette dar (Fig. 165); und wenn die Kette im Gleichgewichte ist, muß die Summe der Momente dieser Kräfte um einen Punkt in der Ebene der Kräfte der Summe der Momente der angreifenden Kräfte um denselben Punkt gleich sein, da jene in den Teilen 12, 23 ... der Kette, da sie Paare von gleichen und entgegengesetzten Kräften sind, keine Momente um irgend welchen Punkt haben. Also muß die Gleichheit der Momente immer noch bestehen, wenn die Kräfte 11′, 22′ ... wie oben den starren Körper angreifen. Somit ist der Satz bewiesen.

Aus diesem eben entwickelten Satze kann man ohne weiteres den Schluß ableiten, daß, wenn irgend welche Kräfte 11′, 22′ ... in irgend welchen Richtungen in einer Ebene einen starren Körper angreifen,

sie zwei anderen Kräften äquivalent sind, die durch Oa, bO der Fig. 166 dargestellt sind, und die in diesen Richtungen in den Schlußteilen des Seilpolygons der Fig. 165 wirksam sind; das besagt, daß die graphische Konstruktion das System der angreifenden Kräfte auf zwei Kräfte zurückführt.

Überdies aber ist es klar, daß man für das gegebene System auf einen starren Körper wirkender Kräfte in einer Ebene eine beliebige Anzahl von Seilpolygonen konstruieren kann, deren jedes ein dem gegegebenen System äquivalentes System von zwei Kräften ergeben wird. Es ist für die Konstruktion nur notwendig, daß der Anfangspunkt O des Kräftepolygons nicht in der Richtung der Verlängerung einer der Seiten 1, 2 ... dieses Polygons liege; oder daß, wenn er so liegt, ein Endpunkt des Seilpolygons auf der Wirkungslinie derjenigen angreifenden Kraft gewählt werde, welche durch die Seite des Kräftepolygons, auf der O liegt, dargestellt wird.

310. Spezialfall vertikaler Kräfte. Wenn die angreifenden Kräfte (Fig. 167) vertikal gerichtet sind, so werden die Seiten 1, 2, 3 ... des Kräftepolygons (Fig. 168) eine senkrechte gerade Linie, und die vom Anfangspunkte O in Fig. 168 gezogenen Linien geben die Richtungen und Größen der Kräfte in den Seiten eines Seilpolygons (Fig. 167), das diesen Linien entspricht. Davon kann man Gebrauch machen, um das Seilpolygon zu finden, in dem eine gewichtlose Kette, die der Reihe nach in gleichen Entfernungen mit gleichen Gewichten belastet ist, hängen würde, 1. wenn diese Entfernungen längs dem Polygon, 2. wenn sie längs der quer durch die wirksamen Kräfte gezogenen horizontalen Linie gemessen werden. Es seien zunächst die Endpunkte A, B des Seilpolygons als gegeben und als auf demselben Niveau angenommen.

Fig. 167.

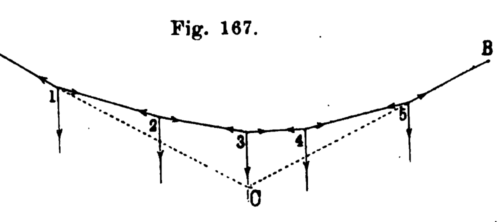
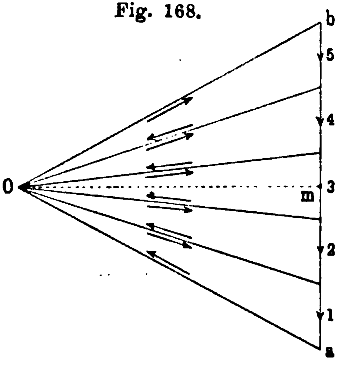


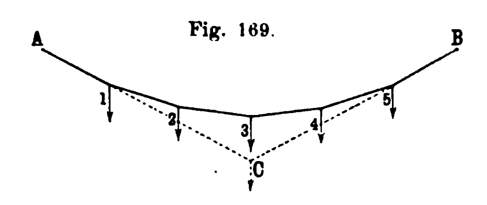
Fig. 168.



Zeichnen wir das Kräftepolygon. d. h. ziehen wir eine senkrechte gerade Linie ab (Fig. 168), die in so viele gleiche Teile geteilt wird, als wirkende Kräfte vorhanden sind. Durch den Mittelpunkt m dieser Linie ziehen wir eine zu ihr senkrechte und nehmen einen Punkt auf dieser senkrechten als Anfangspunkt O. Von O ziehen wir Linien nach ab und nach jedem der Teilungspunkte der Linie ab. Diese sind die Rich-

tungen der Seiten eines Seilpolygons, das die hängende Kette bilden wird. Für den ersten der beiden angeführten Fälle nehmen wir irgend eine Strecke r und tragen sie von O aus längs Oa ab und nehmen ihre Projektion p auf Om. Dieselbe Strecke tragen wir längs O (1 2) ab und finden die Projektion p_2 auf Om und so weiter für jede der Linien Oa, O (1 2), O (2 3)..., Ob; nehmen wir die Summe μ der Projektionen und, wenn sie größer oder kleiner als AB ist, verringern oder vergrößern wir r im geeigneten Verhältnis, bis es die richtige Summe der Projektionen ergibt. Wenn wir die Projektionen haben, ziehen wir zwischen A und B vertikale Linien in Abständen gleich den aufeinander folgenden Projektionen. Dann ziehen wir von dem einen Endpunkte A (Fig. 169) eine zur Linie Oa parallele Linie, die die erste Senkrechte in 1 trifft, von 1 eine mit O 1 2 parallele Linie, die die zweite Senkrechte in 2 trifft, u. s. w., bis im Punkte B das Polygon vollendet ist.

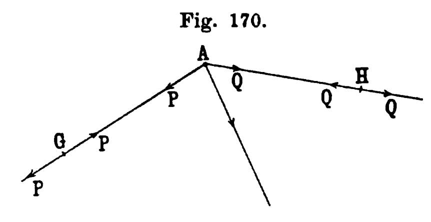
Fig. 169.



Für den zweiten Fall ziehen wir die Senkrechten in gleichen Entfernungen voneinander. Von A wird dann wieder eine mit Oa parallele Linie gezogen, die die erste Senkrechte in 1 trifft, von 1 eine mit O_{12} parallele Linie, die die zweite Senkrechte in 2 trifft, u. s. w., bis B erreicht ist.

311. Ein gegebenes System von Kräften, zurückgeführt auf zwei Kräfte durch zwei feste Punkte und innere Kräfte. In den gewöhnlichen Anwendungen der Methoden der graphischen Statik werden die wirkenden Kräfte nach ihrer Größe und Wirkungslinie gegeben. Wir haben gesehen, daß gegebene Kräfte in einer Ebene, wenn sie auf einen starren Körper wirken, zwei durch die Linien Oa, bO des Seilpolygons dargestellten Kräften äquivalent sind, welche längs diesen Richtungen von den Enden eines Seilpolygons aus wirken. Wirken die Kräfte auf ein verbundenes System von Teilen, so kann jede Kraft als auf ein beliebiges Teilchen des Systems wirkend betrachtet werden. Sie können durch zwei an zwei beliebigen Punkten G, H des Systems angreifende Kräfte ersetzt werden unter Hinzufügung von Paaren gleicher und entgegengesetzter Kräfte, die zwischen G und H einerseits und den Angriffspunkten der Kräfte anderseits wirken (Fig. 170). Denn, nehmen wir eine beliebige Kraft, die im Punkte A das System angreift; sie kann in zwei Komponenten P, Q zerlegt werden, die auch

Fig. 170.



in A, aber nach AG bezw. AH wirken. Nun führe man in G zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte P und in H zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte Q ein, was an der Sachlage nichts ändert. Ordnen wir nun anders zu, so erhalten wir erstens die Kraft P von G nach außen, die Kraft Q von H nach außen, das von G und A gegeneinander wirkende Paar P und das von H und A gegeneinander wirkende Paar Q.

Der gleiche Prozeß kann für sämtliche angreifende Kräfte durchgeführt werden, und wir erhalten dadurch eine resultierende Kraft in G und eine in H, die mit den Paaren innerer Kräfte zwischen G und H und den Angriffspunkten der Kräfte des Systems den gegebenen Kräften äquivalent sind.

312. Ein System von auf einen starren Körper wirkenden Kräften, auf zwei Kräfte durch zwei gegebene Punkte zurückgeführt. Wenn nun die Punkte des G, H einschließenden Systems starr verbunden sind, so ist die Einführung der Paare von gleichen und entgegengesetzten Kräften infolge der Verbindung unnötig geworden, da die beiden durch G und H hindurchwirkenden Kräfte in ihrer Wirkung auf den Körper den gegebenen angreifenden Kräften äquivalent sind. Es müssen deshalb diese beiden Kräfte mit den gegebenen angreifenden Kräften ein Kräftepolygon bilden; d. h. wenn die angreifenden Kräfte der Reihe nach als die Seiten eines Polygons, das mit a anfängt und mit b endet, abgetragen werden, muß es möglich sein, einen Anfangspunkt O derart zu finden, daß die Linien Oa, bO die Kräfte in G und H darstellen.

Die Kräfte in G und H, die mit den angeführten Paaren innerer Kräfte den gegebenen Kräften auf ein starres System äquivalent sind, sind somit die Kräfte in den Schlußseiten eines Seilpolygons der gegebenen angreifenden Kräfte.

Es ist auch klar, daß es für ein starres System möglich ist, ein Seilpolygon so zu zeichnen, daß die Schlußseiten, in denen das Paar äquivalenter Kräfte wirkt, durch zwei willkürlich in dem Körper gewählte Punkte G, H hindurchgehen. Obgleich nur ein Paar von durch G, H hindurchgehenden Kräften durch den oben beschriebenen Prozeß gefunden werden kann, ist es doch klar, daß mehr als ein Seilpolygon gezeichnet werden kann, durch welches das Kräftesystem auf ein Paar von Kräften durch G, H zurückgeführt wird. Denn es möge die einzelne resultierende Kraft (wenn es eine gibt) des Kräftesystems aus dem dem gegebenen System äquivalenten Paar von Kräften gefunden und seine Richtung in dem Seildiagramm abgetragen worden. Dann können stets zwei Kräfte in Linien, die von einem beliebigen Punkte der Resultante nach G bezw. H gezogen werden, zur Darstellung dieser Resultante benutzt werden.

313. Gleichgewichtsbedingungen koplanarer Kräfte. Wir können jetzt die Gleichgewichtsbedingungen eines Systems von kopla-

naren, d. h. in einer Ebene liegenden, angreifenden Kräften betrachten, die auf einen starren Körper wirken.

Die notwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen sind: 1. daß die Kräfte eine Nullresultante haben, 2. daß die Summe ihrer Momente um jeden Punkt in ihrer Ebene verschwinde.

Die erste Bedingung ist augenscheinlich nur dann erfüllt, wenn das Kräftepolygon der angreifenden Kräfte geschlossen ist, d. h. wenn die Punkte a und b zusammenfallen; die zweite ist nur dann erfüllt. wenn die Seilpolygone geschlossen sind. (Die erste Bedingung genügt an und für sich, wenn alle Kräfte in einem Punkte angreifen.)

Es genügt nachzuweisen, daß ein Seilpolygon geschlossen ist; denn daraus folgt, daß alle geschlossen sind. Da a und b im Kräftepolygon zusammenfallen, so sind die beiden Kräfte Oa, bO, denen die gegebenen Kräfte äquivalent sind, gleich und entgegengesetzt. Sie müssen auch in einer Linie liegen, sonst würde die Summe der Momente des Systems nicht um jeden Punkt in der Ebene null sein. Es sind aber verschiedene Paare dieser äquivalenten Kräfte durch die verschiedenen Lagen von O gegeben, und es muß jede Kraft jedes Paares durch die beiden Endpunkte A und B des Seilpolygons hindurch. Folglich fallen A und B zusammen.

Dieses Ergebnis gilt offenbar für jedes mögliche Seilpolygon.

Wenn alle Wirkungslinien der Kräfte durch einen Punkt hindurchgehen, so ist das Polygon der angreifenden Kräfte geschlossen, und dies ist alsdann, wie gesagt, die einzige notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht. Daraus gewinnt man folgendes geometrische Theorem. Wenn das Kräftepolygon gezeichnet wird und von einem beliebigen Punkte O aus Linien nach den Schnittpunkten (12), (23), (34) der Seiten gezogen werden; wenn dann von einem willkürlich gewählten Punkte in der Wirkungslinie etwa der Kraft 1 eine Linie parallel mit O (12) gezogen wird, die die Wirkungslinie von 2 trifft, dann von diesem letzteren Schnittpunkte eine Linie parallel zu O (23) gezogen wird, um die Wirkungslinie von 3 zu treffen u. s. w., so bilden diese Linien ein geschlossenes Polygon.

314. Reziproke Figuren. Das folgende geometrische Theorem gilt tatsächlich für die beiden Arten von Polygonen. Man verbindet die Ecken des in einer Ebene gezeichneten Kräftepolygons (Fig. 171) mit einem beliebigen Punkte O in der Ebene. Dann wird ein zweites geschlossenes Polygon (Fig. 172) gezeichnet, dessen Seiten zu den nach dem Punkte O im ersten gezogenen Linien parallel sind, und es werden Linien, die mit den Seiten des ersten Polygons parallel sind, durch die Ecken des zweiten gezogen; diese Linien treffen sich in einem Punkte O' (Fig. 172). Diese Polygone nennt man reziproke Figuren; die Punkte O, O' heißen ihre Pole.

Jedes Polygon ist ein Kräftepolygon für ein Gleichgewichtssystem

von Kräften längs den von dem Pole des reziproken Polygons gezogenen Linien, dagegen ein Seilpolygon für ein System von Kräften,

Fig. 171.

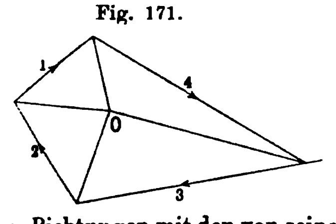
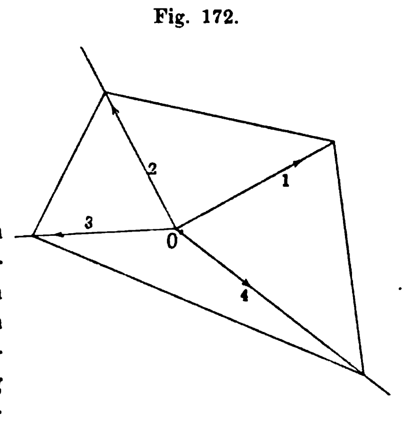


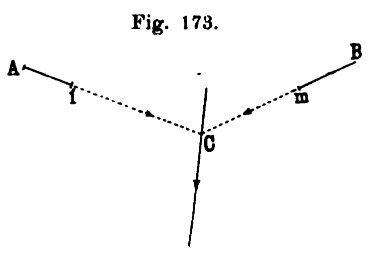
Fig. 172.



deren Richtungen mit den von seinem eigenen Pole gezogenen Linien zusammenfallen und deren Größen durch die Seiten des reziproken dargestellt werden; daher der Ausdruck „reziprok". Die Erörterung von Kräftesystemen mit Hilfe reziproker Diagramme rührt von Maxwell her; man vergleiche seine Abhandlung über „Reciprocal figures, frames and diagrams of forces" (Trans. R. Soc. Edinb. **26**, oder Reprint of papers, II, p. 161).

315. Darstellung eines gegebenen Systems koplanarer Kräfte durch eine einzelne Kraft. Damit die Kräfte in ihrer Wirkung auf einen starren Körper einer einzelnen Kraft äquivalent seien, ist nur erforderlich, daß das Kräftepolygon nicht geschlossen sei. Dann ist nämlich das System, wie wir gesehen haben, mit zwei Kräften äquivalent, wie sie im Kräftepolygon Fig. 166 durch Oa und bO dargestellt sind. Seien nun l und m die Angriffspunkte der Endkräfte des Seilpolygons, und es mögen die beiden Wirkungslinien A l, Bm verlängert werden, bis sie sich in C (Fig. 173) schneiden, dann können sie durch eine einzige durch C gehende Kraft ersetzt werden, was zu beweisen war.

Fig. 173.



Wenn die beiden Kräfte A l, Bm, auf welche sich das System reduziert, parallel sind, läßt die Konstruktion im Stich; es wird das der Fall sein, wenn der Pol O des Kräftepolygons mit den Endpunkten a, b in einer Linie liegt. Man muß dann eben einfach einen anderen, nicht so gelegenen Pol wählen.

Wenn das Kräftepolygon geschlossen ist, wird die Einzelkraft null. Wenn eins der Seilpolygone nicht geschlossen ist, ist keines geschlossen, und die Summe der Momente der Kräfte um irgend einen Punkt in der Ebene ist nicht null. Die Kräfte reduzieren sich auf zwei gleiche und

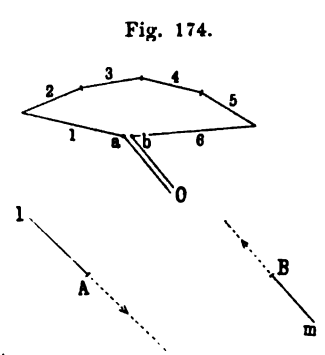


Fig. 174.

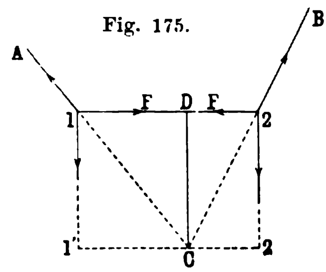
entgegengesetzte Kräfte Oa, bO im Kräftepolygon (man sehe die beiden dicht benachbarten Linien in Fig. 174), bezw. auf die parallelen Kräfte $A1$, Bm des Seilpolygons. Somit bilden diese beiden Kräfte ein Paar, dessen Moment gleich dem Produkte der Kraft in ihren Abstand ist. Da das Kräftepolygon geschlossen ist, gilt das Ergebnis für jede Lage von O und jedes entsprechende Seilpolygon; man findet zwar jedesmal andere Paare von Kräften, aber Größe und Richtung des Moments ist immer dieselbe.

316. Parallele angreifende Kräfte. Wenn die angreifenden Kräfte parallel sind, reduziert sich das Kräftepolygon, wie gesagt, auf eine gerade Linie, und die Richtungslinien der verschiedenen Kräfte können ganz oder teilweise zusammenfallen, wenn sie auch eventuell entgegengesetzten Richtungssinn haben. Wenn das System z. B. die Resultante null hat, läßt sich das Polygon immer noch als geschlossen ansehen, d. h. die Endpunkte a, b fallen noch zusammen; die gerade Linie stellt gewissermaßen die in eine Linie zusammengebrachten verschiedenen Polygonteile dar.

Wenn die Seilpolygone nicht geschlossen sind, reduzieren sich die Kräfte auf eine einzelne, mit ihnen parallele Kraft. In dem Kräftesystem z. B., das in Fig. 167 dargestellt ist, wird das Kräftepolygon durch die Linie a 1, 2, 3, 4, 5b der Fig. 168 repräsentiert, ihre Resultante durch ba; um ihre Wirkungslinie zu finden, braucht man nur ein einziges, irgend einem Pole O des Kräftepolygons entsprechendes Seilpolygon zu zeichnen; man erhält dann zwei Kräfte $A1$, $B5$ (Fig. 167), die sich in C schneiden und den gegebenen Kräften äquivalent sind; die Linie durch C ist die Richtung der Resultante.

317. Graphisches Verfahren zur Auffindung der Resultante von Parallelkräften. Wir können nunmehr die Regel angeben, um die Resultante von zwei Parallelkräften zu finden. In Fig. 175 seien $11'$, $22'$ die beiden gegebenen Kräfte; man zeichne das Kräftepolygon, wähle einen Pol und zeichne das entsprechende Seilpolygon, ganz wie angegeben. Zwei Kräfte in den Richtungen $A1$, $B2$ sind den gegebenen äquivalent; sie sind aber anderseits die Resultanten

Fig. 175.



von $11'$ und F bezw. $22'$ und F, wo die beiden F in 1 bezw. 2 angreifen, wie die Figur zeigt. Nun verlängere man $A1$ und $B2$ bis zu ihrem

Schnittpunkte C und ziehe durch C eine Linie $1'2'$ parallel mit $1\,2$ und eine Linie parallel mit den gegebenen Kräften, welche letztere die Linie $1\,2$ in D treffe. Dann stellt in dem Dreiecke $1\,D\,C$ die Seite $1\,D$ die Kraft F, die Seite $D\,C$ die Kraft $1\,1'$ dar, ebenso im Dreieck $2\,D\,C$ die Seite $D\,2$ die andere Kraft F, die Seite $D\,C$ die Kraft $2\,2'$. Man hat also die beiden Porportionen:

$$1\,D : DC = F : 1\,1'$$
$$D\,2 : DC = F : 2\,2'$$

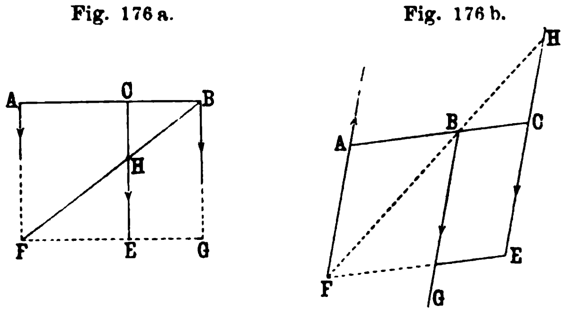
und folglich:

$$1\,D : D\,2 = 2\,2' : 1\,1',$$

die bekannte Beziehung für zwei auf einen starren Körper wirkende Parallelkräfte.

Umgekehrt ist es offenbar möglich, eine einzelne Kraft durch zwei Kräfte zu ersetzen, die in gegebenen, zur gegebenen Kraft parallelen Linien wirken. Denn es wirke die gegebene Kraft in C und sei nach Richtung und Größe gleich CE, und A, B seien Punkte in den gegebenen Linien. Man ziehe durch E eine Parallele zu AB, welche die gegebenen Linien in F und G schneidet; man ziehe dann BF, welches

Fig. 176 a. Fig. 176 b.



CE in H schneidet, so sind CH und HE die in AF und Bg wirkenden Ersatzkräfte. Die beiden möglichen Fälle sind durch Fig. 176 a und b dargestellt.

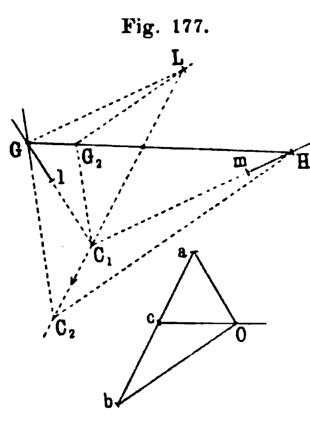
318. Ort des Pols eines Seilpolygons, wenn die Endkräfte durch feste Punkte gehen. Im allgemeinen kann, wie wir sahen, die Lage von O willkürlich gewählt werden, und für jede dieser Lagen gibt es ein Seilpolygon. Das hört aber auf, wenn den Endkräften Bedingungen auferlegt sind, wenn sie z. B. durch zwei feste Punkte G, H gehen sollen.

Es ist einleuchtend, daß, wenn der Pol des Seilpolygons verschoben wird, der Schnittpunkt irgend zweier Seiten desselben sich auf einer geraden Linie bewegt. Denn in Fig. 177 (a. f. S.) seien 1, m Punkte auf zweien der angreifenden Kräfte, von denen aus die Seiten $1\,A$, $m\,B$ eines Seilpolygons gezogen werden; dann sind, wie wir sahen, Kräfte in diesen Linien im Sinne $A\,1$, $B\,m$ und vom Betrage $O\,a$, $b\,O$ äquivalent den

zwischen 1 und *m* eingeschlossenen angreifenden Kräften. Folglich wirkt die Resultante im Schnittpunkte C_1 dieser Kräfte, und dieser Schnittpunkt muß, wenn O verschoben wird, immer auf der Linie der durch C gehenden Resultante liegen.

Nunmehr läßt sich zeigen, daß, wenn die Endlinien $A1$, Bm des Seilpolygons, in denen die durch Oa, bO dargestellten Kräfte wirken, durch zwei feste Punkte G, H gehen, der geometrische Ort des Poles O eine mit GH parallele Linie ist. Die Resultante jener Kräfte ist durch ab dargestellt, und der Schnittpunkt der beiden Linien muß auf einer zu ab parallelen Linie liegen; die von ab nach O gezogenen Linien müssen daher den Linien parallel sein, die von den festen Punkten nach den verschiedenen Schnittpunkten C von G_1, Hm auf der Resultantenlinie gezogen sind. C_1, C_2, C_3 seien verschiedene Punkte auf dieser Linie; man verbinde sie mit G und H, ziehe von G eine Linie parallel mit C_1H, welche C_2C_1 in L schneidet; dann können GC_1 und LG als Repräsentanten der Kräfte Oa, bO angesehen werden, und in demselben Maßstabe wird LC_1 die Resultante ab darstellen. Nun ziehe man durch C_1 und L Linien bezw. parallel zu C_2G und C_2H; sie werden sich in einem Punkte G_2 auf GH schneiden; entsprechend führt C_3 zu G_3. Diese Punkte G_2, G_3 u. s. w. sind die Pole des Kräftepolygons, und der Ort von O ist parallel mit GH.

Fig. 177.



Hieran lassen sich noch weitere interessante Betrachtungen knüpfen, für die hier der Raum fehlt.

319. Fachwerke und ihre Steifigkeit. Interessante Anwendungen der graphischen Statik werden uns vielfach in der Physik, besonders bei den elastischen Eigenschaften der Körper, begegnen; für jetzt wollen wir andeutungsweise die Anwendung auf Baukonstruktionen betrachten.

Ein Fachwerk oder Balkenwerk ist eine Anordnung von Balken oder Stäben, die drehbar verbunden sind; da wir nur das ebene Fachwerk (nicht das im Raume) betrachten wollen, stehen die Drehungsaxen in den Gelenken auf der Ebene des Fachwerks senkrecht. Ein Fachwerk wird starr oder steif genannt, wenn, außer infolge der Längenänderung der Balken, keine relative Konfigurationsänderung möglich ist. Auf irgend einen Balken wirken teils Kräfte, die von den anderen Balken auf ihn übertragen werden, teils Kräfte von außerhalb des Systems, von denen wir annehmen, daß sie direkt auf die verbindenden Stifte und erst durch diese auf die Balken wirken; es handelt sich also,

wenn von dem Eigengewichte des Balkens abgesehen wird, um das Gleichgewicht zwischen zwei an den Enden angreifenden resultierenden Kräften; dieselben müssen daher gleich und entgegengesetzt sein, und, wenn der Balken gerade ist, ihm entlang wirken.

Sind die Endkräfte Zugkräfte, so steht der Balken unter Spannung; sind es Druckkräfte, so steht er unter Druck; in der Technik werden diese Fälle durch besondere fachliche Bezeichnungen unterschieden.

Damit ein geschlossenes Fachwerk, in dem die Balken in n Punkten zusammenstoßen, steif sei, ist es erforderlich und hinreichend, daß es aus $2n - 3$ Balken bestehe. (Vorausgesetzt ist dabei, daß kein aus den n Punkten herausgegriffenes Teilsystem überschüssige Balken enthalte.)

320. Anwendung graphischer Methoden zur Bestimmung der Spannungen in den Balken eines Fachwerks. Fig. 178 zeigt ein

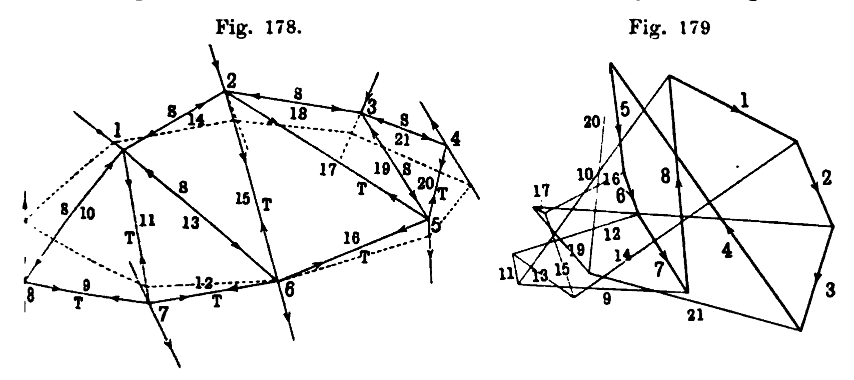
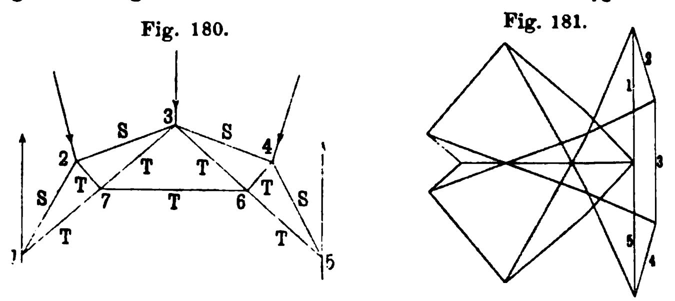


Fig. 178. Fig. 179

aus Balken, die in den Punkten 1, 2... 8 miteinander verbunden sind, bestehendes Fachwerk; die äußeren Kräfte, die in diesen Punkten angreifen, sind durch die äußeren Pfeile dargestellt; das entsprechende Kräftepolygon ist in Fig. 179 gezeichnet. Wir beginnen mit dem Punkte 8 (Fig. 178), in welchem nur drei Kräfte angreifen; ihnen entspricht das Dreieck 8, 9, 10 in Fig. 179. Dann gehen wir zum Punkte 7 über, in dem vier Kräfte angreifen; von dem entsprechenden Kräfteviereck sind die beiden Seiten 7 und 9 bekannt, 7, weil diese Kraft gegeben ist, 9, weil sie gleich und entgegengesetzt der in 8 angreifenden Kraft 9 ist; die beiden anderen Seiten sind den Stäben 11 und 12 parallel; man hat also das Viereck 7, 9, 11, 12. Im Punkte 1, den wir nun betrachten, stoßen fünf Kräfte zusammen, man erhält also in Fig. 179 ein Fünfeck, von dem die drei Seiten 1, 10, 11 bekannt, die beiden letzten 13, 14 den entsprechenden Balken parallel sind; so geht das fort. In der Fig. 178 sind die unter Druck stehenden Balken mit S, die unter Zug stehenden mit T bezeichnet.

321. Erstes Beispiel: Dachstuhl. An der Hand der Fig. 180 u. Fig. 181 mag der Leser die einzelnen Kräfte und Polygone durch-

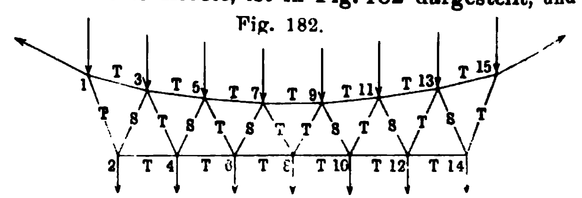
Fig. 180. Fig. 181.



gehen und nachweisen, daß die mit S bezeichneten Balken unter Druck, die mit T bezeichneten unter Zug stehen.

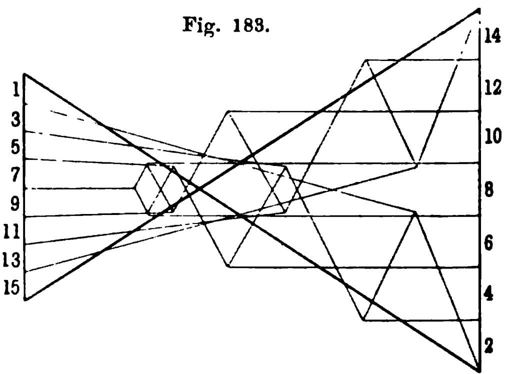
322. Zweites Beispiel: Brückentragwerk. Ein solches, mit zwei Reihen vertikaler Kräfte, ist in Fig. 182 dargestellt, und Fig. 183

Fig. 182.



veranschaulicht das Kräftepolygon; S und T haben wieder die frühere Bedeutung.

Fig. 183.



Für eingehendere Beschäftigung mit den Lehren der Graphostatik, die in der modernen Technik wegen ihrer Anschaulichkeit und Bequemlichkeit sehr stark benutzt wird, sei auf einige Lehrbücher verwiesen:

Culman: Die graphische Statik.

Lévy: La statique graphique et ses applications.

Bauschinger: Elemente d. gr. Statik.

Föppl, Vorles. über techn. Mechanik, 2.

Achtes Kapitel.

Gleichgewicht und Bewegung einer Kette oder einer biegsamen Schnur.

323. Ideale, biegsame Kette. Das Seilpolygon legt den Gedanken nahe, das Gleichgewicht eines Systems kleiner Massenteilchen zu betrachten, die durch masselose Verbindungsstücke derart miteinander verknüpft sind, daß sie eine vollkommen biegsame Reihe bilden; durch Steigerung der Zahl der Teilchen und Verminderung ihres gegenseitigen Abstandes gelangt man zu dem Endbegriff einer biegsamen Schnur oder einer Kette.

Fig. 184.

Eine Kette von großer Biegsamkeit und beträchtlicher Masse für die Längeneinheit wird für gewisse, keine große Festigkeit erfordernde Fälle in der Weise hergestellt, daß kleine Hohlkugeln aus Metall durch kurze Glieder aus dünnem Draht miteinander verbunden werden, wie in Fig. 184 angedeutet ist; jedes solche Glied ist etwa hantelförmig mit zwei Knoten an den Enden, welche in Löcher der Kugeln eingelassen sind. Man hat damit eine annähernde Versinnbildlichung einer idealen Kette; andere wird der Leser selbst kennen oder sich vorzustellen vermögen.

Zunächst wollen wir annehmen, daß auf die Teilchen die Schwerkraft wirke; alsdann werden wir zu beliebigen Kräften übergehen.

324. Kette unter der Wirkung der Schwerkraft: Kettenlinie. Es mögen sich n Teilchen vom gleichen Gewichte w und getrennt durch Zwischenglieder von der Länge a unter der Wirkung der Schwerkraft befinden. Dann hat man, nach Gl. (17) des § 301:

$$w = \tau\,(tg\,\theta_2 - tg\,\theta_1) = \tau(tg\,\theta_3 - tg\,\theta_2) = \ldots = \tau\,(tg\,\theta_{n+1} - tg\,\theta_n),$$

wo τ die horizontale Komponente der dehnenden Kraft in jedem Gliede und die θ die Neigungen der Glieder gegen die Horizontale sind.

Nun betrachte man die Kurve, welche die Mittelpunkte aller Glieder berührt, und es werde angenommen, daß es ein horizontales Glied gebe, das dann also die horizontale Tangente an die gedachte Kurve ist. Die soeben hingeschriebenen Gleichungen besagen dann, daß die Tangente der Neigung der Kurve gegen die Horizontale variiert, wie der Abstand jedes Berührungspunktes von einem als Ausgangspunkt gewählten Berührungspunkte, in welchem $tg\,\theta = 0$ ist — dieser Abstand gemessen längs des Polygons. Bezeichnet man die Größe $a\tau/w$ mit c, die längs des Polygons gemessene Entfernung von der Mitte des horizontalen Gliedes, also offenbar vom tiefsten Punkte der Kurve, mit s, so kann man die eben erwähnte Beziehung in der Form

$$tg\,\theta = \frac{s}{c} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

schreiben.

Nun bestehe die Kette aus einer sehr großen Zahl von Gliedern in sehr kleinen Abständen; dann fällt das Polygon nahezu mit der Kurve zusammen, und diese Annäherung kann beliebig weit geführt werden. Die Gl. (1) kann daher auf jeden Punkt der Kurve angewandt werden und läßt sich in der Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

schreiben, wo dy/dx der Zuwachsgrad der vertikalen Koordinate y mit der Zunahme der horizontalen Koordinate x (horizontaler Abstand vom tiefsten Punkte) ist.

Ferner sei ds ein Längenelement der Kurve, seine Komponenten sind dann dx und dy, und es ist

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Mit Rücksicht auf Gl. (2) wird also

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s}{\sqrt{s^2 + c^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

und ganz entsprechend

$$\frac{dx}{ds} = \frac{c}{\sqrt{s^2 + c^2}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

die Wurzel ist dabei überall mit positivem Vorzeichen zu nehmen.

Integriert man nun die Gl. (5), so erhält man, wie man durch Rückwärtsdifferenzieren verifizieren kann:

$$x = c \log\left[s + \sqrt{s^2 + c^2}\right] + C, \quad \ldots \quad (6)$$

wo C eine Konstante ist; sie muß, da für $x = 0$ auch $s = 0$ gerechnet wird, gleich $-c \log c$ sein, und folglich wird

$$x = c \log \frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c}.$$

Diese Gleichung kann man auch in der Form

$$e^{\frac{x}{c}} = \frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c}$$

schreiben, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Erweitert man den Bruch rechterhand mit $\left[- s + \sqrt{s^2 + c^2}\right]$ und nimmt dann beiderseits das Reziproke, so findet man

$$e^{-\frac{x}{c}} = \frac{- s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c}$$

und durch Subtraktion der letzten Gleichung von der vorletzten

$$s = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Dies ist die Bogenelementgleichung der Kurve, in der die Teilchen herabhängen, die also z. B. eine Kette unter Einfluß der Schwerkraft annimmt; sie heißt deshalb Kettenlinie. Um ihre Gleichung in x und y zu finden, muß man, da nach (2) und (7)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

ist, nochmals integrieren und erhält

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) + C' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

wo C' eine neue Konstante ist. Legt man den Anfangspunkt der Koordinaten in den tiefsten Punkt, d. h. rechnet man nicht nur x, sondern auch y von diesem aus, so ist $y = 0$ für $x = 0$, also $C' = -c$, und

$$y + c = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Einfacher wird die Gleichung jedoch, wenn man den Anfangspunkt um c tiefer als den tiefsten Punkt der Kurve legt; dann wird nämlich

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Wir wollen im folgenden stets diese letztere Wahl treffen und daher die Gl. (11) benutzen.

Da nach Gl. (7) und (11) $y^2 = s^2 + c^2$ ist, kann man die Gl. (4) und (5) auch so schreiben:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s}{y}, \quad \frac{dx}{ds} = \frac{c}{y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Die erörterten Verhältnisse sind in Fig. 185 dargestellt. Dieselbe zeigt die Kettenlinie KK' (über welche Punkte sie sich aber endlos hinaus erstreckt) mit ihrem tiefsten Punkte A, die Abscissenaxe XOX und die Tangente PT in einem beliebigen Punkte P, deren Länge gleich dem Bogen AP genommen ist. T ist also ein Punkt in der vom tiefsten Punkte A der Kettenlinie ausgehenden Evolvente derselben. Die Ordinate in P trifft die Abscissenaxe in M, TR ist das von T auf PM gefällte Lot. Dann hat man

$$\frac{dy}{ds} = \sin PTR = \cos TPR;$$

dies ist aber seinerseits gleich s/y, also PT/PM; folglich ist PTM ein rechter Winkel, und die in T an die Evolvente gezogene Tangente trifft die Abscisse in dem nämlichen Punkte M.

Ferner ist

$$\frac{dx}{ds} = \cos PTR = \sin TPR = \frac{TM}{PM} = \frac{TM}{y},$$

eben weil PTM ein rechter Winkel ist. Vergleicht man dies mit der zweiten der Gl. (12), so sieht man, daß $TM = c$ ist, d. h. der Be-

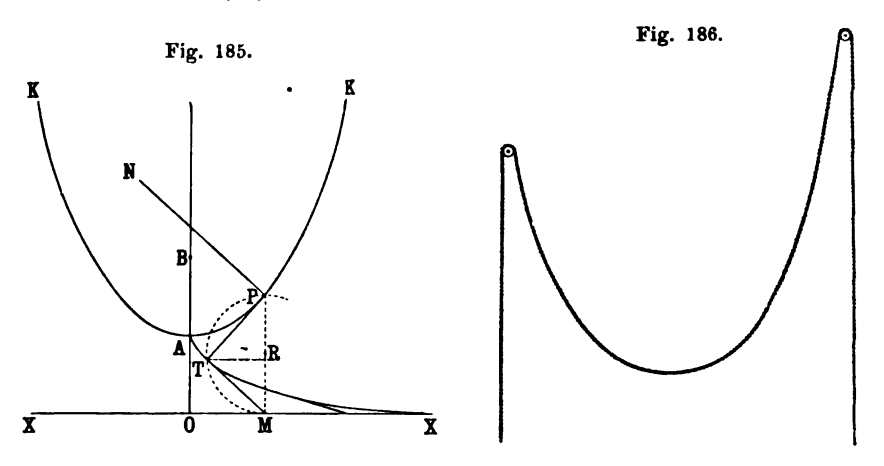


Fig. 185. Fig. 186.

rührungspunkt T einer Tangente an die vom tiefsten Punkte einer Kettenlinie ausgehende Evolvente hat einen konstanten Abstand vom Schnittpunkt dieser Tangente mit einer festen, geraden Linie in der Ebene der Kurve. Die Kurve, welche diese Eigenschaft hat, heißt Traktorie.

Auf diese Weise erhält man eine einfache Regel zum Ziehen einer Normale und einer Tangente in irgend einem Punkte P einer Kettenlinie, und zugleich zum Auffinden des entsprechenden Punktes auf der

Evolvente, von dem soeben die Rede war. Man ziehe durch den gegebenen Punkt P die Ordinate PM, beschreibe über PM als Durchmesser einen Kreis, lege in diesen eine Linie $MT = c$ (gegebene Konstante der Kettenlinie) als Sehne und ziehe die Linie PT. Dann ist PT die Tangente an die Kettenlinie in P, die darauf senkrechte Linie PN ist die Normale, und T ist der „korrespondierende" Punkt der Evolvente; man kann natürlich auf diese Weise schließlich die zur gegebenen Kettenlinie gehörige Traktorie konstruieren.

Zum Vergleich mit der theoretischen ist in Fig. 186 eine von einer Kette wirklich gebildete Kettenlinie photographisch wiedergegeben; sie unterscheidet sich von jener durch die im endlichen gelegenen Enden und die daselbst auftretenden, von den Aufhängungen herrührenden Umbiegungen.

325. Geometrische Beschreibung der Kettenlinie. Die Kettenlinie kann in der im § 105 erläuterten Weise nach der Methode der um die Krümmungsmittelpunkte beschriebenen successiven kleinen Kreisbögen aufgebaut werden. Der Krümmungsradius kann folgendermaßen gefunden werden. Aus Gl. (1) folgt durch Differentiation

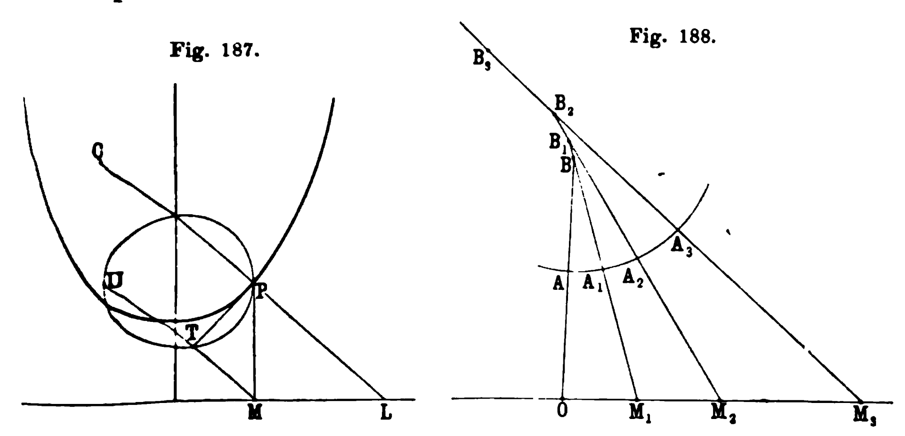
$$(1 + tg^2\,\theta)\,d\theta = \frac{ds}{c},$$

und hieraus für den Krümmungsradius R

$$R = \frac{ds}{d\theta} = c\,(1 + tg^2\,\theta) = \frac{y^2}{c}.$$

Um also für irgend einen Punkt P der Kettenlinie den Krümmungsmittelpunkt zu finden, beschreibe man einen Kreis, welcher durch T

Fig. 187. Fig. 188.



(Fig. 187) geht und die Linie PM in P berührt; schneidet dieser Kreis die Verlängerung von MT in U, so ist $MU = R$; und wenn man daher MU von P ab auf der Normalen abträgt, so ist der Endpunkt C

dieser Strecke der Krümmungsmittelpunkt. — Oder, noch einfacher, man verlängere die äußere Normale in P bis zum Schnittpunkte L mit der Abscissenaxe, dann ist PL geradezu gleich R; denn die Dreiecke LPM und PMT sind ähnlich und MT ist gleich c; folglich ist:

$$LP : y = y : c, \quad \text{d. h. } LP = \frac{y^2}{c}.$$

Um z. B. eine Kettenlinie zu konstruieren, für welche der Wert des Parameters c und der tiefste Punkt A gegeben sind, kann man folgendermaßen zu Werke gehen. Um die Strecke c tiefer als A liegt der Anfangspunkt O der Koordinaten; dann verlängert man OA um sich selbst bis B, Fig. 188 (a. v. S.); um B als Mittelpunkt beschreibt man einen kleinen Kreisbogen AA_1 durch A und verlängert BA_1 bis zum Schnitt M_1 mit der Abscissenaxe. Nun verlängert man M_1A_1 um sich selbst bis B_1, schlägt um B_1 einen kleinen Kreisbogen A_1A_2, zieht $B_1A_2M_2$ und fährt in derselben Weise fort, dann bilden die Punkte $AA_1A_2 \ldots$ (und die entsprechenden links) die gesuchte Kettenlinie.

Natürlich kann man die Kettenlinie auch konstruieren, indem man gemäß ihrer Gleichung die den einzelnen Abscissen entsprechenden Ordinaten auf Millimeterpapier einträgt.

326. Streckende Kraft in der Kettenlinie. Die streckende Kraft T in irgend einem Punkte der Kette läßt sich leicht angeben. Nennt man, wie in § 301 und 324, die Horizontalkomponente der Spannung τ, so ist

$$T = \tau \frac{ds}{dx}$$

und folglich mit Hilfe der Beziehung $w/a\tau = 1/c$ (vergl. die Definitionen zu Anfang von § 324), sowie der Gl. (12):

$$T = \tau \frac{y}{c} = \frac{w}{a} y \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

dabei ist w das Gewicht der Strecke a der Kette, also w/a das Gewicht der Längeneinheit der Kette. Man hat also das Resultat, daß die Spannung in einem Punkte der Kette gleich dem Gewichte eines Stückes derselben ist, dessen Länge gleich der Höhe des betreffenden Punktes über der Abscissenaxe ist. Im tiefsten Punkte ist hiernach die Spannung am kleinsten; je höher hinauf der Punkt liegt, desto größer ist sie.

Ist die Kette, wie in Fig. 186, an den Enden nicht fest, sondern lose über Rollen gelegt, so reichen die senkrecht herabhängenden Enden demnach gerade bis zur Abscissenaxe herab.

327. Allgemeine Theorie des Gleichgewichts einer biegsamen Schnur oder Kette. Die Auffassung einer Kette als einer Folge kleiner, durch kurze, biegsame Glieder verbundener Massenteilchen setzt uns in den Stand, die allgemeinen Gleichgewichtsbedin-

gungen ohne weiteres hinzuschreiben. Die Kraft, die auf ein Teilchen von der Masse μ im Punkte P (x, y, z) wirkt, habe die Komponenten μX, μY, μZ; s sei der längs der Kette gemessene Abstand von einem festen Punkte P_0, ds der Abstand zwischen zwei benachbarten Teilchen; T bezw. $T + \delta T$ seien die Spannungen in dem vor bezw. hinter P liegenden Gliede, vor und hinter im Sinne wachsenden s verstanden. Dann kommt man leicht zu folgenden Ergebnissen:

a) Die nach der Richtung der beiden in P zusammenstoßenden Glieder genommene Komponente der äußeren Kräfte muß die Differenzen der Spannungen in den Gliedern, also δT, gerade äquilibrieren; ist also jene Komponente μS, so hat man

$$\mu S + dT = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (14)$$

Ist $S = 0$, so sind also die Spannungen in den beiden Gliedern die gleichen.

b) Alle Kräfte liegen in der Ebene der Kette bezw. in ihrer Schmiegungsebene; senkrecht zu ihr sind alle Komponenten null.

c) Wie in § 205, so kann auch hier bewiesen werden, daß die Normalkomponente N der angreifenden Kräfte in jedem Punkte gleich dem Produkte der dort herrschenden Spannung und der Krümmung daselbst ist; in Formel, wenn R der Krümmungsradius ist und N positiv gerechnet wird von der konvexen nach der konkaven Seite der Kurve:

$$-N = \frac{T}{R} \quad \dots\dots\dots \quad (15)$$

328. Analytische Gleichgewichtsbedingungen. Diese Sätze können in folgender Weise mathematisch formuliert werden. Die Richtungskosinus des vor P liegenden Gliedes sind

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

die des hinter P liegenden Gliedes sind

$$\frac{dx}{ds} + \delta\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} + \delta\frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} + \delta\frac{dz}{ds};$$

die Komponenten von T nach den Koordinatenaxen sind daher

$$T\frac{dx}{ds}, \quad T\frac{dy}{ds}, \quad T\frac{dz}{ds},$$

diejenigen von $T + \delta T$ sind entsprechend

$$(T + \delta T)\left(\frac{dx}{ds} + \delta\frac{dx}{ds}\right), \text{ u. s. w.};$$

folglich ist für das Gleichgewicht

$$\mu X + (T + \delta T)\left(\frac{dx}{ds} + \delta\frac{dx}{ds}\right) - T\frac{dx}{ds} = 0, \text{ u. s. w.}$$

oder, wenn σ die Masse der Längeneinheit der Kette, also $\mu = \sigma ds$ ist und höhere Grade kleiner Größen vernachlässigt werden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + \sigma X = 0 \\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + \sigma Y = 0 \\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + \sigma Z = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Diese drei Gleichungen sind mit den Gl. (14) und (15) äquivalent; es bleibe dem Leser überlassen, die einen aus den anderen abzuleiten, an Stelle von (14) kann man übrigens auch

$$\sigma S + \frac{dT}{ds} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

schreiben.

Haben die Kräfte X, Y, Z ein Potential, d. h. lassen sie sich aus einer Funktion der Koordinaten durch die Operation

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

ableiten, so nehmen die Gleichgewichtsgleichungen die Form

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) - \sigma\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \text{ u. s. w.} \quad \ldots \quad (18)$$

an, und die Gl. (17) wird:

$$\frac{dT}{ds} - \sigma\frac{dV}{ds} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Ferner wurde in § 55 gezeigt, daß, wenn ϱ die Strecke vom Anfangspunkte der Koordinaten nach einem Kurvenpunkte ist, $d\varrho : ds$ eine Einheitsstrecke längs der Tangente, $Rd^2\varrho/ds^2$ dagegen, wo R der Krümmungsradius ist, eine Einheitsstrecke senkrecht zur Tangente, aber in der Schmiegungsebene der Kurve ist. Sind also dx, dy, dz die Projektionen von ds auf die Axen und i, j, k Einheitsstrecken parallel den drei Axen, so ist, symbolisch geschrieben:

$$\begin{aligned} d\varrho &= i\,dx + j\,dy + k\,dz \\ \frac{d\varrho}{ds} &= i\frac{dx}{ds} + j\frac{dy}{ds} + k\frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2\varrho}{ds^2} &= i\frac{d^2x}{ds^2} + j\frac{d^2y}{ds^2} + k\frac{d^2z}{ds^2}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung stellt also links eine Strecke auf dem Krümmungsradius und rechts, in den Faktoren von i, j, k, deren Projektionen auf die Axen dar.

Somit sind die Richtungskosinus des Krümmungsradius

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2} \text{ bezw. } \frac{d^2y}{ds^2} \text{ bezw. } \frac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

und, da $R\,d^2\varrho/ds^2$ eine Einheitsstrecke ist,

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Bezeichnet man die Richtungskosinus der Normale mit λ, μ, ν, multipliziert die erste der Gl. (16) mit λ, die zweite mit μ, die dritte mit ν, addiert alle drei und beachtet, daß

$$\lambda \frac{dx}{ds} + \mu \frac{dy}{ds} + \nu \frac{dz}{ds} = 0$$

ist, weil Kurve und Krümmungsradius aufeinander senkrecht stehen, so erhält man

$$\frac{T}{R} + \sigma\,(\lambda X + \mu Y + \nu Z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Diese Gleichung ist, wie man leicht einsieht, mit Gl. (15) identisch; der Satz c) des § 327 ist also bewiesen.

Es mag dem Leser überlassen bleiben, durch Einsetzen von $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$ in Gl. (16) die gewöhnliche Kettenlinie (unter ausschließlicher Wirkung der Schwere) abzuleiten; ferner die Gleichung der Kurve zu finden, in welcher eine Kette herabhängt, deren Masse pro Längeneinheit nicht überall dieselbe, sondern der Spannung an der betreffenden Stelle proportional ist — eine Kurve, welche als Kettenlinie von gleichförmiger Festigkeit bezeichnet werden kann. Zwischen dem Bogen s vom tiefsten Punkte und dem Krümmungsradius besteht bei dieser Kurve die Beziehung

$$\varrho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{c}} + e^{-\frac{s}{c}}\right).$$

329. Analogie zwischen dem Gleichgewichte einer Schnur und der krummlinigen Bewegung eines Teilchens. Das Gleichgewicht einer Kette weist eine merkwürdige Analogie mit der Bewegung eines äußeren Kräften unterliegenden Teilchens auf einer Kurve auf, derart, daß man Lösungen von Problemen der einen Art auf die der anderen und umgekehrt übertragen kann. Um die Natur dieser Analogie einzusehen, wollen wir uns ein Teilchen vorstellen, das sich auf der Kettenlinie derart bewegt, daß der Zahlenwert seiner Geschwindigkeit überall gleich der Spannung T ist. An Stelle von (17) erhält man dann:

$$\frac{d\frac{ds}{dt}}{ds} + \sigma S = 0$$

oder

$$\frac{ds}{dt}\frac{d\frac{ds}{dt}}{ds} + \sigma S T = 0$$

oder, da das erste Glied gleich $\ddot{s}$ ist:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \sigma S T = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

eine Gleichung, welche die Beschleunigung eines Teilchens von der Masse eins in der Bewegungsrichtung unter der Wirkung einer Kraft vom Betrage $-\sigma S T$ darstellt.

In entsprechender Weise liefert Gl. (15) oder (21):

$$\frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\sigma N T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

als Beschleunigung senkrecht zur Bahn; die entsprechende Kraft ist hier $-\sigma N T$. Die Bewegung des Teilchens ist also durch das Produkt von T in die Tangential- bezw. Normalkomponente der auf die Masseneinheit der Kette wirkenden Kräfte, nämlich S bezw. N, gegeben.

Dasselbe Resultat ergibt sich natürlich auch aus den Gl. (16), welche zu

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \sigma T X = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \sigma T Y = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + \sigma T Z = 0 \quad . \quad . \quad (24)$$

werden; jede dieser Gleichungen ist von derselben Form wie (22), alle drei zusammen liefern aber auch (23).

Beispielsweise hat ein Teilchen, das unter der Wirkung der Schwere auf einer in vertikaler Ebene gelegenen glatten Kurve herunterfällt, in jedem Punkte seiner Bahn eine Geschwindigkeit, die proportional ist der Quadratwurzel aus der Tiefe des Punktes unter einem gewissen Niveau. In dem besonderen Falle eines freien, von vornherein mit einer horizontalen Geschwindigkeit begabten Teilchens ist die Bahn, wie wir wissen, eine Parabel mit vertikaler Axe und dem Scheitel nach oben; die Geschwindigkeit in jedem Punkte ist dabei dieselbe, welche sie wäre, wenn das Teilchen von der Direktrix der Parabel frei herabfiele.

Demgemäß nimmt eine unter dem Einfluß der Schwere herabhängende Kette die Form einer Parabel mit vertikaler Axe und dem Scheitel nach unten an, wenn die horizontale Spannungskomponente überall dieselbe ist; das wird der Fall sein, wenn $X = 0$ und $\ddot{y} = g$ ist. Dann ist aber $Y = g$ und $\sigma T = 1$. Anderseits ist aber $\dot{s} = T = \sqrt{2gy}$, wo y die Höhe über der Direktrix ist; folglich ist

$\sigma = 1/\sqrt{2gy}$, d. h. die Masse der Längeneinheit muß in den verschiedenen Punkten der Kette mit der Quadratwurzel aus der Höhe des Punktes über der Direktrix umgekehrt proportional sein.

Die Parabelgleichung, auf Direktrix und Axe als Koordinatenaxen für x und y bezogen, lautet: $x^2 = 4a(y-a)$, wo a eine Konstante ist; die Länge ds eines Elementes ist also $dx\sqrt{1 + (x^2/4a^2)}$ oder $dx\sqrt{y/a}$; das mit $ds/\sqrt{y}$ proportionale Gewicht des Elementes ist hiernach proportional mit dx; man kommt also zu dem Resultate, daß das Gewicht irgend eines Parabelbogens der Horizontalprojektion des Bogens proportional ist.

Die besprochene Analogie ist u. a. in Thomson und Taits Handbuch der theoretischen Physik behandelt und durch weitere Beispiele veranschaulicht.

330. Bewegung einer unausdehnbaren Kette; Bedingung der Unausdehnbarkeit. Wir wollen nach dem Gleichgewicht nun auch noch die Bewegung einer unausdehnbaren Schnur oder Kette betrachten. Zunächst ist einleuchtend, daß der Variation der Geschwindigkeit längs der Kette eine Beschränkung auferlegt wird durch den Umstand, daß kein Element der Kette seine Länge ändern darf. Die Geschwindigkeitskomponenten in einem Punkte P der Kette seien $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, die in einem anderen, von P um ds entfernten Punkte Q seien $\dot{x} + d\dot{x}$, $\dot{y} + d\dot{y}$, $\dot{z} + d\dot{z}$. Dann sind die Tangentialgeschwindigkeiten in den beiden Endpunkten von ds:

$$\frac{dx}{dt}\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{dt}\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{dt}\frac{dz}{ds},$$

$$\left(\frac{dx}{dt} + d\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dx}{ds} + d\frac{dx}{ds}\right) + \left(\frac{dy}{dt} + d\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dy}{ds} + d\frac{dy}{ds}\right)$$
$$+ \left(\frac{dz}{dt} + d\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dz}{ds} + d\frac{dz}{ds}\right);$$

zwei Ausdrücke, die, eben wegen jener Bedingung, einander gleich sein müssen; es muß also, wenn Größen zweiter Ordnung vernachlässigt werden,

$$\frac{dx}{ds}\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{d\frac{dz}{dt}}{ds} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

sein. Man hätte dies auch durch Differentiation der Gleichung

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

nach t unter Wahrung der Konstanz von ds ableiten können; differenziert man ohne diese Bedingung, so erhält man die Dehnungsgeschwindigkeit der Schnur, für welche, wie man leicht einsieht, die linke Seite von (25) der formale Ausdruck ist.

Die Gleichung (25) kann man, in Analogie mit anderen Gebieten, die Kontinuitätsgleichung der unausdehnbaren Kette nennen.

331. Bewegungsgleichungen. Um die Bewegungsgleichungen zu erhalten, braucht man nur die Tatsache auszudrücken, daß die Kraftkomponenten, die auf ein Kettenelement wirken [vergl. oben Gl. (16)], jetzt nicht mehr null, sondern gleich den Massenbeschleunigungen des Elementes in den Axenrichtungen sind. Nimmt man, wie in § 328, die x-y-z-Axen fest im Raume und nennt die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten u, v, w, so erhält man demnach die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma\frac{du}{dt} &= \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + \sigma X \\ \sigma\frac{dv}{dt} &= \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + \sigma Y \\ \sigma\frac{dw}{dt} &= \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + \sigma Z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

Diese Gleichungen, in Verbindung mit Gl. (25), setzen uns in den Stand, die Koordinaten x, y, z eines Kettenelementes und die Spannung T durch s und t auszudrücken.

332. Tangential- und Normalauflösung. Bedingungen der Unausdehnbarkeit. Wenn die Bewegung der Kette in einer Ebene stattfindet, ist es angezeigt, die Bewegung auf bewegliche Axen zu beziehen, die tangential und normal zu dem Kettenelement gerichtet sind. Die Kontinuitätsgleichung oder richtiger -gleichungen können aus Gl. (25) abgeleitet oder, was wir vorziehen, direkt entwickelt werden.

Es seien u, v die Geschwindigkeitskomponenten in der Richtung der Tangente nach wachsenden s bezw. nach dem Krümmungsmittelpunkte hin; sie sind mit den u und v vom vorigen Paragraphen nicht zu verwechseln. In einem kurzen Zeitraume dt wird sich das Ende durch eine Strecke $u\,dt$ längs der Tangente in P und durch eine Strecke $v\,dt$ längs der Normale daselbst bewegt haben; in derselben Zeit hat sich das andere Ende Q um $(u+du)dt$ in der Tangente um $(v+dv)dt$ in der Normale durch Q fortbewegt. Nun bringe man beiden Punkten noch außerdem die Verrückungen $u\,dt$ bezw. $v\,dt$ in den den Verrückungen von P entgegengesetzten Richtungen bei. Dann kommt offenbar P in seine unsprüngliche Lage zurück, dagegen wird Q, relativ zu P, die Verrückungen

$$[(u + du)\cos d\alpha - u - (v + dv)\sin d\alpha]\,dt$$

parallel zur Tangente in P, und

$$[(v + dv)\cos d\alpha - v + (u + du)\sin d\alpha]\,dt$$

parallel zur Normale in P aufweisen, wo $d\alpha$ der Winkel zwischen CP und CQ ist (Fig. 189).

Diese Verrückungen dürfen nun aber die Länge von ds nicht geändert haben. Ist also $d\varphi$ der Winkel zwischen den Richtungen des Elementes zu Anfang und Ende der Zeit dt, so ist, wenn $d\alpha$ als so klein angenommen wird, daß $\cos d\alpha = 1$, $\sin d\alpha = d\alpha$ gesetzt werden darf:

Fig. 189.

$$\frac{d\varphi}{2} = \frac{u + du - u - (v + dv)\,d\alpha}{v + dv - v + (u + du)\,d\alpha},$$

und

$$d\varphi = \frac{v + dv - v + (u + du)\,d\alpha}{ds}\,dt.$$

Mit dt wird auch $d\varphi$ so klein, wie man wünscht, im Grenzfalle liefert also die erste Gleichung $du - v\,d\alpha = 0$ oder da, wenn R der Krümmungsradius ist, $d\alpha = ds/R$ ist:

$$\frac{du}{ds} - \frac{v}{R} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

die zweite Gleichung

$$\frac{dv}{ds} + \frac{u}{R} = \omega, \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

wo $\omega = d\varphi/dt$ die Winkelgeschwindigkeit des Elementes in der Bewegungsebene ist.

Da u, v sich auf bewegliche Axen beziehen, so müssen die Beschleunigungen auf die in § 272 erläuterte Art berechnet werden, und die Beschleunigungen in Bezug auf feste Axen in der Richtung der Tangente bezw. der Normale im betrachteten Augenblicke sind $\dot{u} - \omega v$ bezw. $\dot{v} + \omega u$. Die Bewegungsgleichungen sind daher nach § 273:

$$\left.\begin{aligned} \sigma\left(\frac{du}{dt} - \omega v\right) &= \sigma S + \frac{dT}{ds} \\ \sigma\left(\frac{dv}{dt} + \omega u\right) &= \sigma N + \frac{T}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (29)$$

Dabei ist nach § 327 N die Normalkraft in der Richtung nach dem Krümmungsmittelpunkte, und ω hat den in (28) angegebenen Wert.

333. Stationäre Bewegung der Kette. Steifigkeit infolge der Bewegung. Verharren einer Einknickung. Aus obigen Gleichungen kann man sofort einen wichtigen Schluß in Bezug auf die stationäre Bewegung einer Kette ziehen. Sie sei von gleichförmiger linearer Dichte und bewege sich gleichförmig ohne Änderung ihrer Gestalt oder ihrer Lage im Raume. Dann ist $\dot{u} = \dot{v} = 0$ und $v = 0$, ferner nach (28): $\omega/u = 1/R$; folglich werden die Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma S + \frac{dT}{ds} &= 0 \\ -\sigma N + \frac{T - \sigma u^2}{R} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

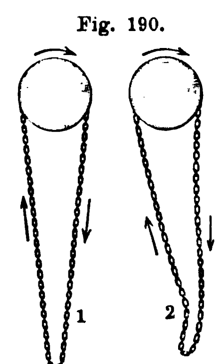
Sonach ist die Kurve, in der sich die Kette bewegt, mit ihrer Gleichgewichtskurve identisch, aber die Spannung ist

$$T = \sigma(RN + u^2),$$

d. h. sie übertrifft den Wert, den sie im Zustande des Gleichgewichtes haben würde, um σu^2. Wird die Kette sehr rasch fortbewegt, so wird T sehr groß gegenüber den äußeren Kräften, die letzteren haben daher nur einen relativ kleinen Einfluß auf die Gestalt der Kette. Es sei z. B. die Kette über eine Rolle gehängt, so daß sie in der Vertikalebene hängt, und sie möge durch Drehung der Rolle in rasche Bewegung versetzt werden. Wird nun ein Schlag mit einem Hammer auf sie ausgeübt, so daß sich ihre Gestalt an der getroffenen Stelle ändert, so wird dieser Knick, trotz der Bewegung der Kette, an derselben Stelle des Raumes verbleiben und nur allmählich unter dem Einfluß der Schwerkraft verschwinden; die bewegte Kette verhält sich dem Hammerschlage gegenüber wie ein ruhender Bleistab. Diese „Quasi-Rigidität“ oder Steifigkeit, die der Kette durch ihre Bewegung verliehen wird, legt den Versuch nahe, die mechanischen Eigenschaften fester Körper als das Resultat der Trägheit eines Systems sich bewegender Teilchen oder gar eines sich bewegenden Fluidums aufzufassen (s. § 336).

334. Das eben geschilderte Experiment ist in Fig. 190 veranschaulicht; sie zeigt die Kette bei 1 sich in ihrer Gleichgewichtskurve bewegend, bei 2 in der durch einen Schlag gestörten Gestalt. Übrigens tut man gut, eine große und tiefrinnige Rolle und eine kräftige Kette zu benutzen; den Schlag führt man am besten in horizontaler Richtung und in der Ebene der Kette aus. Sehr instruktiv ist auch folgender Versuch. Man nimmt eine Rolle von 15 bis 20 cm Durchmesser, mit ziemlich flacher Rinne, ferner eine geschlossene Kette, die nur 5 bis 10 cm länger als der Umfang der Rolle ist, so daß sie an der unteren Seite fast in einem Kreisbogen — in Wahrheit natürlich in einer Kettenlinie — herabhängt. Man versetzt sie durch Drehen der Rolle in rapide Bewegung und schlägt sie nun durch einen leichten seitlichen Stoß von der Rolle herunter, so daß sie auf einen dicht darunter aufgestellten Tisch fällt. Man wird dann sehen, daß sie fortfährt sich zu drehen, und daß sie, während sie eine kleine Strecke weit wie ein Reifen auf dem Tische fortrollt, ihre Gestalt beibehält.

Fig. 190.



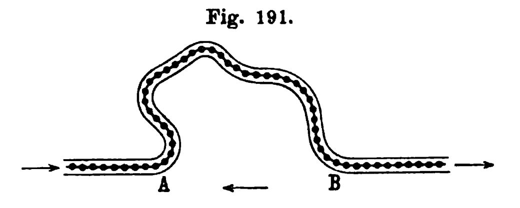
335. Gleichgewichtsfigur der bewegten Kette. Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Knicks beliebiger Form. Die dynamische Erklärung des vorhin festgestellten Resultates liegt in dem Anwachsen der Spannung, welche die äußeren Kräfte in den Hintergrund drängt. Sind gar keine äußeren Kräfte vorhanden, so ist jede Kettenform eine Gleichgewichtslinie und Linie gleichförmiger Bewegung, wobei nach Gl. (30) $T = \sigma u^2$ ist.

Um den Gegenstand noch klarer zu machen, wollen wir eine gleichförmige Kette betrachten, die sich in einer Ebene durch ein glattes Rohr beliebiger Form bewegt, ohne daß andere Kräfte als die Reaktion des Rohres auf sie wirkten. Diese Reaktion ist allenthalben normal zur Bewegungsrichtung und kann die Spannung in der Kette nicht affizieren; die Spannung ist daher, gleichviel wie die Krümmung variieren möge, überall dieselbe, nämlich gleich dem auf die freien Enden ausgeübten Zuge. Dieser Zug T sei nun gleich σu^2, dann ist nach Gl. (30) $N = 0$, es ist gar keine Wechselwirkung zwischen Röhre und Kette. Die Geschwindigkeit der letzteren aber ist durch die Gleichung

$$u = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

gegeben. Die Enden der Röhre seien geradlinig und in einer Linie gelegen, wie in Fig. 191; die Kette trete links ein und rechts aus, und zwar mit der Geschwindigkeit u. Nun erteile man dem ganzen System von Kette und Röhre eine gleichförmige Geschwindigkeit u von rechts nach links, d. h. umgekehrt; die relative Bewegung von Kette und Rohr gegeneinander wird dadurch nicht geändert; der Effekt ist vielmehr der, daß sich hingegen die Ausbiegung AB nach links bewegt. Da die Wechselwirkung zwischen Röhre und Kette nach wie vor null ist, kann man die Röhre ganz weglassen und hat dann das Problem des Fortschreitens einer beliebig geformten Ausbiegung einer freien Kette unter der Wirkung einer streckenden Kraft T. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist, wie wir sehen, gleich $\sqrt{T/\sigma}$, also gleich der von Transversalwellen längs Saiten, jedoch mit dem Unterschiede, daß im letzteren Falle kleine Verrückungen vorausgesetzt sind, während in unserem Falle keine solche Beschränkung vorhanden ist; die Ausbiegung kann beliebig groß sein. Die obige einfache Ableitung scheint zuerst von Thomson und Tait gegeben worden zu sein.

Fig. 191.



336. Quasi-Rigidität einer Röhre infolge Durchströmens einer Flüssigkeit. Dieselbe Art von Starrheit kann einer biegsamen

Röhre verliehen werden, indem man eine Flüssigkeit, z. B. Wasser, durch sie fließen läßt; bei der Bedienung eines Gartenschlauches z. B. kann man diese Beobachtung in sehr deutlicher Weise machen. Ist der Krümmungsradius an einer Stelle R, die Strömungsgeschwindigkeit u und σ die auf die Streckeneinheit entfallende Flüssigkeitsmasse, so ist die nach dem Krümmungsmittelpunkte gerichtete Kraft gleich $\sigma u^2 R$. Diese Kraft findet aber statt, wenn die Spannung $T = \sigma u^2$ ist, da die von T herrührende Normalkomponente allgemein T/R ist. T ist also, wie man sieht, von der Krümmung unabhängig und längs der ganzen Röhre von gleichem Werte.

337. Kette, die unter der Wirkung der Schwerkraft fällt. Als Beispiel der Bewegungsgleichungen wollen wir eine unter dem Einfluß der Schwerkraft in der Weise fallende Kette betrachten, daß jeder Teil von ihr in einer vertikalen Ebene liegt; also etwa eine Kette, die in einer vertikalen Ebene herabhängt und nun plötzlich an einem Ende frei gemacht wird. Es sei φ der Winkel, den die Tangente an die Kette in irgend einem Punkte mit der horizontalen Richtung einschließt. Dann sind die Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\sigma\left(\frac{du}{dt} - wv\right) &= -\sigma g \sin\varphi + \frac{dT}{ds}\\ \sigma\left(\frac{dv}{dt} + wu\right) &= -\sigma g \cos\varphi + \frac{T}{R}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (32)$$

Differenziert man die erste von ihnen nach s, multipliziert die zweite mit $1/R$, d. h. mit $d\varphi/ds$, und subtrahiert dann die zweite von der ersten, so erhält man rechts

$$\frac{d^2T}{ds^2} - \frac{T}{R^2},$$

während sich die linke Seite infolge der kinematischen Beziehungen

$$\frac{du}{ds} = \frac{v}{R}, \qquad \frac{dv}{ds} + \frac{u}{R} = \omega = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds}$$

auf $-\sigma(d\varphi/dt)^2$ reduziert; folglich ergibt sich:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{T}{R^2} - \frac{d^2T}{ds^2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

Hiermit ist die Geschwindigkeit ausgedrückt, mit der jedes Element der Kette seine Richtung ändert.

Im Augenblicke des Loslassens hat die Kette noch keine Bewegung, und folglich genügt die Spannung anfangs der Gleichung (die man auf verschiedenen Wegen auch direkt ableiten kann):

$$\frac{d^2T}{ds^2} - \frac{T}{R^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

und ihr Integral (vergl. § 340) ist:

$$T = -T_0 \frac{e^{\frac{s-l}{R}} - e^{-\frac{s-l}{R}}}{e^{\frac{l}{R}} - e^{-\frac{l}{R}}} \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

wo s von dem Punkte gemessen wird, in welchem $T = T_0$ ist, während $s = l$ der Punkt ist, wo $T = 0$ ist.

338. Methode zur Lösung von Kettenproblemen, mit Beispielen. Zur Ermittelung von T ist es im allgemeinen erforderlich, eine Differentialgleichung aufzulösen und die Integrationskonstanten den gegebenen Umständen anzupassen. Wird z. B. die Kette irgendwo durchgeschnitten, so ist daselbst $T = 0$; ist sie irgendwo befestigt, so ist daselbst die Tangentialkomponente von Geschwindigkeit und Beschleunigung gleich null; soll ein Ende der Kette stets senkrecht zu einer bestimmten Fläche sein, so muß die zur Fläche normale Geschwindigkeitskomponente null sein u. s. w.

Die Gl. (34) läßt sich auf jeden Fall anwenden, in welchem die Spannung in einer gleichförmigen Kette in irgend einem Punkte plötzlich geändert wird, wenn sie z. B. plötzlich frei oder fest gemacht. Die Lösung ergibt sich durch Superposition des ursprünglichen T und eines neuen, die Gl. (34) erfüllenden T', so daß sich T in $T + T'$ verwandelt. Einige Beispiele sind folgende:

1. Eine gleichförmige Kette von der Form eines Kreises vom Radius R liegt auf einer glatten horizontalen Ebene und ist einer abstoßenden Kraft K, vom Mittelpunkte ausgehend, unterworfen; man soll die Änderung der Spannung finden, die eintritt, wenn man die Kette irgendwo durchschneidet.

Die Spannung T in dem Schnittpunkte ist plötzlich gleich null geworden, d. h. es ist plötzlich eine Spannung $T' = -KR$ aufgetreten; in der Winkelentfernung von θ vom Schnittpunkte ist daher wegen

$$s = \theta R, \qquad l = 2\pi R$$

und nach Gl. (34)

$$T' = KR \frac{e^{\theta - 2\pi} - e^{-(\theta - 2\pi)}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}};$$

also im ganzen

$$T + T' = KR\left(1 - \frac{e^{2\pi - \theta} - e^{-(2\pi - \theta)}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}\right),$$

d. h. die Spannung ist im Verhältnis der Klammer zu 1 vermindert.

2. Eine gleichförmige Kette wird mit der konvexen unteren Fläche eines vertikalen Reifens in Kontakt erhalten durch zwei gleiche nach oben gerichtete Kräfte, die an den Enden des horizontalen Durchmessers angreifen und zu dem gedachten Zwecke gerade ausreichen. Man soll die Spannung in der Kette gleich nach Entfernung des Reifens (ohne Änderung der Kräfte) finden.

K sei jede der Kräfte, T die Spannung in Anwesenheit des Reifens, ψ der Winkel zwischen dem Radius nach einem Punkte und der Horizontalen; dann ist nach der ersten der Gl. (32)

$$T = K - \sigma g R \int_0^\psi \cos\psi\, d\psi = K - \sigma g R \sin\psi;$$

speziell im tiefsten Punkte ist also

$$T = K - \sigma g R.$$

Anderseits ist, wenn N die normal innen wirkende Kraft auf die Masseneinheit und N' die Gegenwirkung des Reifens auf die Kette für die Längeneinheit ist, nach der zweiten Gl. (32):

$$-\sigma N = \frac{T}{R} = N' + \sigma g \sin\psi,$$

also mittels der eben gefundenen Beziehung:

$$N' = \frac{T}{R} - \sigma g \sin\psi = \frac{K}{R} - 2\sigma g \sin\psi,$$

und speziell im tiefsten Punkte:

$$N' = \frac{K}{R} - 2\sigma g.$$

Dieses N' im tiefsten Punkte muß aber null sein, da nach Annahme die Kräfte nur eben hinreichen, um die Kette anzudrücken; es ist somit

$$K = 2\sigma g R.$$

Nun werde der Reif entfernt; im nächsten Momente ist noch keine Bewegung vorhanden, und es gelten die Gleichungen:

$$\frac{dT}{ds} = -\sigma g \cos\psi + \sigma \frac{du}{dt}, \qquad \frac{T}{R} = \sigma g \sin\psi + \sigma \frac{dv}{dt}$$

woraus nach Gl. (27) und (28)

$$\frac{d^2T}{ds^2} - \frac{T}{R^2} = 0$$

oder, da $ds = R\,d\psi$ ist:

$$\frac{d^2T}{d\psi^2} - T = 0$$

folgt. Das Integral ist

$$T = Ae^{\psi} + Be^{-\psi},$$

mit der Bedingung, daß $T = K$ für $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ sei; es wird hiernach

$$K = A + B = Ae^{\pi} + Be^{-\pi};$$

und wenn man aus diesen beiden Gleichungen die Konstanten A und B bestimmt und in T einsetzt, erhält man schließlich

$$T = K\,\frac{e^{\psi}(1 - e^{-\pi}) - e^{-\psi}(1 - e^{\pi})}{e^{\pi} - e^{-\pi}},$$

und speziell für den tiefsten Punkt:

$$T = 2K \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}.$$

Die Spannung im tiefsten Punkte hat sich also, wie man leicht ausrechnet, im Verhältnis von

$$4 : (e^{\pi/2} + e^{-\pi/2})$$

verändert.

3. Eine gleichförmige Kette hängt von ihren nahe beieinander befindlichen Enden senkrecht herab; ein Ende wird frei gemacht, man soll die Spannung im Bug finden.

Die Gl. (34) kann hier nicht benutzt werden, weil am Bug $R = 0$ ist (sehr starke Krümmung); man kann aber den Fall direkt lösen. Es ist einleuchtend, daß auf der frei gelassenen Seite der Kette keine Spannung, jeder Teil dieser Seite fällt frei unter der Wirkung der Schwere herab. In der Zeit t hat das freie Ende die Strecke $\frac{1}{2}gt^2$ durchfallen und die Geschwindigkeit $v = gt$ angenommen; der stationäre Teil der Kette ist, wenn $2l$ die ganze Länge bezeichnet, jetzt nicht mehr l, sondern $l + \frac{1}{2}s$, und nimmt im Verhältnis $\frac{1}{2}\dot{s} = \frac{1}{2}v$ mit der Zeit zu. Der Zuwachsgrad der stationären Masse ist demgemäß $\frac{1}{2}\sigma v$, und der Abnahmegrad der Bewegungsgröße im Bug $\frac{1}{2}\sigma v^2 = \frac{1}{2}\sigma g^2 t^2$; dies ist also die Spannung am unteren Ende des sich nicht bewegenden Teiles. Endlich ist der Abnahmegrad der kinetischen Energie im Bug gleich $\frac{1}{4}\sigma g^3 t^3$, und somit die ganze von Beginn bis zur Zeit t erschöpfte Energie

$$E = \frac{1}{4}\sigma g^3 \int t^3 dt = \frac{1}{16}\sigma g^3 t^4.$$

Man sieht leicht ein, daß der Verlust an potentieller Energie in der Zeit t gleich $\sigma g s (l - \frac{1}{4}s)$ und die kinetische Energie des fallenden Teiles gleich $\sigma g s\ (l - \frac{1}{2}s)$ ist, und auf diese Weise kommt man für den Betrag der erschöpften Energie zu demselben Werte wie oben. Dieser Betrag ist, wenn die Kette undehnbar ist, völlig zerstreut.

In ähnlicher Weise kann man noch zahlreiche Fälle von Kettenbewegung behandeln; es muß aber des beschränkten Raumes wegen an den ausgewählten Beispielen genügen.

339. Kette auf einer rauhen Fläche. Reibung eines Seiles auf einem Zylinder. Bisher wurde von der Reibung des Seiles oder der Kette an der Fläche, auf der sie sich vorbeibewegt, abgesehen; sie soll jetzt in Rechnung gezogen werden. Für die Bewegung eines Elementes gelten dann nach (29), wenn von äußeren Kräften von der Art von S abgesehen wird, die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma\left(\frac{du}{dt} - \omega v\right) &= \frac{dT}{ds} - K \\ \sigma\left(\frac{dv}{dt} + \omega u\right) &= \sigma N + N' + \frac{T}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (36)$$

wo N' die Normalkraft und K die Reibung ist, die von der Fläche auf die Längeneinheit ausgeübt werden. Die Kette, eben noch in Ruhe, beginne, sich unter der Wirkung des Tangentialzuges T_0 auf ein Ende zu bewegen; ferner sei auch $N = 0$ und $F = \mu N'$, wo μ eine das Verhältnis zwischen K und N charakterisierende Konstante (Reibungskoeffizient) ist. Dann ist

$$N' = -\frac{T}{R}, \qquad \frac{dT}{ds} = K = -\mu \frac{T}{R}$$

und folglich

$$\frac{dT}{T} = -\mu \frac{ds}{R} \quad \text{. . . . .} \quad (37)$$

Folglich hat man für den Wert von T im Abstande s vom gezogenen Ende

$$\log T = -\mu \int_0^s \frac{ds}{R} \quad \text{. . . . .} \quad (38)$$

Ist die Fläche z. B. ein Kreiszylinder, um den die Kette senkrecht zu den erzeugenden Linien spiralig gewunden ist, so wird

$$T = T_0 \, e^{-\mu \frac{s}{R}} \quad \text{. . . . .} \quad (39)$$

Im Abstande s vom gezogenen Ende wirkt also nur noch der Bruchteil $e^{-\mu s/R}$ des ganzen Zuges, der Rest, also der Bruchteil $1 - e^{-\mu s/R}$ ist durch die Reibung aufgehoben; für jeden Umlauf um den Zylinder ist das Abnahmeverhältnis $e^{-2\pi\mu}$; wenn also z. B. $\mu = 1/5$ ist, so ist nach einem Umlauf die Spannung nur noch 0,285, nach zwei Umgängen nur noch 0,081 ($1/12$), nach vier Umgängen nur noch 0,0066 ($1/150$) des ganzen Wertes. Diese starke Abnahme erlaubt z. B., einen Dampfer durch eine relativ kleine Kraft festzuhalten, indem man das Tau mehrere Male um den am Quai befindlichen Pflock herumschlingt.

340. Impulsive Bewegung einer Kette. Zum Schlusse soll noch die Wirkung eines auf die Enden der Kette ausgeübten Impulses untersucht werden. An Stelle der Gl. (32) treten hier, wo es sich nur um einen momentanen Zug T handelt, die Gleichungen

$$\sigma u = \frac{dT}{ds}, \qquad \sigma v = \frac{T}{R} \quad \text{. . . . . .} \quad (40)$$

die zweite von ihnen kann mit Hilfe von (27) in der Form

$$\sigma \frac{du}{ds} = \frac{T}{R^2}$$

geschrieben werden, und die erste gibt

$$\sigma \frac{du}{ds} + u \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d^2 T}{ds^2}.$$

Eliminiert man nunmehr u aus beiden Gleichungen, so erhält man die Beziehung

$$\frac{d^2 T}{ds^2} - \frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{ds}\frac{dT}{ds} - \frac{T}{R^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

welche angibt, wie sich T längs der Kurve ändert. Übrigens gilt diese Gleichung, wie man leicht einsieht, nicht bloß für ursprünglich ebene, sondern für beliebige Kettenformen.

Wenn σ als Funktion von s bekannt ist, kann die Gleichung leicht gelöst werden, besonders leicht, wenn R konstant ist und außerdem entweder $d\sigma/ds$ proportional mit σ, also $d\sigma/ds = a\sigma$, oder aber $\sigma = const.$ ist. Im ersten Falle ist, wenn $\sigma = \sigma_0$ ist für $s = 0$:

$$\sigma = \sigma_0 e^{as};$$

dies ist der Fall bei einer Kette, deren Masse von einem ihrer Enden aus exponentiell zunimmt, und deren Gestalt (wegen $R = const.$) kreis- oder spiralförmig ist. Im zweiten Falle hat man

$$\frac{d^2 T}{ds^2} - \frac{T}{R^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

und folglich

$$T = C e^{\frac{s}{R}} + C' e^{-\frac{s}{R}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

die Konstanten bestimmen sich, wenn $T = T_0$ für $s = 0$ und $T = 0$ für $s = l$ genommen wird, durch die Gleichungen

$$C = -T_0 \frac{e^{-\frac{l}{R}}}{e^{\frac{l}{R}} - e^{-\frac{l}{R}}}, \qquad C' = T_0 \frac{e^{\frac{l}{R}}}{e^{\frac{l}{R}} - e^{-\frac{l}{R}}};$$

es wird also schließlich

$$T = -T_0 \frac{e^{\frac{s-l}{R}} - e^{-\frac{s-l}{R}}}{e^{\frac{l}{R}} - e^{-\frac{l}{R}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

und speziell für unendlich großes l, weil dann $C = 0$ und $C' = T_0$ wird:

$$T = T_0 e^{\frac{s}{R}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

d. h. die Impulsspannung nimmt auf einer Strecke, die gleich R ist, im Verhältnis e: 1 ab. Dieser Fall läßt sich durch eine Spirale mit konstantem R verwirklichen; er ist schon von Thomson und Tait, wenn auch etwas abweichend, behandelt. Der Fall, wo R eine quadratische Funktion von s ist, findet sich in den gesammelten Abhandlungen von Stokes (1. Bd.) oder in Rouths Dynamik starrer Systeme.

Neuntes Kapitel.

Hydrostatik und Hydrodynamik.

341. Unterscheidung von festen Körpern und Flüssigkeiten. Wir haben bis jetzt die Dynamik eines Systems von Teilen oder eines starren Körpers betrachtet; wir kommen nunmehr zur Betrachtung des Gleichgewichtes und der Bewegung von Flüssigkeiten.

Die aktuelle physikalische Unterscheidung zwischen einem festen Körper und einer Flüssigkeit, oder wenigstens zwischen einem festen Körper und einer tropfbaren Flüssigkeit ist zweifellos eine allgemein verständliche Sache; aber diese Unterscheidung streng in Worte zu fassen, hat seine Schwierigkeiten. Die beste Definition einer Flüssigkeit ist vielleicht die als einer Substanz, die keine Gestaltelastizität besitzt. Wir werden erst in einem späteren Kapitel die Elastizität eingehend behandeln, müssen aber schon hier ein paar Definitionen geben, um die Unterscheidung zwischen einem festen Körper und einer Flüssigkeit verständlich zu machen.

342. Volumen- und Gestaltelastizität. Die Elastizität an sich kann als diejenige Eigenschaft der Materie definiert werden, welche einerseits die Anwendung äußerer Kraft zur Änderung des Volumens oder der Gestalt eines Körpers und die fortgesetzte Anwendung dieser äußeren Kraft zur Aufrechterhaltung der erzielten Änderung notwendig macht, und welche anderseits dem Körper die Rückkehr zum früheren Volumen bezw. Gestalt ermöglicht, wenn die äußere Kraft zu wirken aufhört.

Wenn ein Körper Volumen- oder Gestaltänderung erleidet, so sagt man, daß Spannung in ihm entsteht; die Änderung der relativen Konfiguration seiner inneren Teile ruft Kräfte wach, die sich der Veränderung widersetzen, und die nur von dem Betrage der bewirkten Veränderung abhängig sind.

Diese inneren Kräfte sind es, welche überwunden oder ausgeglichen werden müssen eben durch die äußeren Kräfte, die auf die begrenzende Oberfläche des Körpers einwirken; und deshalb hängen auch die dafür

verlangten äußeren Kräfte einzig von dem Betrage der stattgehabten Volumen- oder Gestaltänderung ab.

343. Zähigkeit oder innere Reibung. Es entwickeln sich indessen in fast allen Körpern außerdem noch Widerstandskräfte gegen Gestaltänderung, die nicht von dem Betrage der stattgehabten Änderung, sondern von der Geschwindigkeit abhängen, mit der die Änderung vor sich geht. Diese Art von Wirkung auf den betreffenden Teil des Körpers ist keine Folge der Elastizität des Körpers. Sie wird in Wahrheit hervorgerufen durch die tangentiale Wirkung zwischen den Teilen des Körpers, die sich immer ihrer relativen Bewegung widersetzt und die Schwingungsbewegung erstickt, indem sie die Bewegungsenergie in Wärme im Inneren der Substanz umsetzt. Solche Kräfte heißen Reibungskräfte oder auch zerstreuende Kräfte, weil sie die Energie zerstreuen; die durch sie dem Körper mitgeteilte Eigenschaft heißt innere Reibung oder Zähigkeit. Die Reibungskräfte haben nichts gemein mit den Kräften, die im Inneren elastischer Körper wachgerufen werden, wenn diese einer Gestalt- oder Volumenänderung unterworfen werden, und die, von dem Betrage der stattgehabten Änderung abhängend, von den angreifenden Kräften ausgeglichen werden müssen, wenn der Körper im veränderten Zustande in einem Gleichgewichtszustande bleiben soll. Diese letzteren Kräfte heißen elastische Kräfte. Es sind Kräfte, die sich in der Umwandlung aufgespeicherter Energie aus einer immer verwendbaren Form in eine andere ebensolche Form betätigen, z. B. bei der Umwandlung aus der Bewegungsenergie eines schwingenden Körpers in die Konfigurations-Änderungsenergie des Körpers im Spannungszustande. Sie haben keine Tendenz zur Energiezerstreuung, obgleich in dem Körper, in dem sie sich entwickeln, gleichzeitig zerstreuende Kräfte im Spiele sein können.

344. Homogenität und Isotropie eines Körpers. Ehe wir uns weiter mit der Behandlung der Volumen- und Gestaltelastizität befassen, gehen wir an die beiden folgenden Definitionen: erstens eines homogenen und zweitens eines isotropen Körpers. Man nennt einen Körper homogen, wenn irgend zwei in ihm gelegene Würfel von gleicher Größe und ähnlicher Lage im Körper (d. h. mit paralleler Kantenstellung) entsprechende Eigenschaften zeigen, d. h. wenn Eigenschaften, die sich auf irgend eine der drei Kantenrichtungen beziehen, in ihnen identisch sind. Dagegen brauchen bei einem und demselben Würfel, die auf eine Kantenrichtung bezüglichen Eigenschaften nicht dieselben zu sein, wie die entsprechenden Eigenschaften in Bezug auf eine andere Kantenrichtung desselben Würfels; wenn nur die Eigenschaften eines Würfels in Bezug auf eine bestimmte Richtung in dem Körper dieselben für alle Würfel sind, und wenn dies für die anderen Richtungen, jede für sich betrachtet, ebenfalls gilt, ist der Körper homogen.

Anderseits heißt ein Körper isotrop, wenn seine Eigenschaften für einen und denselben Würfel in ihm (und zwar für jeden solchen Würfel) nach allen drei Kantenrichtungen gleich sind, während sie von Würfel zu Würfel sich ändern können.

Kurz gesagt: Ein Körper ist homogen, wenn seine Eigenschaften vom Orte in ihm, er ist isotrop, wenn sie von der Richtung in ihm unabhängig sind; sind sie dieselben für alle seine Punkte und alle Richtungen, so ist der Körper nicht nur homogen, sondern auch isotrop; man nennt ihn dann einen homogenen isotropen Körper.

Man nennt einen Körper homogen oder isotrop im besonderen Hinblick auf seine elastischen Eigenschaften, wenn es gerade diese sind, auf welche hin er geprüft worden ist. Zuweilen sind Körper, die in bezug auf eine Gruppe von physikalischen Eigenschaften isotrop sind, dies auch in bezug auf andere, aber häufig ist dies nicht der Fall. Z. B. ist ein Schwefelkrystall nicht isotrop mit Bezug auf seine elektrischen Eigenschaften, ist es aber sehr annähernd in seinen magnetischen Eigenschaften; ferner sind ganze Klassen von Körpern optisch isotrop, während sie es im übrigen nicht sind.

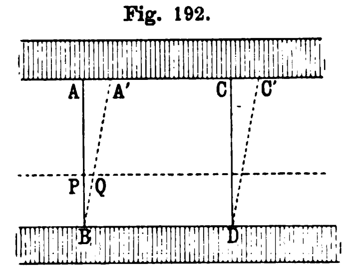
345. Elastizität eines isotropen Körpers. Viele Körper, die häufig in der Natur vorkommen, können als nahezu isotrop im Hinblick auf ihr elastisches Verhalten angesehen werden; in diesem Falle haben wir es nur mit zwei Arten von Elastizität zu tun, nämlich 1. Volumenelastizität, 2. Gestaltelastizität. Volumenänderung ohne Gestaltänderung kann man sich leicht vorstellen. Man nehme eine materielle Kugel und tauche sie in das Wasser im Zylinder einer hydraulischen Presse; es wird auf die ganze Kugeloberfläche ein gleicher Druck nach dem Mittelpunkte zu ausgeübt werden. Ist die Kugel isotrop, so wird sie unter dem auf ihre ganze Oberfläche ausgeübten gleichförmigen Druck eine Kugel bleiben, es wird keine Gestaltänderung der Kugel oder irgend eines Stückes von ihr stattfinden. Aber sie wird sich in eine kleinere Kugel verwandelt haben, und um sie als kleinere Kugel zu erhalten, wird die fortgesetzte Anwendung des Druckes notwendig sein. Hört der Druck auf, so wird die Kugel zu ihrer früheren Größe zurückkehren. Die „räumliche Kompression“ oder „kubische Kompression“, die der Kugel durch gleichförmigen Druck beigebracht wird, wird durch das Verhältnis der Volumenabnahme zum ursprünglichen Volumen der Kugel gemessen; d. h., wenn δv der positive Betrag der Volumenänderung und v das ursprüngliche Volumen ist, so ist das Maß der Kompression $\delta v/v$. Wenn r der ursprüngliche und r' der neue Kugelradius ist, so ist der Wert von δv gleich $4\pi(r^3 - r'^3)$, während das ursprüngliche Volumen gleich $4\pi r^3$ ist, folglich ist die Kompression gleich $(r^3 - r'^3)/r^3$. Dies kann offenbar auch in der Form $(r - r')(r^2 + rr' + r'^2)/r^3$ geschrieben werden, welche, wenn es sich um eine nur geringe Kompression handelt, d. h. wenn r' nahezu gleich

r ist, sehr annähernd $3(r - r')/r$ liefert. Die Größe $(r - r')/r$, die das Verhältnis der Verkleinerung der Länge des Radius zur Länge des ursprünglichen Radius ist, kann die lineare Kompression genannt werden; also ist die kubische Kompression für eine kleine Volumenänderung der Kugel nahezu das Dreifache der linearen Kompression. Diese Beziehung wird in der Behandlung der Elastizität der Körper häufig wiederkehren.

346. Scherung. Um die Vorstellung von einer Gestaltänderung ohne Volumenänderung zu gewinnen, möge sich der Leser ein würfelförmiges Stück eines isotropen Körpers vorstellen. Die eine Würfelfläche sei auf einer horizontalen Unterlage fest angegipst, und die entgegengesetzte Würfelfläche sei gleichfalls festgegipst an einer horizontalen Platte, die gerade um die Länge der Würfelkante von der Unterlage entfernt ist. Nun werde die obere Platte in ihrer eigenen Ebene um eine kleine Strecke in der Richtung einer Gruppe paralleler horizontaler Würfelkanten derart bewegt, daß die Horizontalschichten des Würfels in dem ihrer Höhe über dem Boden entsprechenden Maße folgen müssen. Der senkrechte Zwischenraum zwischen den beiden Würfelflächen ändert sich also nicht, aber die Wirkung der Bewegung der oberen Fläche in der angeführten Richtung wird aus den vier vormals senkrechten Kanten ein Gerüst von vier parallelen, aber nun nicht mehr vertikalen Linien machen. Ist x die Entfernung (AA' oder CC'), um welche die obere Fläche verschoben worden ist, und ist l die Entfernung zwischen den Flächen (AB oder CD oder AC oder BD), also die Würfelkante, so ist die Neigung einer jeden der früher vertikalen Linien zur Vertikalen jetzt $\operatorname{arctg} x/l$; wenn x klein im Vergleich zu l ist, so ist diese Neigung also sehr annähernd x/l.

Durch diese Verrückung ist also jede horizontale Schicht des Würfels parallel mit der Bewegungsrichtung der obersten Würfelfläche um eine mit dem Abstande der betreffenden Schicht von der untersten Würfelfläche proportionale Strecke verschoben worden, d. h. um eine Strecke PQ, die gleich xy/l ist, wenn y der Abstand der Schicht von der untersten Fläche ist. Offenbar hat, obgleich weder der Körper noch einer seiner Teile eine Volumenänderung erfahren hat, doch der Körper — und in entsprechender Weise jeder seiner Teile — eine Gestaltänderung erlitten. — Die hier auseinandergesetzte Art der Deformation heißt Scherung und wird später unsere Aufmerksamkeit in nicht unerheblichem Grade in Anspruch nehmen; das Maß der Scherung ist das Verhältnis x/l, d. h. wenn x klein ist, die Neigung der vorher senkrecht gewesenen Würfelflächen.

Fig. 192.



347. Spannung bei der Scherung. Wenn auf diese Weise ein fester Körper einer Gestaltänderung ohne Volumenänderung unterworfen wird, so muß eine Kraft von dieser Art dauernd auf die Fläche wirken, um die Gestaltänderung des Körpers zu erhalten. Diese wirkende Kraft ist eine Tangentialkraft auf die Zwischenschicht zwischen der Auflageplatte und dem Würfel, auf den sie aufgegipst ist, und hat auf der gesamten Zwischenschicht denselben Wert pro Flächeneinheit. Die wirkende Kraft muß wirksam erhalten werden, wenn der Zwangszustand des Körpers dauern soll; zieht man die Kraft zurück, so kehrt der Körper in seine frühere Gestalt zurück. Im Inneren des Körpers — wenn dieser Gestaltelastizität besitzt — wird ein System innerer Kräfte infolge des Zwangszustandes wachgerufen, die die Tendenz haben, diesen Zustand aufzuheben.

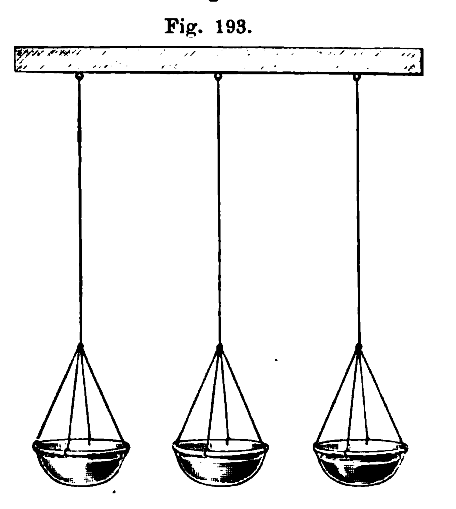
Ein isotroper fester Körper besitzt sowohl Volumen- als Gestaltelastizität; eine Flüssigkeit ist isotrop, besitzt aber nur Volumenelastizität und keine Gestaltelastizität, wenigstens nicht unter gewöhnlichen Umständen. Es ist nämlich nicht unmöglich, daß Körper, die sich für gewöhnlich wie Flüssigkeiten verhalten, unter gewissen speziellen Verhältnissen sich als im Besitze von Gestaltelastizität erweisen können. Vorläufig aber definieren wir einen festen Körper als einen solchen, der die beiden aufgeführten Arten von Elastizität besitzt, und eine Flüssigkeit als einen solchen, der nur die erste, nämlich Volumenelastizität, besitzt.

348. Zähigkeitswiderstand gegen Gestaltänderung. In allen wirklichen Flüssigkeiten gibt es jedoch einen Widerstand gegen Gestaltänderung, der von der Geschwindigkeit, mit der die Änderung vor sich geht, abhängt, d. h. alle Flüssigkeiten sind mehr oder weniger zäh. Dies erweist sich zur Genüge bei der allergewöhnlichsten Beobachtung. Wenn man ein Glas mit Wasser kippt und dann sich selbst überläßt, wird das Wasser darin in Schwingung versetzt; fortwährende Gestaltänderungen (aber keine Volumenänderung) gehen in allen Teilen des Wassers vor sich und erfahren Widerstand durch das gegenseitige Aufeinanderwirken der verschiedenen Teile des Wassers. Dieser Widerstand hängt von der Geschwindigkeit der Gestaltänderung ab und verschwindet, wenn diese null wird, wie groß auch immer die bewirkte Änderung sein mag. Nach Verlauf einer kurzen Zeit hat sich die Bewegung beruhigt, und ein genügend empfindliches Thermometer würde eine leichte Steigerung der Temperatur des Wassers anzeigen. Verschiedene Flüssigkeiten haben sehr verschiedene Zähigkeiten, d. h. sie setzen der mit einer gegebenen Geschwindigkeit vor sich gehenden Gestaltänderung sehr verschiedenen Widerstand entgegen; in der Wirklichkeit kann dieser Widerstand so groß werden, daß der Körper unter der Wirkung gewöhnlicher Kräfte nur sehr langsam seine Gestalt ändert und sich scheinbar wie ein fester Körper verhält. Ist der Körper in-

dessen eine hochgradig zähe Flüssigkeit, so wird eine genügend lange Dauer einer auch nur kleinen Kraft genügen, eine merkliche Gestaltänderung hervorzubringen. Wasser z. B. hat eine geringe Zähigkeit, Alkohol und einige andere Flüssigkeiten haben eine noch geringere; die verschiedenen tierischen und vegetabilischen Öle haben eine höhere Zähigkeit von verschiedenen Beträgen, z. B. ist die des Rizinusöls von beträchtlicher Höhe. Die Zähigkeit des Sirups ist sehr groß, so groß, daß eine Menge Sirup, die man ganz schnell in Form eines Haufens auf einen Tisch niederlegt, eine immerhin merkliche Zeit lang ihre Gestalt beibehält.

349. Experimentelle Erläuterung der Zähigkeit. Das folgende Experiment erläutert sehr gut die verschiedene Zähigkeit der Substanzen. Drei oder vier gewöhnliche Glasschalen werden, wie in Fig. 193 ersichtlich, mit Drähten montiert, jede Montierung wird mittels eines steifen Gliedes, um das sich die Drähte nicht drehen können, an einem steifen Faden befestigt, der seinerseits wieder oben an einem Haken starr befestigt ist. Sämtliche Aufhängefäden sind von gleichem Material, von gleicher Länge und Dehnbarkeit. Eines der Gläser wird etwas über halbvoll mit Wasser, das zweite, dritte und vierte mit demselben Gewichte von Walratöl bzw. Rizinusöl bzw. Sirup gefüllt. Kleine Papierstückchen werden auf den Oberflächen der Flüssigkeiten in Reihen in den Radien der Gläser hingelegt, um etwaige relative Bewegungen der oberflächlichen Flüssigkeitsteile anzuzeigen, die durch die den Gläsern erteilte Bewegung entstehen könnten.

Fig. 193.



Jeder Faden wird an seinem unteren Ende gefaßt und langsam so herumgedreht, daß jede Schlinge sich mit ihrem Glase nebst Inhalt nahezu um denselben Winkel dreht. Zwei Experimentatoren können die vier Gläser behandeln, sie um denselben Winkel drehen und sie annähernd im selben Moment loslassen. Sobald die Fäden losgelassen sind, fangen sie an sich aufzudrehen, und die Gläser mit ihren Inhalten drehen sich um vertikale Axen, die mit den Fäden zusammenfallen. In dem Maße, in dem jeder Faden sich umdreht, nimmt das die Bewegung des Glases erzeugende elastische Kräftepaar in ihm ab, von einem Maximalwert in dem Augenblicke, wo der Faden losgelassen

wurde, bis zum Nullwert, wenn der Faden gerade wieder richtig hängt; es hat aber während der Periode des Aufdrehens einen positiven Wert gehabt, und somit ist dem Glase fortwährend eine Winkelgeschwindigkeit erteilt worden. Also fährt das Glas fort, über den Nullwert der Drehung hinaus sich zu drehen, und der Faden erfährt eine Drillung in der entgegengesetzten Richtung. Dieser zunehmenden Drillung indessen setzt sich ein zunehmendes, der Bewegung widerstrebendes Kräftepaar entgegen, das schließlich das Glas zur Ruhe bringt und dann zur Beschreibung der nahezu gleichen Lagen in entgegengesetzter Reihenfolge veranlaßt. So führt jedes Glas Schwingungen um die vertikale Axe aus, es ist mit seinem Inhalte in Wahrheit bis zu einem gewissen Grade der Pendelkörper eines sogenannten Torsionspendels. Man wird beim Anstellen des Experimentes bemerken, daß die Amplitude oder Weite der Schwingungen in allen Fällen abnimmt, aber bei dem ölgefüllten Glase schneller als sowohl beim Sirup wie beim Wasser.

Das Charakteristische und Paradoxe der Erscheinung ist also, daß sich das schwach zähe Wasser und der stark zähe Sirup ähnlich verhalten, während sich das mit mittlerer Zähigkeit behaftete Öl anders verhält. Es läßt sich leicht einsehen, wie dieses Paradoxon zustande kommt.

Werden die Schalen sich selbst überlassen, so werden sie durch das Gehänge herumgedreht; und wenn es keine Störungen, wie gewöhnliche Pendelschwingung, gäbe, wenn die Gläser vollkommene Kugelschalen wären und sich um ihre Symmetrieaxen drehten, wenn überdies die Flüssigkeiten keine Zähigkeit hätten und kein Zug zwischen Gläsern und Flüssigkeiten auf ihre Trennungsebenen ausgeübt würde, dann würden sich die Schalen drehen, während die Flüssigkeiten in Ruhe bleiben würden.

Diesem Zustande kommt das Wasser eher nahe als die anderen Flüssigkeiten, aber selbst beim Wasser gibt es eine tangentiale Wirkung zwischen ihm und der Schale, so daß die Schale das an sie angrenzende Wasser mit herumreißt. Diese drehende Bewegung mit der Schale wird dem näher zur Mitte befindlichen Wasser durch die Wirkung der Zähigkeit zwischen ihm und dem weiter am Rande befindlichen Wasser mitgeteilt, was man aus der Verrückung der kleinen Papierstücke deutlich ersieht. Zuerst, wenn die Schale langsam gedreht wird, dreht sich das Wasser mit ihr, und die relativen Lagen der Papierschnitzel ändern sich nicht; aber wenn das Pendel losgelassen wird, zeigen die Hin- und Herbewegungen der Papierschnitzel nahe am Rande, daß die mehr nach außen gelegenen Wassermengen mit der Schale mitgerissen werden um Winkel, die um so größer sind, je größer die Entfernung vom Mittelpunkte ist.

Bei der Schale mit Öl wird die Bewegung vollständiger von den äußeren nach den inneren Teilen der Flüssigkeit mitgeteilt, und der gegen die Bewegung der Schale von der Flüssigkeit ausgeübte tangen-

tiale Druck ist in diesem Falle größer, so daß die Schale schneller zur Ruhe kommt.

Beim Sirup aber ist die Zähigkeit so groß, daß die drehende Bewegung in derselben Phase in der gesamten Flüssigkeit stattfindet. Die Schale schleift die äußerste Schicht des Sirups mit, die äußerste Schicht die ihr nächste Schicht u. s. w., so daß sich die ganze Flüssigkeit beinahe wie ein fester Körper um die vertikale Axe dreht, und daß nur eine langsame Abnahme der Schwingungsweite stattfindet.

Die Schwingungen des Gefäßes erzeugen Wellen in der Flüssigkeit, die sich von der Oberfläche nach innen fortpflanzen und eine Zerstreuung von Energie (in der Arbeit gegen die Reibung) bewerkstelligen. Ist die Häufigkeit der Schwingungen groß im Verhältnis zur Zähigkeit, so pflanzen sich die Wellen schnell nach innen fort, werden aber auch sehr schnell gedämpft, so daß nur eine sehr dünne Schicht der Flüssigkeit affiziert wird. Ist sie klein im selben Verhältnis, so bewegen sich Flüssigkeit und Gefäß fast völlig miteinander; die Energiezerstreuung ist alsdann gering, aber die Trägheit der schwingenden Masse groß. Im mittleren Falle hingegen entsteht in der Flüssigkeit eine erhebliche relative Bewegung, so daß die Bewegung des Gefäßes schnell zu Ende geht (s. w. u. „Zähigkeit", Bd. 2).

350. Verhalten des Pechs. Noch extremer würde sich der Fall gestalten, wenn man die Schale mit Pech oder Stiefelwichse füllte. Diese Substanz ist scheinbar hart und spröde; denn wenn man sie herunterwirft, geht sie in Stücken mit einem muscheligen Bruch, wie Glas. Trotzdem aber zerfließt ein Stück davon, das man auf einen Tisch legt, allmählich in eine horizontale Schicht. Es findet auch nur eine geringe oder gar keine Abnahme der Amplitude infolge der Zähigkeit des Materials statt, wenn es in die Schale des Torsionspendels gefüllt wird; das rührt aber nicht vom Mangel an Zähigkeit her; im Gegenteil, die große Zähigkeit des Materials verhindert es, in der kurzen Zeit, während deren die Kraft wirkt, irgend eine merkliche Distorsion zu erfahren. Die Zähigkeit des Materials sowie die Tatsache, daß es sich unter gewöhnlichen Umständen wie eine Flüssigkeit verhält, wird durch das folgende, von Lord Kelvin angegebene Experiment gut illustriert. In ein Glasgefäß von etwa 20 cm Durchmesser und ungefähr ebenso großer Tiefe wird eine kleine Menge Wasser und einige gewöhnliche Korke hineingetan. Dann wird ein Klumpen Schusterpech ungefähr vom Durchmesser des Gefäßes und 6 cm Dicke geformt und so in das Wasser über die Korke gebracht, daß es diese am Grunde des Gefäßes abschließt, während das übrige Wasser über das Pech emporsteigt und dazu dient, die Temperatur gut konstant zu erhalten. Dann werden einige Bleikugeln oben auf den Klumpen gelegt, und das Ganze wird sich selbst überlassen. Nach zwei bis drei Wochen wird man finden, daß die Korke nicht mehr sichtbar sind infolge ihres

Eindringens in den Klumpen; und wenn man das Gefäß von unten ansieht, wird man sehen, daß das Pech sich hinter den Korken geschlossen hat, so daß sie jetzt nur unter dem Einfluß der sie umgebenden Wichse stehen. Ebenso wird man die Bleikugeln von der Oberfläche verschwunden und keine Spur ihres Eindringens in die Wichse erkennbar finden. Noch einige Wochen später werden die Korke anfangen, sich durch die Oberfläche der Masse durchzuarbeiten, indem sie die Wichse vor sich herschieben, schließlich durch die oberste Schicht durchbrechen und in das Wasser darüber gelangen, während sich die Bleikugeln zuletzt in dem Wasser unter dem Klumpen finden. Am Schlusse wird die Pechmasse als durchaus lückenlos zusammenhängend befunden.

Die lange andauernde Kraftwirkung der Kugeln auf das Pech hat sie befähigt, allmählich hindurchzudringen gegen den ihrer Bewegung gebotenen Widerstand, der der Geschwindigkeit des Fortschrittes der Kugeln annähernd proportional ist. Im ersten Augenblicke wurden die Korke durch das Wasser gegen die unterste Schicht des Wachsklumpens gedrückt, dann drangen sie allmählich in den Klumpen ein und wurden durch die von dem umgebenden Pech auf sie wirkenden Kräfte aufwärts getrieben in einer Weise, die alsbald für Flüssigkeit im allgemeinen erklärt werden wird.

In Wahrheit hat der Pechklumpen auf die Korke und Kugeln nicht anders gewirkt, als Sirup oder Öl oder sonst eine unvollkommene Flüssigkeit gewirkt haben würde. Die Kugeln würden auch durch das Öl heruntergesunken sein, und die Korke würden vom Grunde sehr rasch aufgeschnellt sein, wie in dem Beispiele mit Wasser. Der einzige Unterschied beim Pech ist, daß die erforderliche Zeit auf zwei oder drei Monate verlängert worden ist. Obgleich also das Pech bei gewöhnlichen Temperaturen, wenn es heruntergeworfen wird, zerbricht wie ein glasartiger fester Körper, verhält es sich doch hier wie eine äußerst zähe Flüssigkeit.

351. Festigkeit des Pechs unter besonderen Umständen. Es gibt Umstände, unter denen das Pech dazu gebracht werden kann, sich wie ein wirklicher fester Körper zu verhalten; wenn z. B. ein Stück Pech in die Form einer Glocke gegossen und mit einem Hammer angeschlagen wird, werden wirkliche elastische Kräfte darin entwickelt, die Glocke wird in Schwingungen kommen, die einen musikalischen Ton erzeugen werden. Die Tatsache, daß ein musikalischer Ton herauskommt, beweist, daß die Teilchen der Glocke, wenn ihre relativen Lagen verändert werden, mit Kräften, die ihrer Verrückung proportional sind, d. h. die also vom Betrage der relativen Verrückung, der sie unterworfen worden sind, abhängen, in ihre früheren relativen Lagen zurückgedrängt werden. Sie erscheinen deshalb als wirkliche elastische Kräfte, und der Körper scheint in diesen Umständen unter der Wirkung schnell wechselnder Kräfte wahre Gestaltelastizität zu besitzen.

Wird aber anderseits die Glocke mit ihrem Rande auf einen Tisch gestellt und sich selbst überlassen, so wird sie sich in wenigen Tagen in eine einfache Lage Pech verwandeln.

352. Trennnngsfläche in einer Flüssigkeit. Flüssigkeitsdruck. Druckhöhe. Betrachten wir jetzt, als Annäherung an eine wirkliche Flüssigkeit, eine isotrope Flüssigkeit ohne Zähigkeit. Da es keine Gestaltelastizität und keine Zähigkeit gibt, so gibt es auch keine Tangentialwirkung zwischen zwei Teilen der Flüssigkeit, die in der trennenden Fläche auf jeden Teil ausgeübt würde. Folglich muß jede Wirkung eines Flüssigkeitsteiles auf einen anderen überall senkrecht zur Trennungsschicht zwischen beiden Teilen sein. Wir werden der Kürze halber die trennende Fläche zwischen zwei Flüssigkeiten eine Trennungsfläche nennen. Eine solche Trennungsfläche ist natürlich physikalisch nicht vorhanden, es ist eine rein geometrische Grenze zwischen zwei Flüssigkeitsmengen. Im allgemeinen wird überall durch die Trennungsfläche hindurch Kraft von einer Menge auf die andere wirken, und diese ist, wie wir sahen, überall senkrecht zur Trennungsfläche. Man nehme ein beliebiges Stück S von der Trennungsfläche, und K sei die von einer Menge A auf die andere Menge B ausgeübte Kraft. Selbstverständlich wirkt eine gleich große Kraft durch dasselbe Flächenstück von der Menge B auf A. Diese Kraft nennt man Druckkraft oder kurz Druck; der letztere Ausdruck bleibt aber besser für das Verhältnis K/S, also für den Druck auf die Flächeneinheit, reserviert; zuweilen unterscheidet man auch K als Gesamtdruck von $K/S = p$ als Einheitsdruck. Jener hat die Dimension

$$[K] = [LMT^{-2}],$$

dieser dagegen:

$$[p] = [L^{-1}MT^{-2}].$$

Wenn K von Ort zu Ort variiert, so heißt das Verhältnis K/S der mittlere Druck über dem Stück S der Trennungsfläche. Wenn in einem endlichen Gebiete der Trennungsfläche allenthalben das Verhältnis $K:S$ unabhängig von der Größe von S ist, so sagt man, daß über diesem Gebiete der Trennungsfläche gleichförmiger Druck herrscht. Wenn aber der Druck kein gleichförmiger ist, so bestimmt man den Druck in einem Punkte P folgendermaßen: Man nimmt ein beliebiges Stück S der P umgebenden Trennungsfläche und bestimmt die Kraft K über diesem Flächenstück, dann ist, wie festgestellt wurde, K/S der mittlere Druck über dem P einschließenden Flächenstück S. Nun werde S bis ins Unendliche verkleinert, aber immer so genommen, daß es P einschließt; dann nähert sich das Verhältnis K/S, wenn diese Verkleinerung durchgeführt wird, mehr und mehr einem festen Werte. Dieser feste Wert des Verhältnisses ist der Druck in P. Es wird in § 395 gezeigt werden, daß der Druck in P derselbe für alle Trennungsflächen ist, die durch ihn hindurchgelegt werden können.

Die Höhe, die eine Flüssigkeitssäule haben muß, um durch ihr Gewicht einen Druck p an ihrer Basis auszuüben, heißt die Druckhöhe der Flüssigkeit. Wenn p der Druck und ϱ die Dichte ist, so ist das Gewicht einer Säule dieser Flüssigkeit vom Querschnitt 1 und der Höhe h gleich $g\varrho h$ in absoluten Einheiten oder ϱh in Gravitationseinheiten. In letzterem Falle ist, wenn h in Zentimetern und ϱ in Gramm pro Kubikzentimeter ausgedrückt wird, der Druck p in Gramm pro Kubikzentimeter gleich ϱh.

353. Hypothesen der gewöhnlichen Hydrodynamik. In der oben gegebenen Definition des Drucks war angenommen, daß die Verkleinerung des Flächenstückes ins Unendliche fortgesetzt wird. Diese Annahme soll aber nicht mehr besagen, als daß man diesem festen Verhältnis näher und näher kommt, je weiter die Verkleinerung des Flächenstückes durchgeführt wird innerhalb der Beobachtungs- und Untersuchungsgrenzen, die die feinsten physikalischen Meßinstrumente zulassen. Zweifellos würden wir, wenn wir diese Grenzen überschreiten könnten, auf die körnige Struktur der Materie geraten und müßten die fehlende Homogenität in Rechnung ziehen, die aus der Existenz von Molekeln mit Zwischenräumen von einem zum anderen hervorgeht. In diesem Falle müßte man zu einer statistischen Betrachtungsweise seine Zuflucht nehmen; dies wird aber vermieden durch die hier angenommene Hypothese, daß der kleinste Teil der Flüssigkeit, mit dem wir zu tun haben, alle physikalischen Eigenschaften besitzt, die der Flüssigkeit im ganzen eignen. Das erste, was man alsdann zu tun hat, ist, die Beschleunigung eines Teiles der Flüssigkeit zu bestimmen; zu diesem Zwecke muß man die auf diesen Teil wirkenden Kräfte berechnen. Diese Kräfte zerfallen in zwei Gruppen: 1. die durch die umgebende Flüssigkeit auf die Flüssigkeitsfläche ausgeübten oder durch die Molekularwirkungen der Flüssigkeitsmolekeln selbst nahe der Oberfläche, wie in der Kapillarität, wirkenden Kräfte, und 2. die von außen auf die Flüssigkeitsteilchen wirkenden Kräfte, wie z. B. die Wirkungen der Schwerkraft auf die Flüssigkeitsteilchen. Die Flüssigkeit sei zunächst als inkompressibel angenommen, d. h. es soll kein auf einen Teil der Flüssigkeit wirkendes System von Kräften im stande sein, sein Volumen zu ändern. Späterhin soll auch die Bewegung kompressibler Flüssigkeiten kurz betrachtet werden.

354. Beschleunigung eines Flüssigkeitselementes. Es muß nun die Beschleunigung eines Flüssigkeitsteilchens kinematisch berechnet werden. Es sei die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens in einem Punkte P gleich q, und die Richtung, nach der es sich in diesem Punkte bewegt, sei gegeben; es möge nach einem Zeitraume δt an einem Punkte Q in seiner Bahn ankommen und in Q die Geschwindigkeit q' haben. Dann ist die Beschleunigung des Teilchens das Grenzwert-

verhältnis des Geschwindigkeitszuwachses $q' - q$ zu dem Zeitraume δt, in dem er bewirkt worden ist. Wird der Zeitraum verschwindend klein genommen, so wird der Grenzwert des Verhältnisses $\delta q/\delta t$. Es muß bemerkt werden, daß δq der Unterschied zwischen der Geschwindigkeit, die ein Teilchen in P zur Zeit t hat, und der Geschwindigkeit eines Teilchens in Q zur Zeit $t + \delta t$ ist. Die Änderung setzt sich also aus zwei Teilen zusammen: 1. aus dem Unterschiede zwischen der Geschwindigkeit in Q zur Zeit t und der Geschwindigkeit im Punkte P zur selben Zeit, und 2. aus der Änderung der Geschwindigkeit, welche die Geschwindigkeit in Q im Zeitraume δt erfährt.

Wenn $\partial q/\partial s$ den Änderungsgrad von q auf der Bahn des Teilchens in der Zeit t bezeichnet, und ds, die Länge der Strecke von P nach Q, sehr klein ist, so ist die unter 1. aufgeführte Änderung gleich $(\partial q/\partial s).ds$. Ferner möge $\partial q'/\partial t$ der Änderungsgrad der Geschwindigkeit mit der Zeit in Q sein, dann ist die Geschwindigkeit, da sie in Q zur Zeit t gleich $q + \partial q/\partial s.ds$ ist, zur Zeit $t + dt$ gleich

$$q + \frac{\partial q}{\partial s}\,ds + \frac{\partial\left(q + \frac{\partial q}{\partial s}\,ds\right)}{\partial t}\,dt,$$

d. h. gleich

$$q + \frac{\partial q}{\partial s}\,ds + \frac{\partial q}{\partial t}\,dt + \frac{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial s}\right)}{\partial t}\,ds\,dt.$$

Das letzte Glied verschwindet im Vergleich mit den anderen; und wenn dt sehr klein genommen wird, so hat man für die durch die Verrückung des Teilchens von P nach Q im Zeitraume dt in q erzeugte Änderung den Wert

$$\frac{\partial q}{\partial t}\,dt + \frac{\partial q}{\partial s}\,ds.$$

Folglich hat man, wenn $\dot{q}$ (d. h. dq/dt) den zeitlichen Änderungsgrad von q bezeichnet, da $q = ds/dt$ oder $\dot{s}$ ist:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + q\,\frac{\partial q}{\partial s} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Im Falle stationärer Bewegung ändert sich die Geschwindigkeit in einem und demselben Punkte des Raumes nicht mit der Zeit, und man hat alsdann:

$$\frac{dq}{dt} = q\,\frac{\partial q}{\partial s} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Diese Gleichungen können auf andere Formen gebracht werden, die manchmal brauchbar sind. So mögen u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten und $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ die Komponenten der Beschleunigung parallel mit den Axen sein. Da $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$ ist, so hat man:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{du}{dt}\frac{u}{q} + \frac{dv}{dt}\frac{v}{q} + \frac{dw}{dt}\frac{w}{q}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{u}{q} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{v}{q} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{w}{q}$$

$$\begin{aligned} q\frac{\partial q}{\partial s} &= u\frac{\partial u}{\partial s} + v\frac{\partial v}{\partial s} + w\frac{\partial w}{\partial s} \\ &= \frac{u}{q}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{v}{q}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ &+ \frac{w}{q}\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

Wenn man die Summe der Ausdrücke für $\partial q/\partial t$ und $q\partial q/\partial s$ nimmt und dem Werte von $\dot{q}$ gleichsetzt, so erhält man eine Gleichung, die für jeden gegebenen Fall, gleichviel wie die Axen gewählt sind, gelten muß. Mithin müssen die mit u/q, v/q, w/q multiplizierten Größen auf beiden Seiten der Gleichung gleich sein. Man erhält daher:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

Diese Gleichungen hätte man natürlich, da

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}$$

ist, auch direkt nach den formalen Regeln der Differentialrechnung hinschreiben können.

355. Kontinuitätsgleichung. Es handelt sich jetzt darum, eine Gleichung aufzustellen, welche besagt, daß, wenn es in keinem Teile des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes Entstehung oder Vernichtung von Materie gibt, jede Zu- oder Abnahme des Betrages von Materie, die in irgend welcher Zeit innerhalb eines Teiles des Raumes statthat, genau gleich sein muß dem Unterschiede zwischen dem Betrage von Flüssigkeit, der in dieser Zeit über die Grenzen in den Raum eingetreten, und dem Betrage, der aus ihm ausgetreten ist.

Diese Gleichung heißt die Kontinuitätsgleichung. Zuerst soll gezeigt werden, daß der zeitliche Änderungsgrad des Volumens eines rechteckigen Elementes, dessen Mittelpunkt im Punkte x, y, z liegt, wo die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w sind, und dessen Kanten längs den Axen die Längen dx, dy, dz haben,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

beträgt; mit anderen Worten, daß die Klammergröße die **räumliche Dilatation** in der Zeiteinheit ist.

Denn, betrachten wir einen Faden von unendlich kleinem Querschnitt σ und parallel mit der x-Axe verlaufend. Wenn θ_2, θ_3 positive Zahlenfaktoren, jeder kleiner als eins, sind, so sind die Koordinaten der Enden eines solchen Fadens, auf P bezogen, $-\frac{1}{2}dx$, $\theta_2 dy$, $\theta_3 dz$ für das eine Ende und $\frac{1}{2}dx$, $\theta_2 dy$, $\theta_3 dz$ für das andere. Folglich gibt der Ausdruck

$$u \mp \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \theta_2\,\frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \theta_3\,\frac{\partial u}{\partial z}\,dz$$

den Wert von u am einen oder anderen Ende des Fadens, je nachdem man das negative oder positive Vorzeichen setzt. Danach ist der Überschuß von u am zweiten Ende über den Wert am ersten Ende gleich $\partial u/\partial x\,.\,dx$. Dies ist der Zuwachsgrad der Länge des Fadens und bringt einen Zuwachsgrad des Fadenvolumens vom Betrage $\sigma(\partial u/\partial x)dx$ hervor.

Die Größe $\partial u/\partial x$ ist für alle Fäden konstant, und man hat daher für den von der Änderung von u herrührenden Zuwachsgrad des Volumens des Elementes den Wert $(\partial u/\partial x)dx\,dy\,dz$.

Ebenso hat man für den von der Änderung von v bezw. w durch das Element hindurch herrührenden Zuwachsgrad

$$\frac{\partial v}{\partial y}\,dx\,dy\,dz \qquad \text{bezw.} \qquad \frac{\partial w}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Der ganze Zuwachsgrad des Volumens ist im Grenzwerte die Summe dieser Ausdrücke. Das Verhältnis dieser Summe zum ursprünglichen Volumen der Flüssigkeit, also die räumliche Dilatation, oder, wie man es auch nennen kann, der **relative** Änderungsgrad des Volumens in der Zeiteinheit heißt die **Divergenz** der Flüssigkeitsströmung in P und wird mit $div(q)$ bezeichnet, wo q die Resultante von u, v, w in P ist. Demnach schreiben wir:

$$div(q) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (4)$$

Dieser Ausdruck gibt die Divergenz insoweit an, als Größen von der ersten Ordnung in Betracht kommen. Es wird z. B. bemerkt werden, daß die Zuwachsgrade der Dimensionen in der y- und z-Richtung den Zuwachsgrad des Volumens, der durch das Fließen längs x erzeugt wird, vergrößern, und entsprechend für die anderen Richtungen y, z; diese Wirkungen fehlen in der oben gegebenen Diskussion, aber der Leser kann leicht feststellen, daß die von ihnen abhängenden Glieder klein sind im Vergleich zu den beibehaltenen.

Der relative Volumenzuwachs in der Zeit dt, den eine gegebene Flüssigkeitsmenge im Punkte P erfährt, ist also:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dt.$$

Wenn ϱ die Dichte der Flüssigkeitsmenge zur Zeit t ist, so ist ihre Dichte zur Zeit $t + dt$ gleich $\varrho + \dot{\varrho}\, dt$. Folglich ist die Masse des Elementes nach Verlauf von dt:

$$\left(\varrho + \frac{d\varrho}{dt}\, dt\right)\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt\right] dx\, dy\, dz.$$

Da dies aber denselben Wert wie vorher haben muß, nämlich $\varrho\, dx\, dy\, dz$, so findet man unter Vernachlässigung des mit dt^2 multiplizierten Gliedes:

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

welches die Kontinuitätsgleichung ist. In der Tat, wenn Größen zweiter Ordnung vernachlässigt werden, so ist

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

der Zuwachsgrad der Masse des Elementes infolge der Volumenänderung, und $\dot{\varrho}\, dx\, dy\, dz$ derjenige infolge der Dichteänderung, und diese beiden Größen müssen natürlich zusammen das Resultat null ergeben.

Auf dieselbe Weise kann die Divergenz jeder anderen mit der Strömung der Flüssigkeit zusammenhängenden Größe, wenn sich diese Größe stetig ändert, berechnet werden. So hat man einen entsprechenden Ausdruck für die Divergenz der Massenströmung des Körpers. Die Geschwindigkeit der Massenströmung pro Volumeneinheit in P ist ϱq, wenn ϱ die Dichte bei P ist. Davon sind die Komponenten $\varrho u, \varrho v, \varrho w$, so daß sich ergibt:

$$div\,(\varrho q) = \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Da dies der Abnahmegrad der Materie in der Einheit des Volumens ist, so ist es offenbar der zeitliche Abnahmegrad der Dichte in dem festen Punkte P, nämlich $-\partial\varrho/\partial t$. Folglich hat man:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

was eine andere Form der Kontinuitätsgleichung ist. Da ϱ sich mit der Zeit für einen bestimmten Punkt und außerdem mit der Lage eines Flüssigkeitsteilchens zur Zeit t ändern kann, so wird der Wert $\dot{\varrho}$ des Zuwachsgrades von ϱ als eine für eine bestimmte Flüssigkeitsmenge charakteristische Größe betrachtet, durch den Ausdruck

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + u\frac{\partial\varrho}{\partial x} + v\frac{\partial\varrho}{\partial y} + w\frac{\partial\varrho}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

gegeben. Durch Einsetzen dieses Wertes in Gl. (5) hätte man offenbar direkt die Gl. (7) ableiten können.

Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so ist ϱ eine Konstante, und die Kontinuitätsgleichung nimmt die einfache Gestalt

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

an, welche besagt, daß die Differentialquotienten der Geschwindigkeitskomponenten je in ihren Richtungen zusammen null ergeben.

356. Geschwindigkeitspotential. Wenn die Verteilung der Geschwindigkeiten in irgend einem Punkte in der Flüssigkeit in irgend einem bestimmten Zeitmoment aus einer Funktion φ der Koordinaten des Punktes abgeleitet werden kann gemäß den Gleichungen

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

d. h. wenn u, v, w die partiellen Abnahmegrade einer und derselben Funktion in der Richtung von x, y, z sind, so sagt man, daß die Bewegung durch ein Geschwindigkeitspotential φ charakterisiert ist[1]). Der Leser wird sich erinnern, daß dies, mutatis mutandis, die oben § 218 erklärte Art ist, die Kraftkomponenten von einem Kraftpotential abzuleiten. Es ist ein elementares Theorem der sogenannten partiellen Differentiation, daß

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$$

ist, so daß, wenn die Geschwindigkeiten auf die oben gedachte Art von einer Funktion φ der Koordinaten abzuleiten sind, die drei Beziehungen

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad (9a)$$

bestehen müssen.

Wenn die Gl. (9) gelten, so gilt auch

$$u dx + v dy + w dz = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz\right) = -d\varphi,$$

wo jedes der drei Klammerglieder diejenige Änderung von φ ist, welche stattfindet, wenn sich entweder nur x in $x + dx$, oder nur y in $y + dy$ oder nur z in $z + dz$ ändert (während die beiden anderen Koordinaten und die Zeit jedesmal konstant erhalten wird), und wo, im Gegensatze hierzu, $d\varphi$ die ganze Änderung von φ ist, die stattfindet, wenn sich zugleich x um dx, y um dy, z um dz ändert. Die Größe $d\varphi$ ist ein sogenanntes vollständiges Differential der Funktion φ der Koordinaten. Das Integral von $(d\varphi/ds)ds$ längs irgend einer Bahn in der Flüssigkeit ist alsdann $\varphi_2 - \varphi_1$, wo φ_2 und φ_1 die Werte von φ am End- und Anfangspunkte der Bahn sind. Indessen ist dieses Integral

[1]) In deutschen Büchern werden u, v, w meist den positiven Differentialquotienten, d. h. den Zuwachsgraden von φ gleichgesetzt; die obige Wahl ist aber, schon wegen der Übereinstimmung mit dem Kräftepotential, vorzuziehen.

nicht frei von Zweideutigkeit in gewissen Fällen, wie weiter unten auseinandergesetzt werden wird (vgl. oben § 193 und weiter unten § 358).

Für die Größen auf der linken Seite der Gl. (9a) gibt es eine gewisse physikalische Interpretation, die folgendermaßen erklärt werden kann. Man denke sich eine kleine starre Kugel mit ihrem Mittelpunkte im Punkte x, y, z; die Geschwindigkeitskomponenten der Bewegung dieses Mittelpunktes seien u, v, w. Die Winkelgeschwindigkeiten der Kugel um Durchmesser, die mit den x-, y-, z-Axen parallel sind, seien θ_1, θ_2, θ_3, dann sind nach § 277 die Geschwindigkeiten eines Oberflächenpunktes, dessen Koordinaten dx, dy, dz sind:

$$u - \theta_3\,dy + \theta_2\,dz, \quad v - \theta_1\,dz + \theta_3\,dx, \quad w - \theta_2\,dx + \theta_1\,dy.$$

Eine kleine Flüssigkeitskugel bewegt sich aber nicht wie ein starrer Körper. Die Geschwindigkeitskomponenten in einem Punkte $(x + dx, y + dy, z + dz)$ sind

$$u + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz$$

u. s. w. und können in der Form

$$u + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)dz$$
$$- \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)dz$$

mit zwei entsprechenden Ausdrücken für die beiden anderen Geschwindigkeitskomponenten geschrieben werden. Es soll gezeigt werden, daß die letzte Zeile den Gliedern $-\theta_3\,dy + \theta_2\,dz$ der Geschwindigkeit des Oberflächenpunktes der starren Kugel entspricht, daß also tatsächlich die Komponenten der Winkelgeschwindigkeiten ξ, η, ζ der Flüssigkeit im Punkte x, y, z durch die Ausdrücke

$$\xi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \eta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \zeta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (10)$$

gegeben sind. Diese Größen heißen Drehungskomponenten oder Wirbelkomponenten.

Wenn sie sämtlich den Wert null haben, so nennt man die Bewegung eine nichtwirbelnde oder Potentialbewegung (Potential ist Abkürzung für Geschwindigkeitspotential); sind sie nicht alle null, so heißt die Bewegung eine Rotations- oder Wirbelbewegung.

Im ersteren Falle wird die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10a)$$

eine Gleichung, die wir später noch für eine andere Größe, nämlich das Kräftepotential (außerhalb der wirkenden Massen) wiederfinden werden (§ 476). Sie heißt, wie schon hier bemerkt sei, Laplacesche Gleichung.

Für kompressible Flüssigkeiten hingegen wird die Kontinuitätsgleichung (vergl. Gl. 7):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial\left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)}{\partial z} = 0 \quad . . (10b)$$

denn hier läßt sich ϱ, da es keine Konstante ist, aus den Klammern nicht herausnehmen, und das erste Glied fällt nicht fort.

357. Wirbelnde Bewegung eines Flüssigkeitselementes. Komponenten der Wirbelgeschwindigkeit. Man betrachte eine kleine Flüssigkeitskugel, deren Mittelpunkt in $P(x, y, z)$ ist, wo die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w sind. Wenn $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, ... die räumlichen Änderungsgrade von u, v, w in P sind, so hat die Geschwindigkeit eines P sehr eng benachbarten Punktes, dessen Koordinaten $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$ sind, die Komponenten $u + \alpha \partial u/\partial x - \beta \partial u/\partial y + \gamma \partial u/\partial z, \ldots$, so daß die Geschwindigkeitskomponenten des Elementes mit Bezug auf P sind: $\alpha \partial u/\partial x + \beta \partial u/\partial y + \gamma \partial u/\partial z$ und entsprechend für v und w. Das Moment h_1 der Bewegungsgröße der Kugel um eine Axe durch P parallel zur x-Axe ist somit

$$\int \varrho\, d\bar{\omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\alpha + \frac{\partial w}{\partial y}\beta + \frac{\partial w}{\partial z}\gamma\right)\beta$$
$$-\int \varrho\, d\bar{\omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\beta + \frac{\partial v}{\partial z}\gamma\right)\gamma,$$

wo $d\bar{\omega}$ ein Raumelement der Kugel ist und die Integrale über die ganze Kugel genommen werden. Nun sind aber $\partial w/\partial x, \ldots$ Konstanten über das ganze Integrationsfeld, und folglich gibt es für jedes Glied $\varrho d\bar{\omega} . \alpha\beta \partial w/\partial x$, für welches β positiv ist, ein anderes Glied, für welches β einen gleichen, aber negativen Wert hat, während alles übrige ungeändert bleibt, und ebenso für die Glieder mit $\beta\gamma$.

Das Moment der Bewegungsgröße reduziert sich somit auf

$$\varrho \left[\frac{\partial w}{\partial y} \int \beta^2 d\bar{\omega} - \frac{\partial v}{\partial z} \int \gamma^2 d\bar{\omega}\right].$$

Das Trägheitsmoment der Kugel um einen Durchmesser ist $\varrho \int (\beta^2 + \gamma^2) d\bar{\omega}$, und hierin ist aus Gründen der Symmetrie offenbar $\int \beta^2 d\bar{\omega} = \int \gamma^2 d\bar{\omega}$. Folglich ist, wenn μ das Trägheitsmoment bedeutet, $\varrho \int \beta^2 d\bar{\omega} = \varrho \int \gamma^2 d\bar{\omega} = \frac{1}{2}\mu$, und man hat für das Moment der Bewegungsgröße der Kugel um den mit der x-Axe parallelen Durchmesser

$$h_1 = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{d z}\right).$$

Dies beweist, daß $\frac{1}{2}(\partial w/\partial y - \partial v/\partial z)$ die Winkelgeschwindigkeit der Kugel um die x-Axe ist. Auf dieselbe Weise kann h_2, h_3 gefunden und kann bewiesen werden, daß $\frac{1}{2}(\partial u/\partial z - \partial w/\partial x)$, $\frac{1}{2}(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)$ die Winkelgeschwindigkeiten der Kugel um die mit y und z parallelen Durchmesser sind.

358. Nichtwirbelnde Bewegung. Einwertige und mehrwertige Potentiale. Das Verschwinden der Größen h_1, h_2, h_3 bedeutet, wie gezeigt, daß die Elemente der Flüssigkeit keine Rotation haben. Aber diese Größen verschwinden nur dann, wenn sich u, v, w von einer expliziten Funktion φ der Koordinaten durch den in § 356 festgestellten Differentiationsprozeß ableiten lassen, d. h. wenn ein Geschwindigkeitspotential φ existiert; und umgekehrt beweist das Vorhandensein eines Geschwindigkeitspotentials, daß die Elemente der Flüssigkeit keine wirbelnde Bewegung besitzen (§ 361). Es kann bewiesen werden, daß, wenn in irgend einem Teile einer vollkommenen Flüssigkeit ein Geschwindigkeitspotential besteht, dieser Teil sein Geschwindigkeitspotential so lange beibehält, als die Flüssigkeit als solche vorhanden ist, vorausgesetzt, daß sie unter der Wirkung konservativer Kräfte steht (§ 193).

Das Potential φ kann entweder einwertig oder mehrwertig sein, d. h. für bestimmte Koordinatenwerte kann φ einen einzigen bestimmten Wert oder eine ganze Reihe verschiedener Werte haben. Im ersteren Falle hat der Ausdruck $\int (d\varphi/ds).ds$ oder $\int d\varphi$ längs einer Bahn im Feld denselben Wert $\varphi_2 - \varphi_1$ (wo φ_2 und φ_1 die Werte von φ für den End- und Anfangspunkt der Bahn sind) für alle Bahnen vom selben Anfangs- zum selben Endpunkte. Im letzteren Falle dagegen wird es unmöglich sein, die Bahn in jeder beliebigen Weise zu verändern, ohne den Wert des Integrals zu beeinflussen; es ist indessen auch in diesem Falle im allgemeinen möglich, zwischen den beiden Punkten des Feldes eine Schar von Linien zu ziehen, für deren jede das erwähnte Integral denselben Wert hat. Man muß nur dem Anfangspunkte P der Bahn einen Wert von φ, etwa φ_1, erteilen, dann wird der Wert φ_2 am Endpunkte Q um das Integral $\int d\varphi/ds.ds$, dessen Wert von der Art, in der die Bahn gezeichnet ist, abhängt, größer sein als φ_1.

Betrachten wir z. B. eine endlose Röhre, in der Flüssigkeit in geschlossenen Bahnen strömt. Der Wert von $(\int d\varphi/ds)ds$ längs einer dieser Bahnen ist nicht null, obgleich Anfangs- und Endpunkt P und Q der Integration zusammenfallen; denn φ nimmt längs der Bahn (und zwar im Verhältnis $d\varphi/ds = q$) stetig ab; die Folge hiervon wird die sein, daß, wenn φ_1 ein bestimmter Wert von φ für den Anfangspunkt und φ_2 der entsprechende Wert für den (mit ihm zusammenfallenden) Endpunkt der Integration ist, $\varphi_2 = \varphi_1 - k$ ist, wo k die sogenannte zyklische Konstante für die Strömung längs der Röhre ist.

Wenn anderseits eine geschlossene Linie in der Röhre gezogen wird, die bei P anfängt und nach P zurückkehrt, und derart, daß sie in einen Punkt zusammengezogen werden kann, ohne aus der Röhre auszutreten, so ist der Wert von $\int d\varphi/ds.ds$ längs dieser Linie null, da jede mit der Strömung der Flüssigkeit durch das Ganze fort-

schreitende Abnahme von φ längs eines Teiles der Bahn in dem gegen die Strömung zurückkehrenden Teile der Bahn aufgehoben wird.

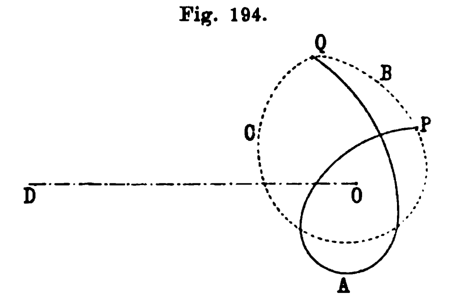
Als Beispiel einer einwertigen Funktion sei $\varphi = \mu / r$ angeführt, wo r die Entfernung des betrachteten Punktes von einem Punkt O ist. Der Wert von $\int d\varphi/ds . ds$ ($= \int d\varphi$) längs einer Bahn von einem Punkt P nach einem Punkt Q, für welche r die Werte r_1 bezw. r_2 hat, ist $\mu/r_2 - \mu/r_1$ und ist folglich null für jede nicht durch den Punkt O hindurchgehende geschlossene Kurve.

Anderseits, wenn $\varphi = \mu\, arctg\,(y/x)$ ist, so ist

$$\int \frac{d\varphi}{ds} ds = \mu \left(arctg\, \frac{y_2}{x_2} - arctg \frac{y_1}{x_1} \right),$$

wenn es längs einer Bahn von einem Anfangspunkt $P(x_1, y_1)$ nach einem Endpunkt Q (x_2, y_2), Fig. 194, genommen wird. Das ist aber $\mu(\theta_2 - \theta_1)$, wenn $\theta_2 - \theta_1$ der Winkel zwischen den vom Anfangspunkte O der Koordinaten nach Q und P gezogenen Radien ist. Dieser Winkel hängt offenbar von der von P nach Q gezogenen Linie ab; denn wenn diese wie die Linie PBQ verläuft, so dreht sich der Radiusvektor um den $\angle\ QOP$; wenn sie dagegen, wie PAQ, zum Teil aus einer einzigen geschlossenen Schlinge um den Anfangspunkt besteht, so dreht sich der Radiusvektor, wenn sein Endpunkt sich längs der Kurve von P nach Q bewegt, um einen Winkel $2\pi + \angle\ QOP$. Geht die Kurve zweimal um den Anfangspunkt herum, so ist der Wert von $\theta_2 - \theta_1$ sogar gleich $4\pi + \angle\ QOP$, u. s. w. Das Integral ist also dasselbe für alle Bahnen von P nach Q, die gleich viele Male um den Anfangspunkt herumgehen.

Fig. 194.



Ferner mögen in diesem Falle Kurven PBQ, PCQ derart von P nach Q gezogen werden, daß beide eine geschlossene Kurve um O bilden. Dann ist das Integral längs PBQ nicht gleich dem längs PCQ; denn das Integral längs der geschlossenen Kurve von P wieder zurück nach P in der als positiv gerechneten Richtung (etwa PAQ) ist $2\pi\mu$, und daher ist, wenn das Integral von P nach Q längs PBQ gleich μJ ist, das längs PCQ gleich $2\pi\mu - \mu J$. Würde die geschlossene Kurve $PBQCP$ nicht O umschließen, so würde das Integral um sie herum null sein; denn ebenso wie ein Punkt, der von P aus die ganze Bahn umlaufen hätte, würde sich auch der Winkel θ zwischen einer von diesem Punkt nach O gezogenen Linie und OP nicht um 2π, sondern, wie viele Umwege die Bahn auch machen möge, um einen Winkel null im Ganzen drehen.

In allen Fällen mehrwertiger Funktionen kann dem Integral die Zweideutigkeit genommen werden, indem man die Bahn gewissen Einschränkungen unterwirft. In dem eben betrachteten Falle möge eine Linie OD in der x, y-Ebene von O in die Unendlichkeit gezogen werden, mit der Bestimmung, daß keine Bahn gezeichnet werden darf, die diese Linie kreuzt; dann ist das Integral für alle in P beginnenden und in Q endenden Bahnen dasselbe, die Funktion ist also damit tatsächlich einwertig geworden.

Ebenso kann in dem Falle der geschlossenen Röhre, in der die Flüssigkeit strömt, das Potential durch Einführung eines Diaphragmas quer durch die Röhre, das kein Bahnintegral kreuzen darf, einwertig gemacht werden.

Diese Betrachtungen finden natürlich ebensowohl auf Kraftpotentiale, als auf Geschwindigkeitspotentiale Anwendung (s. auch § 486).

359. Gleichungen der Flüssigkeitsbewegung. Wir können jetzt die Bewegungsgleichungen einer Flüssigkeit niederschreiben und sie auf einige von den einfacheren im praktischen Leben vorkommenden Fällen anwenden. Man betrachte wieder ein Flüssigkeitsparallelepipedon, das seinen Mittelpunkt im Punkte x, y, z und seine Kanten von den Längen dx, dy, dz parallel den Axen hat. X sei die pro Masseneinheit auf das Element wirkende Kraft, dann ist $X\varrho\,dx\,dy\,dz$ die von außen in der Richtung der x-Axe auf das Element wirkende Kraft. Außerdem gibt es eine vom Druck der umgebenden Flüssigkeit auf das Element herrührende Kraft. Ist der Druck im Mittelpunkt x, y, z gleich P, so erhält man durch den in §§ 354, 355 angewandten Prozeß für die Differenz der Drucke an den beiden Enden senkrecht zur x-Axe $-(\partial p/\partial x)dx$ nach rechts. Die infolge dieser Druckdifferenz auf das Element wirkende Kraft ist $-(\partial p/\partial x)dx\,dy\,dz$. Die ganze, das Element in der x-Richtung angreifende Kraft ist daher

$$\left(\varrho X - \frac{\partial p}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz.$$

Dies muß der Beschleunigung des Elementes mit seiner Masse multipliziert gleich sein, und es gelten entsprechende Resultate für die Beschleunigung in den beiden anderen Richtungen. Nach den in § 355 gegebenen Werten der Beschleunigungskomponenten erhält man somit als Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\\
Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\\
Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \cdot\cdot\ (12)$$

Lassen sich die Kräfte X, Y, Z von einer Potentialfunktion V, der potentiellen Energie pro Masseneinheit im Kraftfelde ableiten, so erhalten diese Gleichungen die Form

$$\left.\begin{aligned} -\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)&=\frac{du}{dt}\\ -\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)&=\frac{dv}{dt}\\ -\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)&=\frac{dw}{dt} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

worin $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ als ganze Beschleunigungskomponenten benutzt sind. Nun ist für einen beliebigen Zeitmoment der Druck p eine Funktion von x, y, z, und die den Änderungen von x, y, z um dx, dy, dz entsprechende Änderung von p ist $(\partial p/\partial x)dx + (\partial p/\partial y)dy + (\partial p/\partial z)dz$, und entsprechend $dV = (\partial V/\partial x)dx + (\partial V/\partial y)dy + (\partial V/\partial z)dz$. Nimmt man dann die drei Bewegungsgleichungen in der zuletzt geschriebenen Form, multipliziert die erste mit dx, die zweite mit dy und die dritte mit dz, so erhält man

$$-\left(dV+\frac{1}{\varrho}dp\right)=\frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz \quad . \; . \quad (14)$$

Nun sei ϱ eine Funktion von p, so daß $1/\varrho$ gleich $f'(p)$ ist, wo $f'(p)$ der Differentialquotient mit Bezug auf p einer Funktion $f(p)$ von p ist. Dann ist die Klammergröße auf der linken Seite für einen gegebenen Augenblick eine reine Funktion der Koordinaten, und der ganze Ausdruck auf der linken Seite bezeichnet die Abnahme von $V + f(p)$, eine Funktion der Koordinaten, die dann statthat, wenn x, y, z sich in $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ verwandeln, und folglich ein vollkommenes Differential ist (§ 356). Die Größe auf der rechten Seite ist daher in diesem Falle erwiesenermaßen ebenfalls ein vollkommenes Differential einer Funktion der Koordinaten x, y, z (die indessen auch noch von t abhängen kann).

360. Lord Kelvins Theorem der Flüssigkeitsbewegung. Man kann mit Recht behaupten, daß in dem folgenden Theorem Lord Kelvins der größere Teil der Theorie der Flüssigkeitsbewegung enthalten ist. Vor Aufstellung des Theorems müssen ein paar Definitionen gegeben werden. Wenn l, m, n die Richtungskosinus eines Elementes einer mit der Flüssigkeit sich bewegenden Reihe von Teilchen sind, so ist der Geschwindigkeitsgrad, womit die Teilchen sich der Reihe entlang bewegen, $lu + mv + nw$. Diese Geschwindigkeit, mit ds, der Länge des Elementes, multipliziert, heißt die Strömung längs dem Element. Wenn dx, dy, dz die Projektionen von ds auf die Axen sind, so sind die Werte von l, m, n, nach § 24, dx/ds, dy/ds, dz/ds. Folglich kann man die Strömung in der Form $udx + vdy + wdz$ schreiben.

Nun betrachte man den Änderungsgrad dieser Größe mit der Zeit in irgend einem Augenblick. Er wird von zwei Dingen abhängen, nämlich den Änderungsgraden von u, v, w und den Änderungsgraden von dx, dy, dz in jenem Augenblick. Die ersteren Änderungsgrade sind $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$, die anderen $d\dot{x}$, $d\dot{y}$, $d\dot{z}$; denn wenn z. B. $\dot{x}$ die Geschwindigkeit in der x-Richtung am einen (linken) Ende von dx ist, so ist $\dot{x} + d\dot{x}$ die Geschwindigkeit am anderen Ende. Die Differenz zwischen diesen Geschwindigkeiten ist $d\dot{x}$, dies ist das Maß, in dem dx an Länge zunimmt, und ebenso sind $d\dot{y}$, $d\dot{z}$ die Grade, in denen dy und dz zunehmen. Für $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ kann man natürlich u, v, w setzen.

Mithin ist die Strömung längs dem Element, wenn sie im Anfang eines Zeitelementes dt gleich $udx + vdy + wdz$ ist, am Ende dieser Zeit

$$\begin{aligned} &\left(u + \frac{du}{dt}dt\right)\left(dx + d\frac{dx}{dt}dt\right) \\ +&\left(v + \frac{dv}{dt}dt\right)\left(dy + d\frac{dy}{dt}dt\right) \\ +&\left(w + \frac{dw}{dt}dt\right)\left(dz + d\frac{dz}{dt}dt\right). \end{aligned}$$

Sonach beträgt die Änderung

$$\left(\frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dt}dz + udu + vdv + wdw\right)dt$$

plus einer mit dt^2 multiplizierten Größe. Wenn man die letztere — da dt sehr klein genommen wird — vernachlässigt und mit dt dividiert, so erhält man für den Änderungsgrad der Strömung die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(udx + vdy + wdz) &= \frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dt}dz + udu + vdv + wdw \\ &= \frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dt}dz + qdq, \end{aligned}$$

wo $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$, das Quadrat der resultierenden Geschwindigkeit ist.

Die Strömung längs einer endlichen in der Flüssigkeit gezogenen Kurve s ist das Integral $\int_s (udx + vdy + wdz)$, längs der Kurve von einem Ende zum andern genommen. (Daß ein Integral längs einer Kurve oder über eine Oberfläche genommen ist, wird durch das Suffix s oder S unter dem Integral bezeichnet.) Somit ist der Änderungsgrad der Strömung längs dem endlichen Bogen s nach dem schon erhaltenen Ergebnis:

$$\frac{d}{dt}\int_s (udx + vdy + wdz) = \int_s \left(\frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dt}dz\right) + \tfrac{1}{2}(q_1^2 - q_0^2) \tag{15}$$

wo q_0, q_1 die Werte der Geschwindigkeit am Anfangs- und Endpunkt der Linie sind. Dies ist das Lord Kelvinsche Theorem.

Ist die Kurve geschlossen, so ist $q_1 = q_0$, und das Glied unter dem Integral auf der rechten Seite verschwindet. Auch in dem Falle, wo $\dot{u}dx + \dot{v}dy + \dot{w}dz$ ein vollkommenes Differential einer einwertigen Funktion der Koordinaten ist, wofür die Bedingungen in § 359 aufgestellt worden sind, verschwindet das Integral auf der rechten Seite, und die Strömung längs der Kurve s ist konstant, wenn sich die Kurve mit der Flüssigkeit bewegt.

Das Theorem von Lord Kelvin wird durch die folgende, nach Gl. (15) aus § 359 abgeleitete Formel ausgedrückt:

$$\frac{d}{dt}\int_s (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = -\int_s \frac{dp}{\varrho} - V_1 + V_0 + \tfrac{1}{2}(q_1^2 - q_0^2) \quad (16)$$

Die einzigen notwendigen Bedingungen, um zu beweisen, daß die Größe auf der linken Seite verschwindet, wenn das Integral um eine geschlossene Bahn genommen wird, sind also, daß $1/\varrho = f'(p)$ und daß $\int f'(p)dp$ oder $f(p)$ und V einwertige Funktionen der Koordinaten seien.

Das Integral $\int(udx + vdy + wdz)$ um eine geschlossene Kurve wird die Zirkulation um die Kurve genannt. Demnach sagt Lord Kelvins Theorem für diesen Fall aus, daß, wenn unter den aufgestellten Bedingungen die Zirkulation für eine sich mit der Flüssigkeit bewegende geschlossene Kurve in einem Augenblick null ist, sie dann für immer null ist.

361. Geschwindigkeitsquirl. Wirbelstärke. Zirkulation um eine Kurve als Oberflächenintegral der Wirbelstärke ausgedrückt. Man denke sich jetzt eine geschlossene Kurve, die sich mit der Flüssigkeit bewegt und eine Oberfläche, die durch diese Kurve begrenzt wird. Es sei dS ein Oberflächenelement und ds ein Kurvenelement, und l, m, n seien die Richtungskosinus der nach der positiven Oberflächenseite zu gezogenen Normalen von dS.

Die positive Seite der Oberfläche wird folgendermaßen definiert. Das Integral $\int(udx + vdy + wdz)$ wird um die geschlossene Kurve in einer als positiv gewählten Richtung genommen, dann denkt man sich einen Beschauer in der positiven Richtung auf der Kurve herumgehend, während die Oberfläche zu seiner Linken liegt, dann sieht der Beschauer auf die positive Seite der Fläche herunter.

Es gibt tatsächlich für jedes Element der Fläche zwei zusammengehörige positive Richtungen, die eine längs des Randes, die andere in der Normale zum Element. Diese stehen im selben Zusammenhange, wie die Drehungsrichtung und die Fortschrittsrichtung einer rechtsdrehenden Schraube.

Man kann jede durch eine einzige geschlossene Kurve begrenzte Fläche in unendlich kleine Elemente nach jeder Richtung einteilen,

indem man Linien über die Fläche zieht. Man denke sich dies ausgeführt und die Grenze aller Elemente nacheinander in der positiven Richtung durchlaufen. Jede Grenzlinie wird bei diesem Prozeß zweimal, aber in entgegengesetzten Richtungen, durchlaufen werden, wenn sie zwei aneinander stoßenden Flächenelementen angehört, und nur einmal, wenn sie einen Teil der Grenze der ganzen Fläche ausmacht.

Wenn die äußere begrenzende Kurve Regionen, wie A und B, einschließt, über die das Flächenintegral nicht zu nehmen ist, so muß das Integral um die Grenzen auf die Ränder aller solcher Regionen ausgedehnt werden. Fig. 195 zeigt die Richtung der Linienintegration für solche Teile der Grenze, entsprechend den oben ausgesprochenen Grundsätzen.

Ist diese Einsicht gewonnen, so kann man jetzt das folgende Theorem beweisen:

$$\int(u dx + v dy + w dz) = 2\int(l\xi + m\eta + n\zeta) dS \quad . . (17)$$

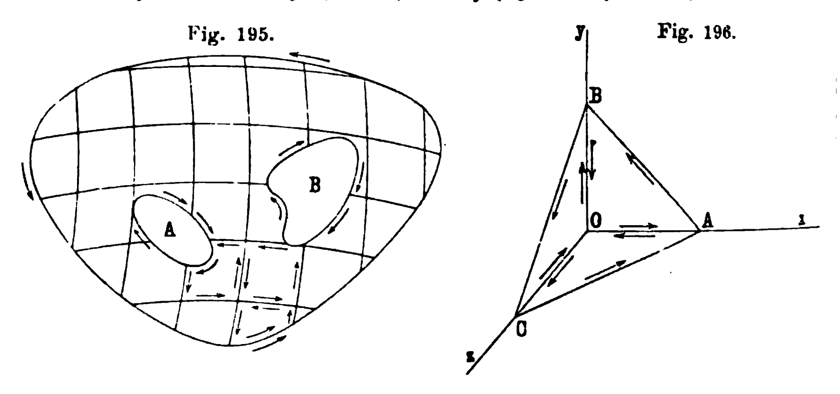


Fig. 195. Fig. 196.

wo das zweite Integral über die Fläche und das erste um die ganze Begrenzungslinie genommen ist, und wo die Größen $\xi\,\eta\,\zeta$ die in Gl. (10) definierten Wirbelkomponenten sind.

Die Fig. 196 möge zum Beweise dienen. $ABCA$ sei ein dreieckiges Element der Oberfläche. OA, OB, OC seien Linien, die von einem Punkte O parallel mit den Koordinatenaxen nach den Ecken des Dreiecks gezogen sind. Dann hat man, wenn man nach der Reihenfolge der Buchstaben A, B, C herumgeht:

$$\int\limits_{ABCA}\left(u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds} + w\frac{dz}{ds}\right)ds$$

$$= \int\limits_{OABO}\left(u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds}\right)ds + \int\limits_{OBCO}\left(v\frac{dy}{ds} + w\frac{dz}{ds}\right)ds + \int\limits_{OCAO}\left(w\frac{dz}{ds} + u\frac{dx}{ds}\right)ds.$$

Ist das Element sehr klein, und sind dx, dy, dz die Längen von OA, OB, OC, so kann man bei der Berechnung der drei Integrale auf

der rechten Seite für u, v, w die Werte benutzen, die sie in den Mittelpunkten von OA, OB, OC haben. Nehmen wir das erste von den dreien, so ist offenbar

$$\left(u + \tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx - \left(u + \tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}dx + \tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)dx$$
$$+ \left(v + \tfrac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}dx + \tfrac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)dy - \left(v + \tfrac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)dy,$$

was sich auf

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy = n\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dS$$

reduziert, wenn n der Kosinus des Winkels ist, den die Normale zur Fläche ABC mit OC, der Normalen zur Fläche AOB bildet, und dS die Fläche des Dreiecks ABC bezeichnet.

Auf dieselbe Weise erhält man die beiden anderen Integrale und hat folglich für das Element ABC:

$$\left.\begin{aligned}\int(u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \Big\{l\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\\ + m\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + n\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big\}dS\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (18)$$

Hier ist die positive Richtung der Normale von dS diejenige, welche sich von O entfernt.

Führt man dies aus für die ganze, mittels ihrer Schnitte mit, den Koordinatenebenen parallelen Ebenen in dreieckige Elemente eingeteilte Oberfläche (und eine solche Einteilung der Oberfläche ist möglich), addiert man die Linienintegrale zu einer Summe und die Flächenintegrale zu einer anderen Summe zusammen, so heben sich die Linienintegrale für die Seiten, die zwei benachbarten Dreiecken gemeinsam sind, auf und lassen nur das Linienintegral einmal um die ganze Begrenzungslinie herum übrig. Somit ist nach Gl. (10) das in Gl. (17) ausgesprochene Theorem bewiesen.

Es ist dies ein überaus wichtiges Theorem, das für jede Richtungsgröße gilt, deren Komponenten u, v, w sind. Die Komponenten $\frac{1}{2}(\partial w/\partial y - \partial v/\partial z)$, ..., also ξ, η, ζ können als die mit x, y, z parallelen Komponenten einer anderen Richtungsgröße angesehen werden, deren Komponente längs der Normalen, also die sog. Wirbelintensität, durch die Größe in geschwungenen Klammern auf der rechten Seite von Gl. (18) gegeben ist. Die Komponenten $\frac{1}{2}(\partial w/\partial y - \partial v/\partial z)$, ... selbst, also die Wirbelkomponenten, heißen auch „Quirl"-Komponenten von u, v, w; der hier erörterte Prozeß der Ableitung einer Richtungsgröße von einer anderen wird manchmal „quirlen" genannt.

Wenn man jetzt zur Gl (17) zurückkehrt, so sieht man, daß, wenn ξ, η, ζ alle null sind für jede von einer Kurve eingeschlossenen Ober-

fläche, auch die Zirkulation um die Kurve null ist. Somit muß sie, wenn sie für eine von der Kurve eingeschlossene Oberfläche null ist, für jede solche Oberfläche null sein, d. h. jede solche Oberfläche muß ein Integral null der Wirbelintensität ergeben.

Nun kennt man aus dem Lord Kelvinschen Theorem das Ergebnis, daß unter den in § 359 festgesetzten Umständen die Zirkulation, wenn sie in irgend einem Augenblick null ist, von da ab immer null ist. Folglich ist das Oberflächenintegral des Quirls, wenn es für die von einer Kurve eingeschlossene Oberfläche einmal null ist, von da ab immer null. Da dies für alle sich mit der Flüssigkeit bewegenden Kurven, die gezeichnet werden können, Anwendung findet, so folgt daraus, daß, wenn ξ, η, ζ einmal für einen Teil der Flüssigkeit null sind, sie für denselben fortan immer null bleiben müssen.

Dieser überaus wichtige Satz führt offenbar zu der Konsequenz, daß in einer idealen (d. h. zähigkeitsfreien) Flüssigkeit Wirbelbewegung weder entstehen noch vergehen kann. Wirbelbewegung ist also immer Folge von innerer Reibung; und einmal vorhanden, kann sie auch nur durch Reibung vernichtet werden.

Die Grundlagen und die allgemeine Theorie der Wirbelbewegung sind, nach vorangegangenen Anläufen von Svanberg (1839) und Stokes (1845), in der berühmten Abhandlung von Helmholtz (1858) „Über die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen", gegeben worden. Im Anschluß an ihn haben dann insbesondere W. Thomson (jetzt Lord Kelvin), J. J. Thomson, Hankel und Beltrami die allgemeine Theorie gefördert, und Lord Kelvin hat sogar, gestützt auf die festgestellte Unzerstörbarkeit der Wirbel, eine Theorie der Materie (Wirbelatom-Hypothese) darauf aufgebaut.

Von einigen speziellen Fällen von Wirbelbewegung wird noch die Rede sein.

---

362. Erstes Integral der Bewegungsgleichungen. Stationäre Bewegung. Wir nehmen jetzt ein Geschwindigkeitspotential als vorhanden an; V sei eine einwertige Funktion der Koordinaten für einen beliebig zu wählenden Zeitpunkt; die linke Seite von Gl. (16) lautet $-d(\varphi_1 - \varphi_0)/dt$, so daß die Gleichung jetzt wird:

$$\left[-\frac{d\varphi}{dt} + \int \frac{dp}{\varrho} + V - \tfrac{1}{2} q^2\right]_s = 0 \quad . \quad . \quad (19)$$

Nun ist aber

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - q^2,$$

so daß Gl. (19) in der Form

$$\left[\int \frac{dp}{\varrho} + \tfrac{1}{2} q^2 + V\right]_s = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

geschrieben werden kann.

Wenn φ sich in einem bestimmten Raumpunkte nicht ändert, oder, wie der übliche technische Ausdruck lautet, wenn φ keine explizierte Funktion der Zeit ist, so ist $\partial \varphi / \partial t = 0$, und man nennt alsdann die Bewegung **stationär**. Die letzte Gleichung kann dann, unter Weglassung der Suffixe für die Integrale, in der Form

$$\int \frac{dp}{\varrho} + \tfrac{1}{2} q^2 + V = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

geschrieben werden, wo C der Wert des Ausdrucks auf der rechten Seite von Gl. (20) für den Anfangspunkt der Linie ist. Die Größe auf der linken Seite ist die totale Energie der Flüssigkeit pro Masseneinheit in dem betrachteten Punkte. Wenn p in absoluten Krafteinheiten pro Flächeneinheit genommen wird, ist $(\int dp / \varrho + \frac{1}{2} q^2 + V)/g$ eine Größe, die manchmal die **dynamische Druckhöhe** der Flüssigkeit genannt wird (§ 352). Also gibt es im Falle der stationären Bewegung Konstanz der dynamischen Druckhöhe sowohl in einem bestimmten Punkte der Flüssigkeit, als in jedem Teilchen bei seiner Bewegung.

Wenn ϱ eine Funktion von p ist, so hat man für $\int dp/\varrho$ den Wert $f(p)$ und folglich

$$f(p_1) - f(p_0) + \tfrac{1}{2}(q_1^2 - q_0^2) + (V_1 - V_0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Demnach ist, wenn der Druck an beiden Enden der Linie derselbe, d. h. $f(p_1) = f(p_0)$ ist:

$$\tfrac{1}{2}(q_1^2 - q_0^2) = - V_1 + V_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Für den Fall einer inkompressibeln (tropfbaren) Flüssigkeit, für die ϱ als unabhängig vom Druck gelten kann, ist $f(p) = p/\varrho$, und Gl. (22) wird einfacher:

$$\frac{1}{\varrho}(p_1 - p_0) + \tfrac{1}{2}(q_1^2 - q_0^2) + (V_1 - V_0) = 0 \quad . \quad . \quad (24)$$

Kehren wir nochmals zur Gl. (20) zurück, so muß streng beobachtet werden, daß sie nicht den tatsächlichen Wert des Druckes in einem Punkt gibt. Sie gibt nicht mehr als — wenn ϱ und V bekannt sind — den Unterschied zwischen den Werten von p in zwei Punkten der Flüssigkeit. Wenn ϱ konstant ist, so ist die Gleichung

$$p_1 - p_0 + \tfrac{1}{2}\varrho(q_1^2 - q_0^2) + \varrho(V_1 - V_0) = \varrho\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_s \quad (25)$$

Natürlich ist dieser Druck nicht notwendig unbekannt. Er kann in den meisten Fällen experimentell ermittelt werden.

363. Stromlinien. Eine Idee von großer Wichtigkeit und Brauchbarkeit in der Flüssigkeitsbewegung ist die Idee der Strom-

linie; das ist eine derart in der Flüssigkeit gezogene Kurve, daß für einen beliebigen Augenblick die Bewegungsrichtung der Flüssigkeit in jedem beliebigen Element die der Tangente an die Kurve ist. Wenn ds ein Längenelement einer Stromlinie ist, und dx, dy, dz seine Projektionen auf die x-, y- und z-Axen sind, so sind die Gleichungen der Stromlinie

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{ds}{q} \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

oder, wenn sich die Geschwindigkeiten von einem Potential ableiten lassen,

$$\frac{dx}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} = \frac{ds}{\frac{\partial \varphi}{\partial s}} \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

Somit ist eine Stromlinie in jedem Punkte senkrecht zur Fläche gleichen Geschwindigkeitspotentials an der betreffenden Stelle. Diese Stromlinien sind den Kraftlinien bei der Anziehung durch die Schwere und bei der elektrischen und magnetischen Anziehung und Abstoßung genau analog. (S. weiter unten Kap. X.)

Die Strömung längs einem Stromlinienelement ist, wie wir sehen, $udx + vdy + wdz$ oder qds, und es ergibt sich demnach

$$\frac{d}{dt}\int_s qds = \int_s \frac{dq}{dt}ds + \int_s qdq = \int_s \frac{dq}{dt}ds + \tfrac{1}{2}(q_1^2 - q_0^2) \quad \ldots \quad (28)$$

Für den Fall der stationären Bewegung hat man

$$\frac{d}{dt}(qds) = \frac{dq}{ds}\,qds + qdq = 2qdq,$$

so daß aus dem Lord Kelvin schen Theorem, wenn es auf eine Stromlinie in einer in stationärer Bewegung befindlichen Flüssigkeit angewandt wird, der Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}(q_1^2 - q_0^2) = \int_s \frac{dq}{dt}\,ds = -V_1 + V_0 - \int_s \frac{dp}{\varrho} \quad \ldots \quad (29)$$

entsteht.

Unterdrückt man die Suffixe für die Werte der Größen am Ende der Linie, und bezeichnet man mit C den Wert von $\frac{1}{2}q_0^2 + V_0 +$ dem Anfangswert von $\int dp/\varrho$, so ergibt sich

$$\tfrac{1}{2}q^2 + \int \frac{dp}{\varrho} + V = C. \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

Also hat C für alle Punkte einer Stromlinie einen bestimmten Wert, aber im allgemeinen verschiedene Werte für verschiedene Stromlinien. Die Gleichung ist, wie man sieht, dieselbe wie die für eine beliebige Bahn unter Voraussetzung der Existenz eines Geschwindigkeitspotentials gefundene (21); hier gilt sie aber nicht für eine Bahnlinie, son-

dern für eine **Stromlinie**, und man sieht, was freilich auch sonst einleuchtet, daß bei der stationären Bewegung Bahnlinie und Stromlinie identische Begriffe sind (im allgemeinen aber nicht). Man verdankt obiges Theorem Daniel Bernoulli, der es in seiner „Hydrodynamica" (1738) mitteilt. Es ist dort praktisch gefunden aus der Betrachtung der auf einen Teil der Flüssigkeit auf dem Wege längs der Stromlinie von einem Punkt zu einem anderen geleisteten Arbeit (s. §§ 210, 362).

Die Gl. (30) drückt die Tatsache der Konstanz der Energie der Flüssigkeit in irgend einem Raumteile für den Fall stationärer Bewegung aus Denn man betrachte ein Stück der Flüssigkeit, das durch einen Mantel von Stromlinien und zwei auf ihnen senkrechte Endflächen (A und B) begrenzt ist. Die bei A eintretende Masseneinheit einer Flüssigkeit bringt die kinetische Energie $\frac{1}{2} q_0^2$ und die potentielle V_0 mit, die in B austretende nimmt die kinetische Energie $\frac{1}{2} q_1^2$ und die potentielle V_1 mit sich fort. Insoweit findet also ein Energiegewinn im Betrage von

$$\tfrac{1}{2}(q_0^2 - q_1^2) + (V_0 - V_1)$$

statt. Außerdem aber leistet die bei A eintretende Flüssigkeit auf die schon in dem Raume befindliche die Arbeit p_0/ϱ_0, und letztere ihrerseits leistet auf die bei B austretende die Arbeit p_1/ϱ_1. Das ergibt einen weiteren Energiegewinn in Höhe von $(p_0/\varrho_0) - (p_1/\varrho_1)$. Hiermit ist aber immer noch nicht alles berücksichtigt. Denn die eintretende Masse hat das Volumen $1/\varrho_0$, die austretende das Volumen $1/\varrho_1$; es wird also noch eine weitere Arbeit $\int p\,d(1/\varrho)$, oder ausgeführt:

$$\frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_0}{\varrho_0} - \int \frac{dp}{\varrho},$$

auf die innere Flüssigkeit geleistet; auch sie stellt einen Energiezuwachs dar. Addiert man nun alle drei Teile, beachtet, daß sich die Glieder p_0/ϱ_0 und p_1/ϱ_0 gegen die gleichen negativen fortheben, und bedenkt, daß dieser ganze Gewinn null sein muß, so erhält man:

$$\frac{1}{2} q_0^2 - \frac{1}{2} q_1^2 + V_0 - V_1 - \int_0^1 \frac{dp}{\varrho} = 0,$$

oder, wenn man wieder C einführt, genau die Gl. (30).

364. Zweidimensionale Bewegung. Ein sehr wichtiger Spezialfall der Bewegung ist der, wo sie von einer der Koordinaten, z. B. z, unabhängig ist; dies wird gewöhnlich Bewegung in zwei Dimensionen genannt. Für diesen Fall ist die Kontinuitätsgleichung, wenn die Flüssigkeit inkompressibel ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (31)$$

Die Gleichung einer Stromlinie kann für zweidimensionale Bewegung in der Form

$$u\,dy - v\,dx = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (32)$$

geschrieben werden, und die eben mitgeteilte Kontinuitätsgleichung ist die Bedingung, daß sich die Geschwindigkeiten u, v von einer Funktion ψ der Koordinaten (und vielleicht von t), der sog. Stromfunktion, durch die Gleichungen

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

ableiten lassen. Die Gleichung der Stromlinie kann demnach in der Form

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

geschrieben werden.

Gl. (34) zeigt, daß ψ weder von x, noch von y direkt, sondern nur von t abhängt, d. h. sie ergibt integriert

$$\psi = F(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

und speziell, wenn die Bewegung stationär ist,

$$\psi = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

die Integralgleichung einer Stromlinie im Falle stationärer Bewegung. Diese Gleichung kann als für die ganze Schaar der Stromlinien gültig angesehen werden, wenn C als von einer Stromlinie zur anderen variierend angesehen wird.

Wenn es ein Geschwindigkeitspotential φ gibt (das natürlich ebenfalls eine Funktion von x, y, t ist im Falle zweidimensionaler Bewegung), so ergeben die beiden Ausdrücke für jede Geschwindigkeitskomponente

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

So erhält man als Kontinuitätsgleichung für eine inkompressible Flüssigkeit

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

und die zugehörige Gleichung für ψ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Fig. 197.

Diese letztere drückt die Tatsache aus, daß die Größe $\partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ das Doppelte der Winkelgeschwindigkeit eines Flüssigkeitselementes um eine Axe parallel zur z-Axe) null ist, d. h. daß die Bewegung eine nicht wirbelnde ist.

Man betrachte ein Element ds einer Linie gleichen Potentials; die Komponenten von ds nach den Axen sind dx und dy. Die Strömung durch ds ist (s. Fig. 197) $v dx - u dy$. Nun ist aber

$$v dx - u dy = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi,$$

d. h. $d\psi$ ist das Maß der Strömungsgeschwindigkeit durch ds (AB in Fig. 197) in der Richtung von rechts nach links für einen längs ds in der positiven Richtung blickenden Beschauer (in Fig. 176 von A nach B).

Die Differentialgleichung einer Linie gleichen Potentials ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0 \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

und die einer Stromlinie ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx - \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy = 0 \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

woraus hervorgeht, daß Linien gleichen Potentials und Stromlinien zueinander senkrechte Scharen von Kurven sind. Die gleiche Tatsache folgt auch aus der durch Multiplikation der Gl. (37) sich ergebenden Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

d. h.:

$$\cos(\varphi = const, \quad \psi = const) = 0.$$

365. Konjugierte Funktionen. Die Gl. (37) sind die analytischen Bedingungen dafür, daß $W = \varphi + i\psi$ $\left(i = \sqrt{-1}\right)$ eine Funktion der komplexen Variablen $z = x + iy$ ist; mit anderen Worten: W ändert sich mit z in dem Verhältnis, daß der Änderungsgrad dW/dz von W nach z von der speziellen z zugehörigen Änderung, d. h. von der Beziehung von dx zu dy, unabhängig ist. Wenn man also, wie in § 28, x durch die Entfernung auf der x-Axe von einem gewählten Anfangspunkte aus, y durch die Entfernung auf der y-Axe und z durch die Strecke OP darstellt, wo P der durch die rechtwinkligen Koordinaten x, y gegebene Punkt ist, so ist dW/dz von der Richtung der unendlich kleinen Strecke PQ ($= dz$) von P nach einem dicht benachbarten Punkte Q unabhängig. Der Beweis, daß dies in den Gl. (37) ausgesprochen ist, wird dem Leser überlassen. Es ist ein elementares Theorem, das in der Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen bewiesen wird.

Wenn man dann eine Funktion W der komplexen Variablen z finden kann, und wenn, wie es immer möglich ist, diese Funktion in der Form $\varphi + i\psi$, wo φ und ψ Funktionen der reellen Variablen x und y sind, ausgedrückt wird, so sieht man, daß die Kurven

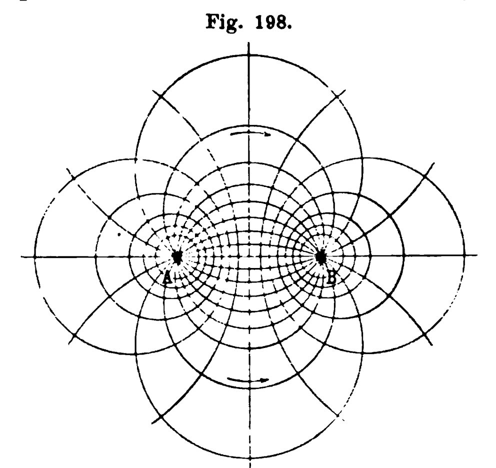
$$\varphi = const, \qquad \psi = const \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

ein konjugiertes System bilden, d. h. daß, wenn irgend eine dieser beiden Kurvenscharen als Linien gleichen Potentials gewählt wird, die andere Schar das korrespondierende System von Stromlinien ist. Alsdann sind φ und ψ sogenannte konjugierte Funktionen.

In Fig. 198 sind zwei solcher Scharen konjugierter Kurven veranschaulicht. Man kann sie 1. als die Stromlinien und Äquipotentiallinien ansehen, die von zwei punktförmigen Polen, nämlich einer Quelle (positiv) und einer Senke (negativ) ausgehen. Die Flüssigkeit strömt entlang den von A sich ausbreitenden und in B konvergierenden Linien aus; die geschlossenen Kurven (Kreise) um die Quellen herum sind die Kurven gleichen Potentials.

Man kann aber die Kurven auch 2. als Strömungslinien und Äquipotentialkurven ansehen für eine Flüssigkeit, die sich wirbelfrei in geschlossenen Bahnen um A und B in entgegengesetzten Richtungen auf beiden Seiten der von oben nach unten auf dem Blatte gezogenen Mittellinie bewegt. Diese Mittellinie ist eine geradlinige Stromlinie sowohl für A als für B. Dann sind die von A ausstrahlenden und in B zusammenlaufenden Kurven die Kurven gleichen Potentials.

Fig. 198.



Die Theorie der konjugierten Funktionen wird in den Büchern über die Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln, sowie in dem Buche von Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, behandelt. Auf diese und die Lehrbücher über Elektrizität und Magnetismus muß für die vollständige Darlegung der Eigenschaften dieser Funktionen, sowie für das Prinzip der konformen Abbildung verwiesen werden, mit dessen Hilfe man aus der Lösung eines Problems die Lösungen anderer ableiten kann.

366. Wirkung der Bewegung auf den Druck. Torricellisches Theorem. In § 362 wurde das wichtige Ergebnis gefunden, daß der Druck in einem Punkte um $\frac{1}{2}\varrho q^2$ kleiner ist, als er wäre, wenn keine Bewegung statthätte, wo q die Geschwindigkeit in dem Punkte ist. Ein vortreffliches Beispiel hierfür liefert eine unter der Wirkung der Schwerkraft aus einer Öffnung in einem Gefäße ausfließende Flüssigkeit, deren Oberfläche ebenso wie der Strahl unter Atmosphärendruck steht, während entweder dadurch, daß der Querschnitt des Gefäßes im Vergleich mit dem der Öffnung groß ist, oder durch beständiges Ersetzen der Flüssigkeit das Niveau der freien Oberfläche erhalten bleibt. Wählt man eine Bahn, die in der freien Oberfläche anfängt und in der Strahloberfläche endet, so ist $V = -gz$,

wo z von irgend einem gewählten Niveau nach unten gemessen ist. Folglich ist, wenn h die Tiefe des gewählten Strahlpunktes unter der freien Oberfläche ist, $q_0 = 0$, $V_1 - V_0 = -gh$, und

$$q^2 = 2gh \qquad (41)$$

wo q die Geschwindigkeit im Strahl im gewählten Punkte auf seiner Oberfläche ist. Dieser Satz ist bekannt als das Torricellische Theorem.

Es muß streng beachtet werden, daß dieser Satz nichts über die Geschwindigkeit innerhalb des ausfließenden Strahles aussagt. Diese hängt von dem Werte, den p in dem in Betracht stehenden Punkte hat, ab.

367. Geschwindigkeit im Strahl. Vena contracta. Obgleich die Geschwindigkeit in der Oberfläche des ausfließenden Strahles nach dem Torricellischen Theorem gegeben ist, so kann diese, wie gesagt, nicht als Geschwindigkeit für den ganzen Strahl gelten. Ein Stück weit vor der Mündung innerhalb des Gefäßes sind die Stromlinien der Flüssigkeit konvergent, und diese Konvergenz setzt sich in dem Strahle außerhalb der Mündung fort. Daher ist die Geschwindigkeit im Innern des Strahles geringer als an der Oberfläche, der Druck größer. Ein kleines Stückchen außerhalb der Mündung sind dann die Stromlinien parallel geworden, und man kann die Geschwindigkeit dort als gleichförmig über den ganzen Querschnitt und den Druck als Atmosphärendruck annehmen. Der Querschnitt ist kleiner als der der Mündung, und die Geschwindigkeit ist jene $(\sqrt{2gh})$ des Falles durch die Höhe h von der Oberfläche bis zum Querschnitte.

Diese sogenannte Vena contracta hat einen von den Umständen abhängigen Flächeninhalt, dessen Betrag zu untersuchen außer in gewissen speziellen Fällen unmöglich ist. Immerhin kann erwiesen werden, daß er kleiner als der Flächeninhalt der wirklichen Öffnung ist; denn stellen wir uns einmal die Flüssigkeit in dem Gefäße vor, wenn die Mündung verstopft wird. Die Druckkraft der Flüssigkeit auf jedes Element der Wandung ist von einer gleich und entgegengesetzt wirkenden Kraft von seiten der Wandung auf die Flüssigkeit begleitet. So kann also die von einem Wandungselemente auf die Flüssigkeit wirkende Kraft als durch die von einem entgegengesetzten Elemente der Zwischenfläche wirkende Kraft ausgeglichen angesehen werden, so daß gar keine Bewegung der Flüssigkeit statthat.

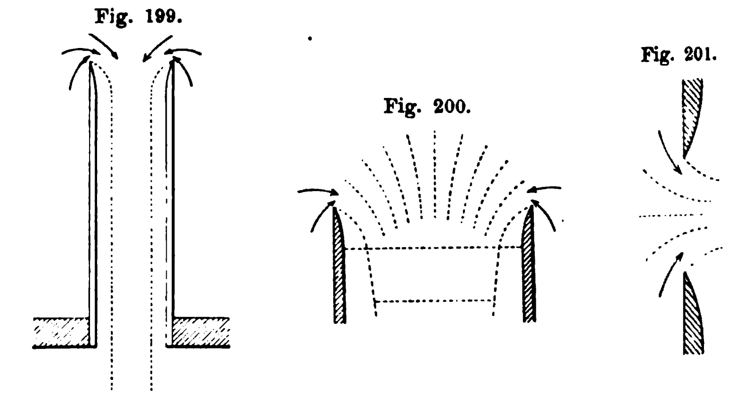
Wird jetzt die Mündung geöffnet, so wirkt eine Kraft, die unausgeglichen bleibt, von der Wandung gegenüber der Öffnung auf die Flüssigkeit. Wenn h die Tiefe unter der Oberfläche und a der Flächeninhalt der Mündung ist, so ist die nicht aufgehobene wirkende Kraft $g\varrho ah$ oder, im Gewichtsmaße, ϱah. Dies muß die in der Zeiteinheit in der ausströmenden Flüssigkeit erzeugte Bewegungsgröße sein, wenn

der Druck auf jeden anderen Teil der Wandung $g\varrho a h$ ist, was annähernd der Fall sein wird, wenn der Bewegungsbereich innerhalb des Gefäßes von der Wandung entfernt liegt, so, wenn die Öffnung aus einer scharf abgeschnittenen Röhre besteht, die etwas in die Flüssigkeit hineinragt, Fig. 199. In diesem Falle hat man $\varrho a' v^2$ für die Bewegungsgröße der in der Zeiteinheit ausströmenden Flüssigkeit, wenn a' der wirksame Flächeninhalt der Öffnung ist, d. h. der Querschnitt des zusammengezogenen Strahles, da das Gewicht $\varrho a' v$ mit der Geschwindigkeit v ausströmt. Dies muß also $g\varrho a h$ sein, und folglich ist

$$v^2 = \frac{a}{a'} g h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Dieses Ergebnis ist von Borda[1]) festgestellt worden, welcher $a' = a/1{,}924$ fand bei einer Mündung, die aus einer hereinragenden Röhre, wie beschrieben, gebildet wurde.

Die beigegebenen Zeichnungen Fig. 199 und Fig. 200 zeigen die Strömung in einer einspringenden Röhre mit scharfem Rande; die erste


Fig. 199. Fig. 200. Fig. 201.

gibt die allgemeine Natur des Strahles, die zweite die Stromlinien nahe am Rande. Fig. 201 zeigt die Stromlinien nahe einer Mündung mit scharfem Rande in der senkrechten Wand eines Gefäßes.

In den meisten Fällen ist die oben angegebene Bedingung nur näherungsweise erfüllt. Wenn z. B. die Öffnung in der senkrechten Wand des Gefäßes angebracht ist, gibt es eine beträchtliche Bewegung in der benachbarten Flüssigkeit, und dementsprechend ist der Druck erniedrigt. Die Strömung entspricht daher einem nicht ausgeglichenen Druck über ein gegenüberliegendes Stück Oberfläche, das größer ist als die Mündung, und der Strahl nähert sich im Flächeninhalt mehr der Öffnung.

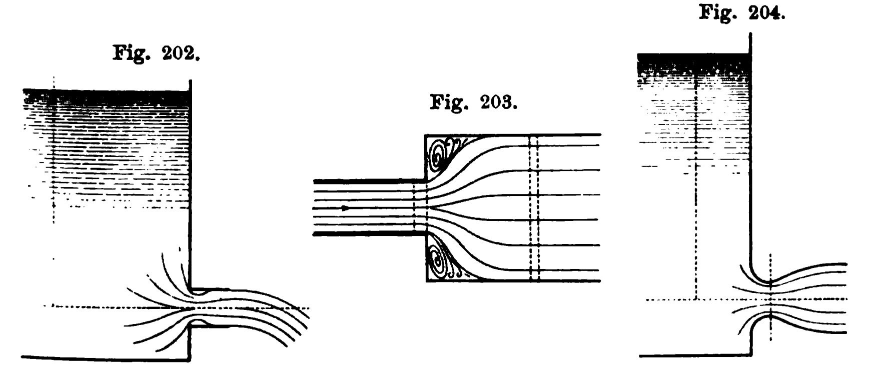
---

[1]) Mém. de l'Académie des Sciences, 1786. Für die Theorie der Vena contracta s. a. die ges. Abh. von Helmholtz, Kirchhoff, Lord Rayleigh u. a. Ein mit Bordas übereinstimmendes Resultat erhielt auch Froude.

Auch gibt es in allen Fällen eine kleine Abnahme der Geschwindigkeit durch die Reibung, so daß, wenn c_1 das Verhältnis a'/a und c_2 das Verhältnis der wirklichen Entleerungsgeschwindigkeit zum Torricellischen Werte ist, für das ausgeflossene Volumen pro Sekunde der Ausdruck gilt: $c_1 c_2 a \sqrt{2gh}$ oder $ca\sqrt{2gh}$, wenn $c = c_1 c_2$ ist.

Man kann annehmen, daß für Öffnungen in den Wänden oder auf dem Boden eines Gefäßes ohne hervor- oder hineinragendes Mundstück c ungefähr 0,62 beträgt.

368. Strömung durch ein sich erweiterndes Rohr. Eine stärkere Strömung wird erzielt, wenn man die Mündung mit einer hervorragenden Röhre versieht, wie in Fig. 202. Für ein Mundstück, senkrecht zur Wand, mit der es scharf zusammenstößt, ist der Wert von c ungefähr 0,82. Es findet ein Druckverlust statt infolge der Erscheinung, daß das Rohr direkt außerhalb der inneren Mündung nicht vollständig mit den Stromlinien der Flüssigkeit angefüllt ist. Innerhalb dieses Raumes bilden sich Strudel und Wirbel (ähnlich wie


Fig. 202. Fig. 203. Fig. 204.

bei einem Rohr mit plötzlich sich erweiterndem Querschnitt, Fig. 203), die eine Vergeudung von Druckhöhenenergie bedingen durch die gegen die Reibung geleistete Arbeit.

Eine stärkere Strömung, ja eine über die obere der Öffnung im Gefäße entsprechende Grenze hinausgehende Strömung gewinnt man, wenn man das Mundstück dem durch die Stromlinien beim Ausfluß gebildeten Strahl so ähnlich als möglich macht, aber sich nach außen erweitern und nach und nach zylindrisch werden läßt (Fig. 204). Dann wird der soeben erwähnte Druckverlust vermieden, und für ein glattes, gut gearbeitetes Ansatzrohr dieser Art wird eine Geschwindigkeit von nur ungefähr 3 Proz. unter der Grenze erreicht.

Die Geschwindigkeit ist also etwas kleiner als $\sqrt{2gh}$, aber der Flächeninhalt der Gefäßmündung ist wirklich der der Röhrenmündung. Das Mundstück muß sich aber zuerst füllen, d. h. es muß gefüllt sein, ehe die Strömung beginnen kann. Die Geschwindigkeit durch den

verengten Teil des Strahles nahe der Verbindung des Mundstückes mit dem Gefäße ist natürlich größer als die an der Mündung, und dementsprechend ist der Druck kleiner. Wird die Fläche des engsten Teiles sehr klein gemacht, so kann der Druck sich dem Nullwerte nähern, und die Annäherung an diesen Wert macht sich dadurch geltend, daß sich der Strahl von der Oberfläche des Mundstückes loslöst und nur noch einen Teil des Ausflußraumes einnimmt. Denn wenn P der Druck an der Stelle, wo der Strahl zylindrisch geworden ist, p der Druck im Ansatz ist und V und v die entsprechenden Geschwindigkeiten sind, so ergibt sich $P - p = \frac{1}{2}\varrho\,(v^2 - V^2)$. Wenn aber A und a die Flächen sind, so ist $v/V = A/a$ und somit:

$$P - p = \frac{1}{2}\varrho\,V^2\left(\frac{A^2}{a^2} - 1\right) \text{ oder } P - p = g\varrho h\left(\frac{A^2}{a^2} - 1\right).$$

Wenn dann

$$P \overline{\gtrless}\, g\varrho h\left(\frac{A^2}{a^2} - 1\right)$$

ist, so ist $p \overline{\gtrless}\, 0$, d. h. wenn

$$\frac{A^2}{a^2} \overline{\gtrless}\, \frac{P + g\varrho h}{g\varrho h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

ist, so ist der Druck im Halse des Rohres gleich oder kleiner als null. Nun ist aber experimentell gefunden worden, daß eine Flüssigkeit, die Luftblasen enthält, wie Wasser meistens, keinen negativen Druck, also streckende Kraft, aushalten kann, und so wird in Wahrheit die Grenze erreicht, ehe A^2 so groß geworden ist, daß

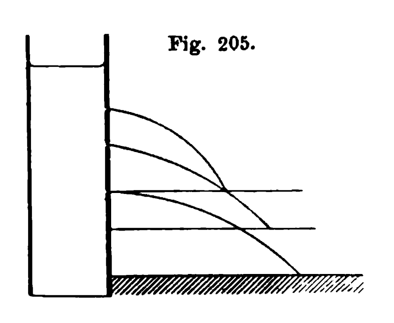
$$\frac{A^2}{a^2} = \frac{P + g\varrho h}{g\varrho h} = \frac{r + 1}{1} \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

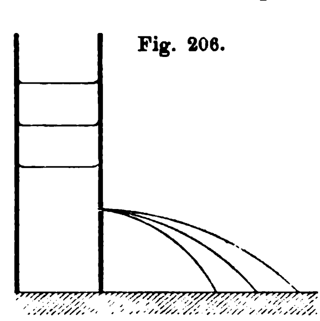
ist, wo r das Verhältnis des Druckes P zu dem der Druckhöhe h zugehörigen Drucke ist. Also hat man, wenn $g\varrho h = P$ ist, $A^2/a^2 = 2$ oder $A = a\sqrt{2}$.

Es genügt also nicht, um den Verbrauch von Wasser aus einem Reservoir zu bestimmen, nur die Fläche der Öffnung in der Wand des Reservoirs in Betracht zu ziehen; die Form des Rohres außerhalb muß auch beachtet werden. Schon den Römern war diese Art, die Strömung durch eine Öffnung zu verstärken, bekannt, und es mußte ein Gesetz eingeführt werden, das den Leuten, die aus den öffentlichen Sammelbecken mit Wasser versorgt wurden, die Anwendung dieser Methode untersagte.

369. Experimentelle Beispiele für das Torricellische Theorem. Daß das Quadrat der Ausflußgeschwindigkeit in dem hier betrachteten Falle der Höhe der freien Oberfläche über der Öffnung proportional ist, wird öfters an dem in Fig. 205 und 206 angedeuteten Apparate bewiesen. Die Weite des Strahles auf einer horizontalen Ebene unter der Öffnung wird für verschiedene Tiefen der Mündung

unter der Oberfläche und Höhen über der Ebene gemessen. Es sei h die Tiefe der Öffnung unter der Oberfläche, x ihre Höhe über der horizontalen Ebene, auf die der in horizontaler Richtung austretende Strahl aufschlägt. Dann bleibt die horizontale Geschwindigkeit überall v; die vertikale Geschwindigkeit eines Strahlteiles zu einer Zeit t nach Verlassen der Öffnung ist gt. Dann ist die in der Zeit t zurückgelegte horizontale Strecke vt, und die durchfallene vertikale Höhe ist $\frac{1}{2}gt^2$;


Fig. 205.


Fig. 206.

dies ist aber x, und daraus ergibt sich $t = \sqrt{2x/g}$. Wenn y die Entfernung auf der horizontalen Ebene ist, so ist nach dem Torricellischen Theorem

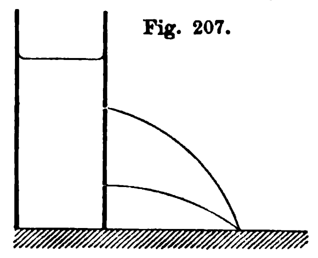
$$y^2 = v^2 \frac{2x}{g} = 4hx.$$

Der Punkt, in dem der Strahl die Ebene trifft, ist demnach ein Punkt auf einer Parabel, deren Scheitelpunkt die Ausflußöffnung ist und deren Parameter $4h$ beträgt. Auch sind, wenn der Höhenunterschied x zwischen der Ebene und der Öffnung fest ist, die Strahlweiten für verschiedene Tiefen h der Öffnung unter der freien Oberfläche die Ordinaten einer Parabel, deren Abszissen die Werte von h sind und deren Parameter $4x$ ist.

Somit ist das Quadrat der Strahlweite bei gegebener Lage der Ausflußöffnung und der freien Oberfläche mit der Entfernung x der Ebene unter der Mündung, dagegen bei gegebener Lage dieser Ebene mit der Tiefe h der Mündung unter der Oberfläche proportional. Man konstruiert daher ein Gefäß mit Mündungen an verschiedenen senkrecht untereinander liegenden Punkten, dann berechnet man die Strahlweiten für eine bestimmte Höhe der freien Oberfläche (die durch genügenden Zufluß und einen Abflußhahn, der ein Steigen des Niveaus verhindert, konstant erhalten wird) und verzeichnet sie auf der Ebene, worauf man das Ergebnis verifiziert, indem man die Strahlen fließen läßt. Fig. 205 zeigt die Strahlweite für verschiedene Werte von h in den Proportionen 9, 16, 25 auf einer Ebene, die jedesmal gleich tief unter der Ausflußöffnung liegt; Fig. 206 zeigt die Strahlweiten auf derselben Ebene für Öffnungen in verschiedener Höhe im oben genannten

Verhältnis. Die Figuren sind aus Winkelmanns Handbuch der Physik entnommen.

Man wird einsehen, daß die jedesmaligen Werte von x und h ausgetauscht werden können, d. h. daß die Strahlweite für eine Tiefe x der Ebene unter der Ausflußöffnung und einer Tiefe h der Ausflußöffnung unter der Oberfläche dieselbe ist wie die für eine Tiefe h der Ebene unter der Öffnung und einer Tiefe x der Öffnung unter der freien Oberfläche. Dies ist aus Fig. 207 zu ersehen.


Fig. 207.

370. Strömung einer kompressiblen Flüssigkeit. Adiabatische Strömung eines Gases. Bis jetzt wurde hauptsächlich der Fall betrachtet, in dem ϱ konstant ist. Aber in einem Gase ändert sich die Dichte mit dem Druck und je nach der Bedingung, der es unterworfen wird, in verschiedener Weise. Wird die Temperatur konstant erhalten, so ist die Dichte dem Druck proportional, d. h. es ist

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho_0}.$$

Bleibt die in jedem Teile des Gases vorhandene Wärme konstant, d. h. für die sogenannte adiabatische Kompression oder Dilatation des Gases ist die Bedingung

$$\frac{p}{\varrho^\gamma} = \frac{p_0}{\varrho_0{}^\gamma},$$

wo γ das Verhältnis der spezifischen Wärme des Gases bei konstantem Druck zu seiner spezifischen Wärme bei konstantem Volumen ist.

Im ersteren Falle ist

$$\int_s \frac{dp}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho_0} \log \frac{p_1}{p_0},$$

wo p_0 und p_1 sich auf Anfang und Ende der Integrationslinie s beziehen. Es wird also aus Gl. (22) in diesem Falle:

$$\frac{p_0}{\varrho_0} \log \frac{p_1}{p_0} + \tfrac{1}{2}(q_1^2 - q_0^2) + V_1 - V_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Im anderen Falle wird

$$\int_s \frac{dp}{\varrho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_0}{\varrho_0}\right),$$

so daß an Stelle von Gl. (22) herauskommt:

$$\frac{p_0{}^{1/\gamma}}{\varrho_0} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(p_1{}^{1-1/\gamma} - p_0{}^{1-1/\gamma}\right) + \tfrac{1}{2}(q_1^2 - q_0^2) + V_1 - V_0 = 0 \quad (46)$$

Wenn die Geschwindigkeit am Anfang der Linie s null oder zu vernachlässigen ist und $V_1 - V_0$ ebenfalls zu vernachlässigen ist, so ergibt sich:

$$q_1^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_0}{\varrho_0}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_0}{\varrho_0} - \frac{p_1}{\varrho_1}\right) \quad . \quad . \quad (47)$$

Diese Gleichung kann zur Integration längs einer Stromlinie unter allen Umständen zur Integration längs irgend einer mit der Flüssigkeit sich bewegenden Linie dann benutzt werden, wenn die Bewegung wirbelfrei ist.

371. Stationäre Strömung eines Gases in ein Vakuum. Es wird später gezeigt werden, daß das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Kompressions- und Dilatationswellen durch eine elastische Flüssigkeit hindurch gleich dem Wert von $\partial p/\partial \varrho$ ist, wo $\partial p/\partial \varrho$ der Änderungsgrad des Druckes mit der Dichte unter der Bedingung konstanter Temperatur oder unter der Bedingung, daß keine Fortpflanzung von Wärme von einem Teile zum anderen stattfindet, ist, oder was nun sonst die herrschende Bedingung sein möge, unter der die Wellen fortgepflanzt werden. Aus der unter gewöhnlichen Umständen geringen Abnahme des Schalles mit der durchmessenen Entfernung, verbunden mit dem Umstande, daß die Geschwindigkeit der Schallausbreitung ganz erheblich die der isothermen Ausbreitung übertrifft, geht hervor, daß Wellen der hier betrachteten Art sich in Luft und anderen Gasen adiabatisch fortpflanzen. Daher muß $\partial p/\partial \varrho$ aus der Gleichung

$$\frac{p}{\varrho^\gamma} = C$$

berechnet werden, so daß sich ergibt:

$$\frac{\partial p}{\partial \varrho} = \gamma\,\frac{p}{\varrho}.$$

Daher ist, wenn die Schallgeschwindigkeit beim Druck p_1 und der Dichte ϱ_1 gleich v_1 und beim Druck p_0 und der Dichte ϱ_0 gleich v_0 ist:

$$q_1^2 = \frac{2}{\gamma - 1}(v_0^2 - v_1^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Aus dem ersten Ausdrucke für q_1^2 in Gl. (47) wird man ersehen, daß $v_1 = 0$ ist, wenn $p_1 = 0$ ist, und daß daher, wenn das Gas adiabatisch in ein Vakuum ausströmt, die Ausflußgeschwindigkeit

$$\sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}\,v_0$$

ist. Der Wert von γ ist für Luft, Sauerstoff, Stickstoff und Wasserstoff annähernd 1,41, so daß die Grenzgeschwindigkeit $2{,}209\,v_0$ beträgt.

Hier taucht eine interessante Frage auf: Die aus einer Öffnung in ein Vakuum ausströmende Gasmenge ist $q_1 \varrho_1 a'$, wo a' (wie in § 367)

der wirksame Flächeninhalt der Öffnung ist. Folglich hat man nach dem oben erhaltenen Werte von q_1:

$$q_1 \varrho_1 a' = a' \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} v_0 \varrho_1 \quad \ldots \ldots \quad (49)$$

Da aber ϱ_1 null ist, würde dies die Strömung null für gasförmige Materie ergeben, ein Resultat, das sorgfältige Erwägung verdient. Der Fall, in dem $\varrho_1 = 0$ ist, ist ein Grenzfall, der in der Wirklichkeit nicht vorkommt. Das Gas kann sich nicht plötzlich so in dem Vakuum ausbreiten, daß es dicht hinter der Öffnung schon die Bedingung $\varrho_1 = 0$ erfüllt, sondern es folgt eine Strecke weit Stromlinien, die sich schließlich durch die Zähigkeit und Diffusion des Gases verlieren.

Es werde nun angenommen, daß in der Öffnung der Druck p und die Dichte ϱ ist. Wenn die Strömung stationär ist, so muß der Betrag der einen Querschnitt einer Stromröhre passierenden Materie in allen Teilen der Röhre derselbe sein. Der Betrag pro Flächeneinheit ist daher $q\varrho$, und dieser muß für jeden Punkt in einer Stromlinie derselbe sein. Wenn dann a der Querschnitt einer Röhre und M die Strömungsmenge durch einen Querschnitt ist, so ist

$$a = \frac{M}{q\varrho}.$$

Da M konstant ist, so wird der Wert von a am kleinsten sein, wo $q\varrho$ am größten ist. Nun gilt für ein Maximum oder Minimum von $q\varrho$:

$$\frac{d}{dp}(q\varrho) = \varrho \frac{dq}{dp} + q \frac{d\varrho}{dp} = 0,$$

oder:

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{q}{\varrho}\frac{d\varrho}{dp}.$$

Es gilt aber auch nach Gl. (22), da $V = 0$ und $q_0 = 0$ ist:

$$q^2 = -2\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho},$$

und folglich:

$$q\frac{dq}{dp} = -\frac{1}{\varrho}.$$

Setzt man dies in den eben gefundenen Wert von dq/dp ein, so erhält man

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{1}{q\varrho} = \frac{q}{\varrho}\frac{d\varrho}{dp} \quad \text{oder} \quad \frac{d\varrho}{dp} = \frac{1}{q^2},$$

das heißt:

$$q^2 = \frac{dp}{d\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (50)$$

oder: die Geschwindigkeit ist die gleiche wie bei der Fortpflanzung des Schalles. Wenn dies der Fall ist, so ist der Querschnitt des Stromes

ein Minimum, denn offenbar muß dies einen Maximalwert von $q\varrho$ ergeben.

Nun ist im Falle adiabatischer Strömung nach Gl. (48):

$$q^2 = \frac{2}{\gamma - 1}(v_0^2 - v_1^2);$$

folglich ist, da für die Maximalströmung längs einer Stromlinie $q^2 = v^2$ ist:

$$v^2 = \frac{2}{\gamma + 1} v_0^2 \quad \text{oder} \quad \frac{p}{\varrho} = \frac{2}{\gamma + 1} \cdot \frac{p_0}{\varrho_0}.$$

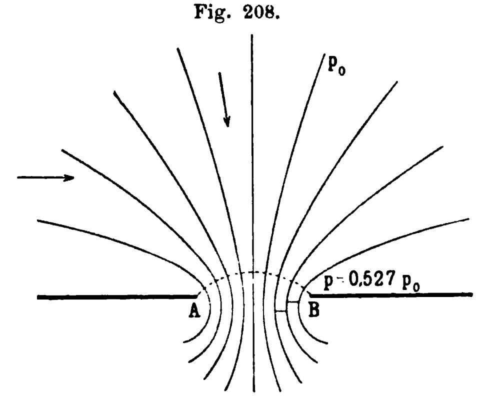
Dieses letztere Ergebnis ergibt mit $p/\varrho^\gamma = p_0/\varrho_0{}^\gamma$ kombiniert:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}},$$

oder, wenn $\gamma = 1{,}41$ ist, $\varrho = 0{,}635\,\varrho_0$ und $p = 0{,}527\,p_0$.

Es folgt daraus, daß, wenn p_1, der Druck im Aufnahmeraume, kleiner als das ist, der Strom, nachdem er eine Minimalweite erreicht hat, sich wieder einigermaßen erweitert, wie aus Fig. 208 ersichtlich ist. Die senkrecht zu den Strömen quer durch von A nach B gezogene Kurve ist augenscheinlich konkav nach außen, und deshalb müssen die stärksten Verengungen der Stromfäden von dieser Kurve nach außen liegen, was durch die Querstriche angedeutet ist.

Fig. 208.



Der Druck im engsten Teile jedes Stromfadens kann nicht kleiner als $0{,}527\,p_0$, noch auch ϱ kleiner als $0{,}635\,\varrho_0$ sein. Jenseits dieser Werte müssen die Ströme sich erweitern und die Geschwindigkeit zunehmen, da ϱ abnimmt.

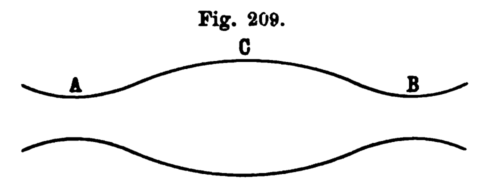
Wenn indessen der Druck p_1 außerhalb der Mündung größer als dies ist, so wird die Strömung an der engsten Stelle in parallelen Fäden laufen, und der Druck wird p_1 sein.

Wenn die Strömungsgeschwindigkeit größer ist als v, so kann keine Abweichung des Druckes sich nach rückwärts in dem ausströmenden Gase fortpflanzen, da dies mit der Geschwindigkeit v geschehen würde, so daß eine Druckabnahme unter $0{,}527\,p_0$ den Druck hinter dem zusammengezogenen Strahl nicht berühren kann.

Die Darlegung dieses Falles verdankt man den fast gleichzeitigen Arbeiten von Hugoniot und Osborne Reynolds; die Ergebnisse stimmen mit den Napierschen Experimenten überein.

Für adiabatische Strömung eines Gases gibt es also zwei Werte des Druckes für den Wert jedes Querschnittes der Röhre, der größer ist als sein Minimalwert: einen über 0,527 p_0 und einen darunter. Demnach gibt es zwei mögliche Werte des Druckes in C (Fig. 209) in

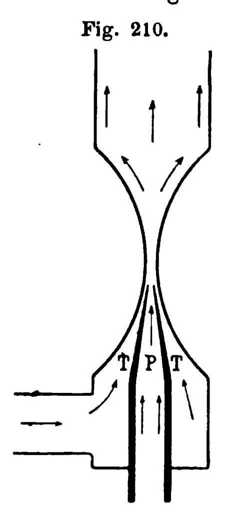
Fig. 209.



einer Röhre von veränderlichem Querschnitt, für welche der Druck an den beiden gleichen Hälsen A und B gleich 0,527 p_0 ist. Zum Kontraste sei daran erinnert, daß für eine Flüssigkeit der Druck in C größer als in A oder B ist.

372. Wasserstrahlpumpe. Fig. 210 veranschaulicht die Wirkung der Wasserstrahlpumpe. Ein Wasserstrahl wird mit großer Geschwindigkeit durch das spitz zulaufende Mundstück P getrieben, dessen Öffnung sich in einem Punkte ganz dicht bei dem engsten Teile der umgebenden Röhre T befindet. Diese Röhre hängt durch ein seitliches Rohr mit dem Raume zusammen, aus dem das Wasser weggeschafft werden soll. Die Strömung des Wassers in dem verengten Halse von T ergibt nach dem Bernoullischen Theorem einen geringeren Druck in der Verengung als in dem Teile darunter, und es findet folglich eine Strömung von Flüssigkeit aus dem das Mundstück umgebenden Raume und dem Raume dahinter statt. Der wachsende Druck aus dem verengten Teile von T nach vorn wird zur Zurückhaltung der einströmenden Flüssigkeit verbraucht.

Fig. 210.



Natürlich kann die Pumpe benutzt werden, um ein Fluidum mit Hilfe eines Strahls einer anderen Flüssigkeit, der durch P zugeführt wird, aus dem Raume fortzuschaffen. In diesem Falle wird eine Mischung der beiden Fluida durch T nach vorn geschafft. Es sei angenommen, daß der mittlere Druck der Flüssigkeit in dem Mundstück p_1, in dem umgebenden Rohr p_2 und im Aufnahmerohr p ist, während die Dichten der Fluida und ihre Geschwindigkeiten ϱ_1, ϱ_2, ϱ bezw. v_1, v_2, v sind und die wirksamen Querschnitte in den drei Fällen a_1, a_2 und a sind. Die in der Zeiteinheit durch den Strahl hereingebrachte Bewegungsgröße ist $\varrho_1 v_1^2 a_1$, und das Maß, in welchem die Bewegungsgröße durch den Druck erzeugt wird, ist $p_1 a_1$; entsprechend ist in den anderen Fällen das Maß, in welchem

durch den Strahl und das umgebende Rohr Bewegungsgröße geliefert wird:

$$(p_1 + \varrho_1 v_1^2) a_1 + (p_2 + \varrho_2 v_2^2) a_2;$$

die in der Sekunde durch den Querschnitt des Aufnahmerohrs gehende Bewegungsgröße anderseits ist:

$$(p + \varrho v^2) a,$$

und folglich besteht die Gleichung:

$$(p_1 + \varrho_1 v_1^2) a_1 + (p_2 + \varrho_2 v_2^2) a_2 = (p + \varrho v^2) a \quad . \quad . \quad (51)$$

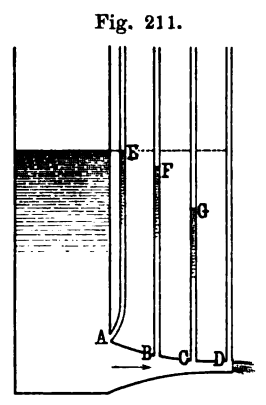
Dazu kommt noch die Kontinuitätsgleichung, nämlich:

$$a_1 \varrho_1 v_1 + a_2 \varrho_2 v_2 = a \varrho v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Für die Technik ist dieser Fall von besonderem Interesse; in ihren Handbüchern findet man eine eingehende Theorie und instruktive Zahlenbeispiele.

373. Druckänderung in einer horizontalen sich verengenden Röhre. Es ist für den Physiker von Wichtigkeit, den Verlauf der Erscheinungen in möglichst vielen praktischen Fällen zu kennen. Es folgen darum hier einige Fälle von Änderungen des Flüssigkeitsdruckes, die zur Berichtigung von Vorurteilen und irrigen Annahmen helfen können. Fig. 211 zeigt den Ausfluß einer Flüssigkeit aus einem Gefäße durch ein sich ganz allmählich verengendes Rohr, das am Ende des Mundstückes nahezu gerade ist. Die Änderung des Druckes kann man in Glasröhren sehen, die sich bis zu derjenigen Höhe mit Flüssigkeit füllen, welche die Drucke in den Punkten, wo die Röhren befestigt sind, anzeigen. Es sei angenommen, daß die Öffnung bei D den halben Flächeninhalt des Querschnittes hat, den das Mundstück bei C hat, daß diese letztere Fläche der halbe Querschnitt des Mundstückes bei B ist, und daß bei A die Querschnittsfläche so groß ist, daß keine Bewegung merklich ist.

Fig. 211.



Bei D herrscht Atmosphärendruck, bei C ist die Geschwindigkeit halb so groß wie bei D, und folglich ist der Druck p bei C durch die Beziehung

$$p + \frac{\varrho}{2}\left(\frac{q}{2}\right)^2 = P + \frac{\varrho}{2} q^2$$

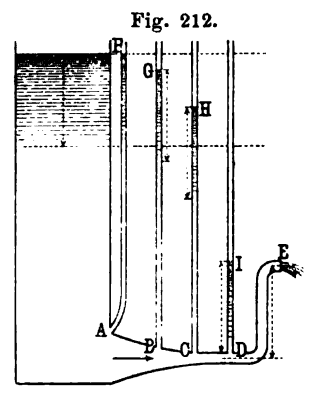
gegeben; und da $q^2 = 2gh$ ist, wo h die Niveauhöhe über der Öffnung ist, so hat man

$$p = P + \frac{3}{4} g \varrho h.$$

Das Meßglas bei G zeigt eine Druckdifferenz von $\frac{3}{4}\,g\varrho h$. Also hat die Bewegung den Druck von dem statischen Werte, der bei C herrschen würde, um $\frac{1}{4}\,g\varrho h$ erniedrigt. Ebenso ist der Druck in B um $\frac{3}{4}$ des Betrages $\frac{1}{4}\,g\varrho h$, den der Druck bei C unter dem statischen bleibt, größer als der bei C u. s. w., bis bei A die größte Weite erreicht ist, wo die Druckabnahme nicht mehr merklich ist.

Ein anderer Fall ist der in Fig. 212 veranschaulichte. Dort ist das Rohr hinaufgeführt und dann horizontal umgebogen. Der Druck am Ende ist wieder Atmosphärendruck, und die Geschwindigkeiten sind dieselben, so daß der Druck p im unteren horizontalen Teile des Mundstückes bei D nach dem Bernoullischen Theorem mit dem bei E durch die Beziehung

Fig. 212.



$$p - g\varrho\,(H + h) = P - g\varrho H$$

verbunden ist, wo H der senkrechte Abstand der Öffnung E unter dem Niveau der Flüssigkeit und h der weitere Abstand JD ist. Folglich ist:

$$p = P + g\varrho h.$$

Dann entsprechen gerade wie zuvor jede der senkrechten Höhen HJ, GH... drei Vierteln des der Tiefe der Mündung unter dem freien Niveau der Flüssigkeit zugehörigen statischen Druckes.

Die Strömung ist tatsächlich dieselbe, als ob das Mundstück sich bei D öffnete und die Höhe der freien Oberfläche um den Abstand JD heruntersänke.

374. Fortsetzung; zwei Gefäße. Fig. 213 zeigt zwei am Boden durch einen Kanal von der Form eines Doppelkegels verbundene Gefäße derart, daß er sich nach der Mitte zu allmählich zu einem zylinderförmigen Halse verengt und sich dann wieder in derselben Weise erweitert. Die Strömung in dem zylindrischen Halse ist die von

Fig. 213.

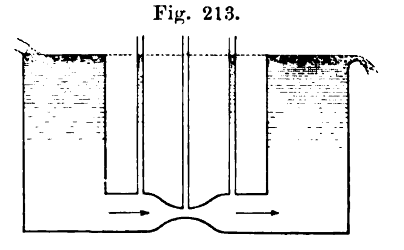
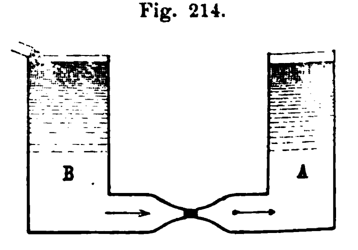


Fig. 214.



der Abnahme der Druckhöhe herrührende, und der durch das Meßglas an dieser Stelle angezeigte Überschuß des Druckes über den Atmosphärendruck ist null. In den sehr weiten Teilen des Kanals, wo die Ge-

schwindigkeit unmerklich ist, ist der angezeigte Drucküberschuß der der Druckhöhe zukommende.

Die Flüssigkeit wird in gleichem Maße dem einen Gefäße zugeführt und aus dem anderen herausgelassen; das Niveau ist (abgesehen von einem kleinen Verluste durch Reibung) dasselbe in beiden Gefäßen.

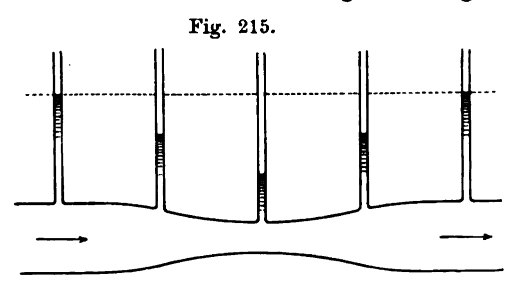
Auch das folgende Froudesche Experiment ist interessant. Es werden aus dem vorigen zwei Gefäße gemacht, wie sie aus der Durchschneidung des Zylinderhalses des Verbindungsrohres entstehen würden, so daß sie also zwei kegelförmige Mundstücke haben. Die beiden Enden stehen einander gegenüber in gleicher Höhe und mit geringem Abstande voneinander wie in Fig. 214. Wenn beide Gefäße bis zum selben Niveau gefüllt und dann beide Mündungen geöffnet werden, so leeren sich beide Gefäße, und die beiden zusammentreffenden Ausflußstrahlen bilden eine ebene Wand senkrecht zu der horizontalen Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten der Mundstückenden. Wenn sich ein Gefäß, A, schneller leert als das andere, B, so gewinnt der Strahl aus B die Oberhand, und die von den zusammentreffenden Strahlen gebildete Scheibe bewegt sich nach A hin. Die Strömung aus A nimmt ab, während die aus B zunimmt; das Niveau in B fällt schneller, und nunmehr tritt der entgegengesetzte Bewegungszustand der Scheibe ein, worauf sich das Spiel wiederholt. Die Scheibe schwingt also zwischen den beiden Öffnungen hin und her.

Wenn das Niveau in B durch einen Abfluß eingerichtet wird, tiefer, und zwar um einen genügenden Betrag tiefer, zu sein als in A, so wird der Strahl aus A in B eintreten, und das Niveau in B wird aufrecht erhalten werden, wenn der Zufluß in A den Niveauverlust ausgleicht, so daß die Strömung zwischen den Mundstücken in konstantem Betrage erhalten wird.

Bei dem Froudeschen Experimente hatte das Gefäß B einen Flüssigkeitsstand von 18 Zoll über den Mündungen, während A einen solchen von $20^1/_2$ Zoll hatte. Der Unterschied, $2^1/_2$ Zoll, stellt die zur Überwindung der Reibung notwendige Druckhöhe dar.

375. Strömung in Röhren von veränderlichem Querschnitt. Die Verschiedenheit des Druckes in Röhren von nicht gleichförmigem Querschnitt wird durch die Fig. 215 und Fig. 216 (a. f. S.) veranschaulicht, die eine sich erweiternde und eine sich verengende Röhre, mit strömender Flüssigkeit in stationärer Bewegung gefüllt, darstellen. Die Meßröhren zeigen durch die

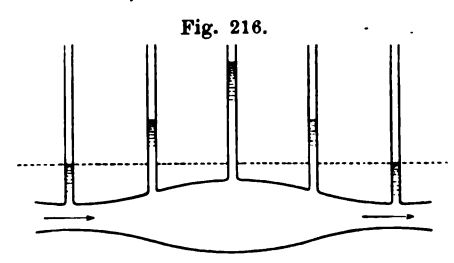
Fig. 215.



Höhe der darin stehenden Flüssigkeit die Druckverschiedenheit an. Die Strömung ist also schneller an den engeren Stellen und langsamer, wo die Röhre weiter ist als im Mittel; und demzufolge ist der Druck in den erweiterten Teilen größer, in den verengten kleiner als der Mittelwert.

Es ist eine weit verbreitete Meinung, daß das Gegenteil der Fall sein müßte, sie ist aber durch Betrachtungen elementarer Natur leicht zu widerlegen. Wenn eine Flüssigkeitsmenge von einem weiteren in ein engeres Stück der gefüllten Röhre, Fig. 215, übergeht, muß sie eine Beschleunigung erfahren, da bei stationärer Bewegung in derselben Zeit durch alle Querschnitte dieselbe Flüssigkeitsmenge fließt. Demnach muß der Druck in einem sich verengenden Teile der Röhre überall hinten größer sein als vorn, d. h. er muß stetig abnehmen.

Fig. 216.

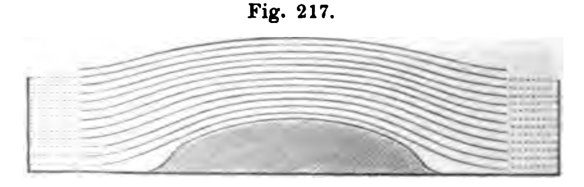


Ebenso muß, wenn die Flüssigkeit von einem verengerten Bahnstücke zu einem erweiterten übergeht, eine Verzögerung stattfinden, d. h. der Druck muß vorn größer sein als hinten.

Eine nicht ungewöhnliche Vorstellung ist auch die, daß eine in einer Röhre strömende Flüssigkeit, wie die in Fig. 216, das Streben haben muß, die Röhre vor sich her zu schieben. Dies ist natürlich vollkommen irrig, wie man aus der Erwägung einsehen wird, daß der Druck auf die Röhre senkrecht zu ihren Wänden stattfindet und von der Bewegungsrichtung nicht abhängig ist.

376. Strömung an einem Hindernis vorbei. Stationäre Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Eine andere landläufige Vorstellung, die allerdings durch die Erfahrung eher begründet ist, ist die, daß ein Hindernis jedwelcher Art in einem Strome in der Stromrichtung vorwärts geschoben wird. Dies ist nicht der Fall in einer vollkommenen Flüssigkeit, wenn der Körper von solcher Form ist (s. Fig. 217), daß er eine stetige Bewegung der Stromlinien an sich vorbei gestattet. Besitzt die Flüssigkeit Zähigkeit, so findet immer, wie auch immer der Körper gestaltet und ob er vollständig ein-

Fig. 217.



getaucht sei oder nicht, ein Zug auf den Körper infolge der sogenannten Oberflächenreibung statt, der bestrebt ist, den Körper mit dem Strome mitzuziehen; gibt es aber Kurvenunstetigkeiten, so entstehen Strudel oder Wirbel in der Flüssigkeit.

Die Stromlinien der Flüssigkeit an der einen Seite eines untergetauchten Hindernisses vorbei sind aus Fig. 217 zu ersehen. Man sieht, daß sie sich in der Mitte zwischen den Enden verdichten und jenseits des Hindernisses, sowohl davor als dahinter, sich erweitern, und daß sie an jeder dieser letzteren Stellen sich der Koinzidenz mit den ungestörten Stromlinien, die durch die punktierten geraden Linien angedeutet sind, nähern. Auch sind sie weiter auseinander als im Durchschnitt, gleich nachdem sie begonnen haben, vom geraden Wege abzuweichen, und gerade bevor sie ihn wieder aufnehmen.

Es ist also eine Abnahme des Druckes unter den Mittelwert auf beiden Seiten der Körpermitte vorhanden und eine Zunahme des Druckes vor und hinter dem Körper. Es ist ein Ergebnis dieser Tatsache, daß, wenn ein Schiff sich vorwärts bewegt, das Wasser sich am Bug und am Steuer über die unbewegte Wasseroberfläche erhebt und in der Mitte der Schiffsseiten darunter sinkt.

Da die Stromlinien in Punkten in beträchtlicher Entfernung von dem Körper stromauf und stromab ungestört bleiben, so wird jegliches Kräftesystem, das infolge der Abweichung der Stromlinien stromaufwärts auf den Körper wirkt, durch ein gleiches und entgegengesetztes Kräftesystem infolge der Wiederaufnahme des ungestörten Flüssigkeitslaufes ausgeglichen.

Von hier aus kommt man zu dem Fall eines untergetauchten oder nur unmerklich emportauchenden Körpers von rundlicher Gestalt, der sich gleichförmig durch eine vollkommene Flüssigkeit hindurchbewegt. Man muß nur der Flüssigkeit und dem Körper eine Bewegung erteilen, welche der ungestörten Flüssigkeit in dem eben betrachteten Falle gleich und entgegengesetzt ist. Die Flüssigkeit wird in einiger Entfernung vorn und hinten zur Ruhe kommen; der Körper wird sich mit einer der Flüssigkeit in dem früheren Falle gleichen Geschwindigkeit bewegen, und die Wirkungen zwischen dem Körper und der Flüssigkeit werden sich nicht ändern Folglich wird der Körper keinen Widerstand gegen seine Bewegung erfahren.

Stokes hat gezeigt, daß eine zähe Flüssigkeit, die in einer dünnen Schicht zwischen parallelen, ebenen Wänden um ein Hindernis herumfließt, Stromlinien hat, die mit denen der zweidimensionalen stationären Bewegung einer vollkommenen Flüssigkeit um einen unendlichen Zylinder von dem durch das Hindernis dargestellten Querschnitt identisch sind. Auf diese Weise hat Shaw die Stromlinien einer vollkommenen Flüssigkeit aufgezeigt.

In Wasser oder andern wirklichen Flüssigkeiten erfährt der Körper einen durch die Flüssigkeit auf seine Oberfläche ausgeübten

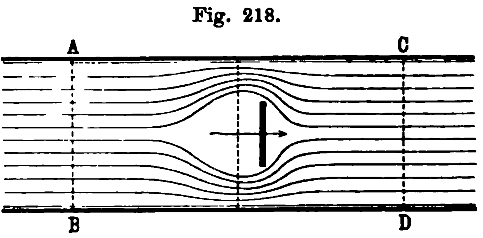
Zug. Er wird Oberflächenreibung genannt und ist der Hauptwiderstand, den ein Körper von weichen Linien auf seinem Wege durch die Flüssigkeit erfährt. Die Reibung erzeugt eine Abweichung der Stromlinien von den Formen, die sie in einer vollkommenen Flüssigkeit haben würden, und erzeugt Wirbel in einem dünnen Flüssigkeitsfaden an der Oberfläche des Körpers. Auch wenn der Körper von eckiger Gestalt ist, bilden sich Strudel oder Wirbel, wo die Stromlinien sich nicht dicht um den Körper schließen können. Es gibt in diesem Falle große Geschwindigkeitsunterschiede zwischen den verschiedenen Teilen der Flüssigkeit und infolgedessen große Verluste durch Reibung.

377. Wellenwiderstand gegen Bewegung. Ein tief unter der Oberfläche des Wasser schwimmendes Schiff vermeidet eine weitere wichtige Ursache eines Energieverlustes, der viele gewöhnliche Schiffe betrifft. Für die letzteren gibt es, wie oben erwähnt wurde, ein Steigen des Wasserspiegels an Bug und Steuer und ein Fallen desselben an den Schiffsmitten, entsprechend dem schon beschriebenen Über- und Unterdruck. Diese Niveauänderungen sind der Ursprung von Wellen, die sich von der jeweiligen Lage des Schiffes aus nach allen Richtungen auf der Oberfläche verbreiten und allmählich durch die Flüssigkeitsreibung ausgeglättet oder durch die Brandung am Ufer zerstreut werden. So ist das Schiff selbst in seiner Bewegung eine Quelle, von der Energie in Wellenbewegung ausgestrahlt wird, und diese Energie ist es, die durch die Triebkraft des Schiffes mit ersetzt werden muß.

Es ist deshalb auf Grund der Kraftersparnis sehr viel zu Gunsten submariner Schiffe zu sagen oder für Schiffe, die den Wasserspiegel so wenig als möglich aufwühlen; aber natürlich sprechen viele andere Momente dagegen.

378. Widerstand gegen eine sich durch die Flüssigkeit hindurchbewegende flache Scheibe. In einer gewöhnlichen Flüssigkeit wird eine beträchtliche Kraft auf einen Körper von ungünstiger Form (z. B. die in Fig. 218 abgebildete Scheibe) ausgeübt, eine Kraft, die das Bestreben hat, den Körper stromab zu tragen und die nicht

Fig. 218.



der Reibungswirkung zugeschrieben werden kann. Nach einer von Kirchhoff und Lord Rayleigh ausgearbeiteten Theorie ist dieser Widerstand, ohne auf irgend eine Unvollkommenheit der Flüssigkeit

rekurrieren zu müssen, erklärbar durch die Annahme, daß die Bewegung in Wahrheit unstetig ist, so daß (unter Vernachlässigung von Strudeln) ein Gebiet toten Wassers sich hinter dem Hindernis bildet, worin der Druck derselbe ist, wie in der in beträchtlicher Entfernung dahinter sich bewegenden Flüssigkeit. Dieses Gebiet ist von der übrigen Flüssigkeit durch eine zu den Kanten der Platte tangentiale Oberfläche getrennt und ist durch die Bedingung bestimmt, daß der Druck in jedem seiner Punkte derselbe ist, wie in dem Strome eine Strecke weiter hinten. Fig. 219 zeigt die Form dieser trennenden Oberfläche nahe an einer langen Schneide mit parallelen Kanten, die nach der Beschreibung weiter unten eingetaucht ist.

Fig. 219.

Die Flüssigkeit kommt also — oder wenigstens beinahe — zur Ruhe gerade vor dem Mittelpunkt der Scheibe, deren Vorderseite dadurch einen Überschuß von mittlerem Druck im Vergleich mit der Rückseite erfährt, der die Scheibe stromab stößt. Die Wirkung ist also der eines auf eine Scheibe auftreffenden Strahles sehr ähnlich, und dies ist auch der Gesichtspunkt, von dem aus häufig die Versuche, die Wirkung quantitativ zu berechnen, unternommen werden.

Wäre die Bewegung vollkommen stetig, so gäbe es keine solche Kraft mit dem Bestreben, den Körper stromab zu tragen; aber die Stetigkeit der Bewegung würde an einer scharfen Kante des Hindernisses unendliche Geschwindigkeit erfordern, und es würde der Druck an dieser Stelle von unendlichem negativem Wert sein, d. h. die Flüssigkeit würde an der Kante unter unendlicher Spannung stehen. Natürlich gibt es in der Wirklichkeit keine vollkommen scharfe Kante, aber schon eine mäßige Annäherung an vollkommene Schärfe würde eine viel größere Spannung ergeben, als die Flüssigkeit unter gewöhnlichen Umständen (z. B. Wasser, das kleine Luftblasen enthält) ertragen könnte.

379. Rayleighsche Theorie des Widerstands gegen die Bewegung einer Platte in einer Flüssigkeit. Nach Lord Rayleighs Theorie (Phil. Mag., Dez. 1876, auf die der Leser für den analytischen Beweis verwiesen werden muß) ist, wenn eine lange, ebene, dünne Platte mit parallelen Kanten derart in einen Strom gehalten wird, daß der Winkel zwischen ihrer Ebene und der Strömungsrichtung α ist und die Kanten senkrecht zur Strömungsrichtung stehen, der mittlere unausgeglichene Druck auf den Körper

$$\varrho V^2 \frac{\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha},$$

wo V die ungeminderte Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Strom ist. Speziell, wenn $\alpha = 90^0$ ist, wird dieser Ausdruck

$$\frac{\pi}{4+\pi}\,\varrho\, V^2\ ^{1)}.$$

Dieser Ausdruck, mit der Plattenfläche multipliziert, ist die Kraft stromabwärts.

Nach der gewöhnlichen Theorie eines Strahls, worin angenommen wird, daß die Geschwindigkeit der Flüssigkeit durch den Aufprall auf die vordere Plattenfläche zerstört wird, würde die Kraft $\frac{1}{2}\varrho V^2$ mal der Fläche betragen. Nun ist $\pi/(4+\pi)$ annähernd gleich 0,44, so daß die Kraft $0{,}44\ \varrho V^2$ mal der Fläche beträgt, woraus hervorgeht, daß die gewöhnliche Ansicht in diesem Falle eine gute Annäherung ergibt.

Es ist einleuchtend, daß, wenn die Platte zur Strömungsrichtung schief steht, die Formel ebensogut eine Kraftkomponente quer gegen den Strom als eine solche abwärts ergibt. Die mittlere Kraft pro Flächeneinheit der Platte

$$\varrho V^2 \frac{\pi \sin\alpha}{4+\pi\sin\alpha}$$

ist zur Platte senkrecht gerichtet und hat deshalb in den aufgeführten Richtungen Komponenten von den Beträgen

$$\varrho V^2 \frac{\pi \sin\alpha \cos\alpha}{4+\pi\sin\alpha}, \qquad \varrho V^2 \frac{\pi \sin^2\alpha}{4+\pi\sin\alpha}.$$

Man wird bemerken, daß die Querkomponente einen Maximalwert für annähernd $\alpha = 39^0$ hat.

Diese Ergebnisse sind natürlich ebensogut auf eine Platte anwendbar, die sich gleichförmig durch eine überall in genügender Entfernung von ihr in Ruhe befindliche Flüssigkeit hindurchbewegt; nur muß man dann der Flüssigkeit und der Platte eine Geschwindigkeit erteilen, die der bisherigen der Flüssigkeit gleich und entgegengesetzt ist. Die Kraft auf die Platte wird ungeändert bleiben, und wir haben den Fall einer sich durch eine im übrigen in Ruhe befindlichen Flüssigkeit hindurch bewegenden Platte.

Aus diesen Ergebnissen folgt ein sehr bemerkenswerter Schluß, der sehr leicht vom Leser qualitativ geprüft werden kann mit Hilfe des folgenden, von Froude angegebenen einfachen Experiments. In einem fahrenden Boot stehend, tauche man ein Ruder vertikal so ins Wasser, daß seine Breitseite in der Fahrtrichtung des Bootes steht, und mache in Gedanken eine Schätzung von der Muskelanstrengung, die nötig ist, um den Widerstand gegen die Bewegung zu überwinden. Nun bewege man das Ruder, ohne seine Stellung zu ändern, in der

---

[1]) Dieses Ergebnis teilt auch Kirchhoff mit (Vorles. über math. Phys., Mechanik, S. 308). Es muß aber hier konstatiert werden, daß der Anwendung dieser Theorie auf wirkliche Flüssigkeiten von Lord Kelvin (Nature 50, 1894) stark widersprochen worden ist unter Anführung der Experimente von Dines (Proc. R. Soc., Juni 1890), die viel größeren Widerstand ergeben.

horizontalen Querrichtung hin und her; man wird finden, daß der der Vorwärtsbewegung gebotene Widerstand durch die Querbewegung merklich erhöht worden ist.

Die Erklärung liefert Lord Rayleighs Theorie der auf die schief in den Strom gehaltenen Platte wirkenden Kraft. Die im rechten Winkel zur Strömung eingetauchte Platte möge eine Geschwindigkeit v in ihrer eigenen Ebene haben. Wird nun dem ganzen System von Flüssigkeit und Platte noch außerdem eine der genannten Plattenbewegung gleiche und entgegengesetzte Bewegung erteilt, so wird die Platte zur Ruhe kommen, und die Flüssigkeit wird eine resultierende Geschwindigkeit $\sqrt{V^2 + v^2}$ in einer im Winkel $\alpha = arc\,sin\,V(\sqrt{V^2+v^2})$ gegen die Platte geneigten Richtung haben. Folglich ist (unter Vernachlässigung der Störungen infolge der Lagenänderung der Plattenkanten) die mittlere Kraft senkrecht zur Platte

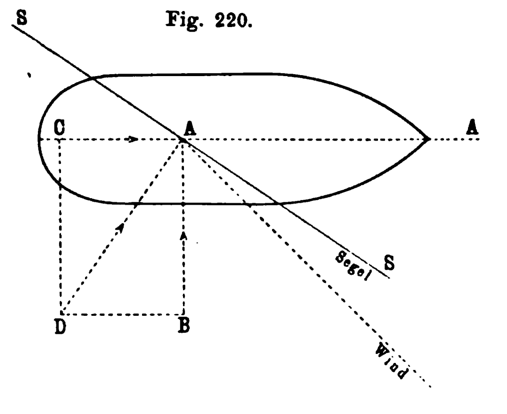
$$\frac{\pi \sin\alpha}{4 + \pi \sin\alpha}\,\varrho\,(V^2 + v^2) = \varrho\,\frac{\pi V}{\pi V + 4\sqrt{V^2 + v^2}}\,(V^2 + v^2) \tag{54}$$

Die Kraft senkrecht zum Ruder ändert sich also im Verhältnis

$$\frac{(4 + \pi)(V^2 + v^2)}{V\left(\pi V + 4\sqrt{V^2 + v^2}\right)}.$$

Die Steigerung des Breitseitenwiderstandes infolge der Querbewegung eines länglichen Körpers durch Wasser wird durch die Verminderung des Leeweges veranschaulicht, die ein Fahrzeug bei der Steigerung seiner Windwärtsgeschwindigkeit erfährt. In Fig. 220 gibt SS die Richtung des Segels eines in der Richtung AA segelnden Schiffes an. Der Wind liefert eine Komponente DA senkrecht zum Segel, die sich ihrerseits wieder in zwei Komponenten CA in der Bewegungsrichtung, BA senkrecht dazu, auflöst; die durch die letztere erzeugte Bewegung heißt Leeweg oder Leedrift.

Fig. 220.



So berichtet z. B. B. Froude: Als ein Schiff windwärts arbeitete, war es sofort nach dem Umlegen bemerkbar, daß sein Leeweg viel kräftiger war als später, während es schon vorwärts ging; und je schneller es vorwärts ging, um so schwächer wurde die Leedrift.

Kehren wir jetzt zu der Platte zurück, so liegt der Punkt größten Druckes da, wo sich der Strom vor ihr teilt, also, wenn die Platte senk-

recht zum Strome liegt, in der Mitte zwischen ihren Kanten; ist sie dagegen geneigt, so liegt er der Stromaufkante näher als der andern. Die Rechnung zeigt in der Tat, daß die Resultante im Abstande

$$\frac{3\,l\cos\alpha}{4\,(4+\pi\sin\alpha)}$$

von der Mitte angreift, wo l die Plattenbreite ist. Dieser Ausdruck wird wirklich null für $\alpha = \pi/2$, dagegen $3\,l/16$ für $\alpha = 0$, d. h. wenn die Platte längs dem Strome liegt.

Lord Rayleigh betont, daß die Kraft für die Flächeneinheit genau gleich $^1/_2\,\varrho\,q^2$ gemacht werden kann, wenn das Hindernis die Form des Bodens eines Kastens mit zwei vertikalen Seiten hat, die sich stromaufwärts soweit fortsetzen, daß die Flüssigkeit an der Oberfläche des Hindernisses nahezu in Ruhe ist.

380. Stabile Lage einer bewegten Platte. Wenn die Platte sich um eine vertikale, durch ihre Breite gehende Axe drehen kann, so ist sie nur dann stabil, wenn sie breitseits in der Stromrichtung steht. Um dies zu veranschaulichen, hat Lord Rayleigh ein einfaches Experiment erdacht, das jedermann ausführen kann. Ein Metallstreifen wird an den Enden zugespitzt und mit seinen Spitzen in zwei in die inneren Oberflächen der Enden eines U-förmigen stärkeren Streifens eingebohrte Löcher lose eingesetzt.

Wenn der Streifen durch das Wasser bewegt wird, stellt er sich senkrecht zur Bewegungsrichtung.

Es gibt einen Einwand gegen die hier angenommene Art der Bewegung, bei der ein Gebiet ruhender Flüssigkeit von der bewegten Flüssigkeit durch eine Diskontinuitätsoberfläche getrennt ist; nämlich der Einwand, daß eine derartige Bewegung unstabil sein müßte. Denn wenn irgend ein Anschwellen der Oberfläche in das Gebiet der bewegten Flüssigkeit hinein stattfände, so würde in diesen Raum eine Druckerhöhung hineingebracht, die das Bestreben hätte, die Schwellung weiter auszubreiten, und es würde die Abweichung der Oberfläche von der durch die Bedingung konstanten Druckes bestimmten Gleichgewichtsform vergrößert werden. Lord Rayleigh bezweifelt aber, daß der Wert des Widerstandes dadurch materiell berührt werden würde, da doch die Unstabilität erst in einiger Entfernung hinter der Platte anfangen und der Druck vor der Platte nur unbedeutend beeinflußt werden würde.

Die Ergebnisse werden durch einige alte Experimente von Vince, in den Phil. Trans. von 1798 veröffentlicht, bestätigt. Die gewöhnliche Theorie ergibt die Kraft für eine geneigte Platte als proportional mit $\sin^2\alpha$ statt mit $\sin\alpha/(4+\pi\sin\alpha)$, wie in Lord Rayleighs Theorie. Die folgende Tabelle aus der Abhandlung von Lord Rayleigh ergibt eine Vergleichung von Zahlen, die mit den von Vince erhaltenen

Widerständen proportional sind, mit den durch Berechnung nach den beiden obigen Formeln erhaltenen:

α	$\sin^2 \alpha$	Vincesche Zahlen	$\frac{\sin \alpha (4 + \pi)}{4 + \pi \sin \alpha}$
90°	1,0000	1,0000	1,0000
70	0,8830	0,974	0,9652
50	0,5868	0,873	0,8537
30	0,2500	0,663	0,6411
20	0,1170	0,458	0,4814
10	0,0302	0,278	0,2728

Die Übereinstimmung der vierten Spalte mit der dritten ist sehr gut; dagegen ist zwischen der zweiten und dritten durchaus keine Übereinstimmung.

Die Untersuchung des Widerstandes in diesem Falle von Bewegung ist von größter Wichtigkeit für die Theorie der Windplatten und des Fluges der Vögel.

---

381. Eine sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit drehende Flüssigkeit. Erzwungener Wirbel. Ein Fall, in dem Stromlinien vorhanden sind, ist der einer Flüssigkeit, die sich in stationärer Bewegung unter der Wirkung der Schwere um eine vertikale Axe dreht. Dieser, als erzwungener Wirbel bekannte Vorgang ist ebenso wie der „freie Wirbel", der alsbald betrachtet werden soll, von großer Wichtigkeit in der Theorie der Turbinen und Wassermotoren.

Eine sich mit der Flüssigkeit bewegende Linie von Teilchen ist z. B. eine auf der freien Oberfläche in jedem Punkte senkrecht zu den Stromlinien gezogene Linie. Die Strömung längs dieser Linie ist null, und folglich ist die linke Seite von Gl. (16) null. Demnach hat man nach Gl. (16)

$$-\int_s \frac{dp}{\varrho} - V_1 + V_0 + \frac{1}{2}(q_1^2 - q_0^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Die Linie möge beim Schnittpunkt der Axe mit der freien Oberfläche anfangen und bei einer Stromlinie vom Radius r enden. Die Geschwindigkeit an der Axe ist null, die am Ende ist $q_1^2 = \omega^2 r^2$. Auch ist, da $dp = 0$ ist, $\int dp/\varrho = 0$, und man hat

$$V_1 - V_0 = \frac{1}{2}\omega^2 r^2.$$

Nun kann, wie man weiß, die potentielle Energie V der Flüssigkeit pro Masseneinheit als $-gz$ angenommen werden, wo z die Tiefe des betrachteten Elementes unter einer festen horizontalen Ebene ist.

Es sei h die Tiefe des Schnittpunktes der Axe mit der Oberfläche unter der gewählten Ebene und z die Tiefe des betrachteten Elementes unter derselben Ebene. Man hat alsdann $V_1 - V_0 = g(h - z)$. Folglich ergibt sich

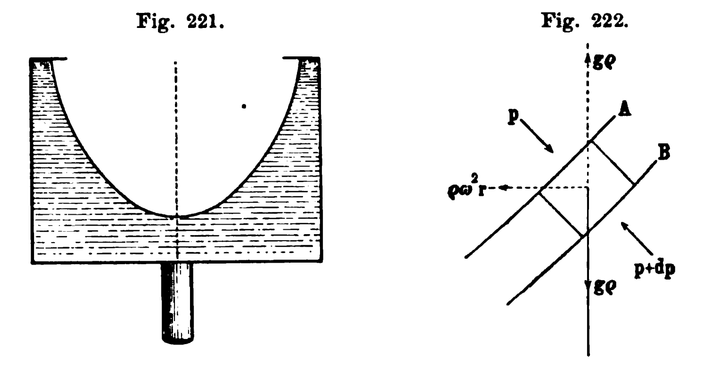
$$\omega^2 r^2 = 2g(h - z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Diese Beziehung zwischen r und z stellt ein Umdrehungsparaboloid dar, welches demnach die Form der freien Oberfläche ist. Wenn man x' für $h - z$ schreibt, lautet seine Gleichung

$$r^2 = \frac{2g}{\omega^2} x' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Der Parameter des Paraboloids ist also $2g/\omega^2$. Ein Schnitt durch ein Paraboloid ist in Fig. 221 gegeben und gibt das Aussehen der

Fig. 221. Fig. 222.



freien Oberfläche in einiger Entfernung von der Seite des rotierenden Gefäßes.

Dieser Fall kann in der folgenden, mehr elementaren Weise als ein Fall von Gleichgewicht eines rotierenden Körpers behandelt werden. Es seien A, B (Fig. 222) durch das Papier gelegte Schnitte von zwei Oberflächen gleichen Druckes. Man betrachte ein kleines rechteckiges Element mit Seiten in beiden Oberflächen, zu denen folglich die beiden anderen Seitenpaare senkrecht liegen. Wenn Gleichgewicht herrschen soll, muß die Druckdifferenz dp die vertikale Kraft liefern, die zum Ausgleich der Schwerkraft nötig ist, und die horizontale Kraft, die notwendig ist, um die Beschleunigung $\omega^2 r$ gegen die Axe zu geben; oder, wie man gewöhnlich sagt (wenn der Fall durch Einführung einer Zentrifugalkraft $m\omega^2 r$ von der Axe weg zu einem rein statischen reduziert wird): die Druckdifferenz muß der Resultanten aus Schwere und Zentrifugalkraft gleich und entgegengesetzt sein.

Die Beschleunigung senkrecht zu den Oberflächen A und B ist die Äquilibrierung der beiden Größen: $\omega^2 r$ nach außen und g nach unten, und darum ist die Tangente der Neigung des Querschnitts von A oder B zur Horizontalen gleich $\omega^2 r/g$, was, da z positiv nach unten

genommen ist, gleich $-dz/dr$ ist. Folglich erhält man durch Integration $-gz = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + C$. Aber an der Axe ist $r = 0$ und z gleich einem Betrage H; folglich ist $C = -gH$. Daher ist die Integralgleichung einer Oberfläche gleichen Drucks

$$2g(H - z) = \omega^2 r^2,$$

was mit dem schon gefundenen Ergebnis übereinstimmt.

Der Änderungsgrad des Drucks längs r ist offenbar durch $dp/dr = \varrho\omega^2 r$ gegeben, und es ist daher

$$p = \frac{1}{2}\varrho\omega^2 r^2 + C \quad \dots\dots\dots \quad (59)$$

wo C eine Konstante ist. Dies zeigt, wie der Druck mit der Entfernung von der Axe zunimmt; es ist dies natürlich nur das schon in der Gl. (56) erhaltene Ergebnis, da für Änderung in einer horizontalen Richtung V eine Konstante ist.

Wird p in Gravitationseinheiten (etwa in Kilogrammgewichten pro Quadratzentimeter) gemessen, so lautet die obige Gleichung

$$p = \frac{1}{2}\frac{\varrho}{g}\omega^2 r^2 + \frac{C}{g} \quad \dots\dots\dots \quad (60)$$

wo ϱ das Gewicht der Flüssigkeit in einer Volumeneinheit (z. B. Kilogrammgewichten pro Kubikzentimeter) und g die Beschleunigung durch die Schwere (z. B. 981 cm pro sec) ist.

Für die Richtung der Normale zur Oberfläche konstanten Drucks, d. h. der Resultante aus Schwere und Zentrifugalkraft, hat man

$$\frac{dz}{dr} = \frac{g}{\omega^2 r}$$

oder

$$z = \frac{g}{\omega^2}\log r + C' \quad \dots\dots\dots \quad (61)$$

wo C' eine andere Konstante ist.

Um den Druck für einen Punkt im Innern der Flüssigkeit zu finden, muß man eine Linie von irgend einer Oberflächenstromlinie radial ins Innere ziehen; r möge jetzt den Abstand der Axe von der erreichten Stromlinie bezeichnen. Wenn P der Druck im Endpunkt ist, hat man wie in Gl. (56)

$$p - P + g\varrho(H - z) = \frac{1}{2}\varrho\omega^2 r^2 \quad \dots\dots \quad (62)$$

Dieses Ergebnis ist in Wahrheit das auf einem anderen Wege erhaltene in Gl. (59) ausgedrückte.

Die Fläche gleichen Drucks ist ebenfalls ein Rotationsparaboloid um die Drehungsaxe, und es ist leicht einzusehen, daß es sich von dem ersten nur durch eine veränderte Lage des Scheitelpunktes unterscheidet, der in einem Abstand $(p - P)/\varrho g$ unter dem des Oberflächenparaboloids liegt.

382. Ein in einen erzwungenen Wirbel eingetauchtes Bleigewicht. Es ist interessant, die Gleichgewichtslage eines Pendels zu betrachten, das an einem Axenpunkt eines solchen Wirbels aufgehängt ist, und dessen Pendelkörper in die Flüssigkeit eintaucht und sich mit ihr dreht. Nach den Darlegungen im vorigen Artikel wird das Gewicht im Gleichgewicht sein, wenn der Faden zur Oberfläche gleichen Drucks, auf der es liegt, senkrecht ist. Offenbar wird er nicht im Gleichgewicht sein, außer wenn dies der Fall ist, wie man aus der Tatsache ersieht, daß die Zentrifugalkräfte und die Gravitationskräfte im Verhältnis $\omega^2 r/g$ stehen, und daß ihre Resultante mit der Axe einen Winkel bildet, dessen Tangens diesen Wert hat.

Der durch den Faden wirkende Zug muß die Wirkung dieser Resultante aufheben, abgesehen von dem Teil, der schon durch das Eintauchen des Gewichts in die Flüssigkeit aufgehoben wird.

Hängt der Pendelfaden vertikal und ist die Länge des Fadens größer als der Krümmungsradius g/ω^2 am Scheitel des Paraboloids, auf dem das Gewicht liegt, so wird das Gewicht nach der Ablenkung sich in einer Lage befinden, in der der Faden einen kleineren Winkel mit der Vertikalen bildet als die Normale des Paraboloids, auf dem jetzt das Gewicht liegt. Der Zug wird nicht die notwendige horizontale Kraft $\omega^2 r$ ersetzen, und der Faden wird sich weiter von der Vertikalen fortbewegen. Das Gewicht befindet sich in diesem Falle im labilen Gleichgewichte. Ist die Länge kleiner als g/ω^2, so wird das Gleichgewicht stabil sein.

Ist das Gewicht spezifisch leichter als die Flüssigkeit, so muß der Faden an einem Punkte des rotierenden Gefäßes unter der Oberfläche befestigt werden, und das Gewicht wird nach der entgegengesetzten Richtung gedreht werden. Es wird in diesem Falle stabil sein, wenn es in der Axe liegt.

Es wird im Zusammenhange mit dem archimedischen Prinzip gezeigt werden, daß, wenn das Gewicht des Pendelkörpers w und sein spezifisches Gewicht s ist, sein Gewicht in Wasser $w(1 - 1/s)$ ist. Die Kraft senkrecht nach unten und die Zentrifugalkraft (relativ zur Flüssigkeit von dem Körper auf die Flüssigkeit, in die er eintaucht, ausgeübt) sind

$$wg\left(1 - \frac{1}{s}\right) \quad \text{und} \quad w\left(1 - \frac{1}{s}\right)\omega^2 r.$$

Die letztere Kraft ist negativ, wenn $s < 1$ ist, und so strebt das Gewicht dem tiefsten Punkte zu. So bewegt sich, wie jedermann beobachten kann, ein in einem Strudel schwimmender Körper nach dem tiefsten Punkte als einer Gleichgewichtsstelle zu.

383. Erzwungener Wirbel mehrerer sich nicht mischender Flüssigkeiten. Besteht die Flüssigkeit aus verschiedenen nicht mischbaren Teilen von verschiedenen Dichten, so wird sie sich in einem er-

zwungenen Wirbel in einer Reihe von Schichten anordnen, die von der freien Oberfläche nach dem Innern zu von Schicht zu Schicht an Dichte zunehmen. Daß es sich so verhalten muß, geht aus § 381 hervor. Diejenige Druckkraft, welche bei einem bestimmten Radius und Niveau einem Flüssigkeitselement von der Dichte ϱ die erforderliche Beschleunigung nach der Mitte erteilt, wird nicht genügen, dieselbe Beschleunigung einem Element von gleichem Volumen, aber größerer Dichte bei gleichem Abstand und Niveau zu erteilen.

Aus diesem Umstande wird für verschiedene technische Zwecke Vorteil gezogen. Z. B. wird ein mit Milch gefülltes Gefäß schnell um eine vertikale Spindel gedreht, deren Axe mit der Figuraxe des Gefäßes zusammenfällt. Der leichtere Teil, der Rahm, wird auf diese Weise in die Mitte des Gefäßes gebracht, während der schwerere, mehr Wasser enthaltende Teil infolge der Zentrifugalkraft nach außen geht. Die also voneinander getrennten Rahm und abgerahmte Milch werden durch nach den äußeren und inneren Teilen des Gefäßes führende Röhren abgezogen und in verschiedenen Gefäßen aufgefangen.

384. Freier Wirbel. Wenn die Winkelgeschwindigkeit nicht konstant, sondern eine Funktion des Abstandes von der Axe ist, muß anders vorgegangen werden, insofern dann nicht eine Linie konstanter (Null-) Strömung dadurch, daß man eine radiale Linie von Teilchen nimmt, gefunden werden kann. Es möge ein Geschwindigkeitspotential existieren; dann hat man für eine beliebige Linie von Teilchen in der Flüssigkeit

$$\frac{p}{\varrho} + V + \frac{1}{2} q^2 = C,$$

wo C eine Konstante durch die ganze Flüssigkeit ist.

Wendet man diesen Ausdruck auf eine in der radialen Ebene von einem Punkte, in dem $p = P$, $V = -gh$ und $q^2 = Q^2$ ist, nach einem beliebig gewählten Endpunkt gezogene Linie an, so hat man

$$\frac{p}{\varrho} - gz + \frac{1}{2} q^2 = \frac{P}{\varrho} - gh + \frac{1}{2} Q^2$$

oder

$$\frac{p - P}{\varrho} = -g(h - z) - \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{2} Q^2 \quad . \; . \; . \quad (63)$$

Für den Fall der Rotation sind die Geschwindigkeitskomponenten durch $u = -\omega y$, $v = \omega x$ gegeben, wo x und y die horizontalen rechtwinkligen Koordinaten eines betrachteten Punktes, von einem Anfangspunkt der Axe aus gerechnet, sind. Folglich ist

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega + x \frac{\partial \omega}{\partial x} + y \frac{\partial \omega}{\partial y} = 2\omega + r \frac{\partial \omega}{\partial r}.$$

Darum muß es, wenn

$$2\omega + r\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$$

ist, ein Geschwindigkeitspotential geben. Diese Beziehung ist äquivalent mit $\omega r^2 = c$, wo c eine Konstante ist, d. h. die Winkelgeschwindigkeit muß mit r^2 umgekehrt proportional sein. Die wirkliche lineare Geschwindigkeit q ist demnach c/r. Für eine Oberfläche gleichen Druckes erhält man dann

$$\frac{p-P}{\varrho} - \frac{1}{2}Q^2 + g(h-z) = -\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

Setzt man für die Größe auf der linken Seite $-gz'$, so hat man als Gleichung einer Oberfläche gleichen Drucks

$$r^2 z' = \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}.$$

Eine Oberfläche gleichen Drucks ist demnach eine solche, die aus der Rotation um die Axe von derjenigen quasi-hyperbolischen Kurve entsteht, deren Gleichung $x^2 z' = c^2/2g$ ist. Der Wert von x^2 ist um so kleiner, je größer z' ist, und darum verengt sich der Durchschnitt der freien Oberfläche mit zunehmender Tiefe des Querschnitts unter einer festen Ebene. Auch verringert sich der Abnahmegrad von x mit wachsendem z' (denn d^2x/dz'^2 ist positiv), und die Kurve ist daher nach der Axe zu konvex.

Wenn P Atmosphärendruck ist, erhält man die freie Oberfläche aus Gl. (64), indem man $p = P$ setzt. Dies ist der sog. freie Wirbel. Wenn das Niveau, auf dem die Geschwindigkeit Q ist, die freie ungestörte Oberfläche weit vom Wirbel ist, so ist $Q = 0$, und man sieht, daß die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte der freien Oberfläche die durch $v^2 = 2gh'$ gegebene ist, wo h' die Tiefe des Punktes unter der ungestörten Oberfläche ist. Die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte im Innern der Flüssigkeit ist dieselbe, wie die des Punktes vertikal darüber auf der freien Oberfläche.

Da jedes Teilchen die Geschwindigkeit c/r hat, so ist das Moment seiner Bewegungsgröße um die Axe dasselbe in jedem Abstande von der Axe; und folglich ist, wenn ein Flüssigkeitselement seinen Abstand von der Axe ändert, keine drehende Bewegung nötig, um ihm das seiner neuen Lage zugehörige Moment der Bewegungsgröße zu erteilen.

Es muß indessen beachtet werden, daß der vorliegende Fall kein Fall von Wirbelbewegung im wissenschaftlichen Sinne ist. Denn es findet gar keine Rotation der Flüssigkeitselemente statt, da die Bedingungen für die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials erfüllt sind. In jedem Augenblick wird jedes Flüssigkeitselement als Körper in einer Stromlinie um die Axe getragen, während jedes Teilchen des Elements sich im selben Augenblick mit einer nach Größe und Richtung gleichen Geschwindigkeit fortbewegt. Es ist deshalb konsequenter,

die vorliegende Erscheinung, wie dies in Deutschland geschieht, gar nicht erst als Wirbel zu bezeichnen, diesen Namen vielmehr ausschließlich auf solche Gebilde anzuwenden, für welche kein Geschwindigkeitspotential existiert.

Man wird bemerken, daß diese Bewegung für Flüssigkeitsteilchen, die in der Axe liegen, unendliche Geschwindigkeit liefert. Man kann sich nun leicht eine Kombination eines freien mit einem erzwungenen Pseudowirbel vorstellen, bei welcher der untere Teil des axialen Raumes innerhalb eines Quasi-Hyperboloids, das sonst freie Oberfläche sein könnte, mit Flüssigkeit erfüllt ist, die nach dem in § 381 angegebenen Gesetze rotiert. Unstetigkeit der Bewegung an der Grenzfläche läßt sich vermeiden, wenn man ω geeignet wählt, so daß die Gl. (62) und (64) daselbst beide erfüllt sind (vergl. Riemann-Weber, Die part. Differentialgleichungen der math. Physik, Bd. II, § 149). Innerhalb jenes axialen Raumes findet dann richtige Wirbelbewegung statt. Beispiele derartiger „Compound-Wirbel" werden weiter unten in § 386 erwähnt werden.

385. Stationäre radiale Strömung. Betrachten wir jetzt den Fall stationärer radialer Strömung aus einem axialen kreisförmigen Zylinder heraus oder in ihn hinein, der im ersten Fall eine Oberfläche ist, aus der die Flüssigkeit ausströmt, im zweiten eine Oberfläche, in der die aus dem betrachteten Hohlraum ausgeströmte Flüssigkeit aufgefangen wird. Im ersten Falle kann man die Oberfläche eine Quellenfläche, im anderen eine Senkenfläche nennen.

Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit sei innerhalb jeder der zylindrischen Oberflächen, die mit der Quelle oder Senke koaxial sind, dieselbe. Da gleiche Flüssigkeitsmengen sich über immer größere zylindrische Oberflächen verbreiten, und da die Dichte ϱ unveränderlich sein soll, so wird die Geschwindigkeit mit dem Zylinderradius umgekehrt proportional sein, in Formel

$$\frac{v}{v_0} = \frac{r_0}{r}.$$

Offenbar ist dies ein Fall, in dem es ein Geschwindigkeitspotential gibt; es ist $\varphi = - v_0 r_0 \log r$, woraus sich der Ausdruck

$$-\frac{d\varphi}{dr} = v_0 \frac{r_0}{r}$$

ergibt.

Man kann auf diesen Fall genau dieselbe Analyse anwenden wie auf den vorigen und gelangt zu genau demselben Ergebnis. Denn das Bernoullische Theorem ergibt genau Gl. (64) mit $c^2 = r_0^2 v_0^2$, und die Oberflächen gleichen Drucks sind dieselben wie in dem früheren Falle.

386. Spiralwirbel. Haben wir alsdann in einem beliebigen Fall eines freien Wirbels Teile der Flüssigkeit, die sich an irgend einer Stelle,

etwa nach innen, mit einer aus Kreis- und Radialbewegung zusammengesetzten Bewegung fortpflanzen, wobei die Geschwindigkeit in jedem umgekehrt gleich dem Abstande von der Axe ist, so werden die Oberflächen gleichen Drucks genau dieselben sein, als ob die Bewegung rein zirkular oder rein radial wäre. Also können die beiden Bewegungen nebeneinander bestehen, und man hat damit den sog. Spiralwirbel. Es gibt keine zylindrische Oberfläche, wie sie oben angenommen wurde, in der die Flüssigkeit aufgefangen wird, aber es gibt eine freie Oberfläche von der nach Gl. (64) gegebenen Form. Die Flüssigkeit hat, im Zusammenhange mit den soeben behandelten Bewegungen, eine abwärts gerichtete Bewegung, durch die sie am tiefsten Punkte dem Wirbel entzogen wird.

In einem Spiralwirbel, in dem die zirkularen und radialen Geschwindigkeitskomponenten dem Abstand von der Axe umgekehrt proportional sind, haben die Stromlinien überall die gleiche Neigung gegen den nach dem betrachteten Punkte gezogenen Radiusvektor. Denn, wenn a/r, b/r die zirkularen und radialen Geschwindigkeiten sind und φ der Winkel ist, den die Stromlinie mit dem Radius bildet, hat man $tg\varphi = a/b$. Die Stromlinien sind also gleichwinklige Spiralen, deren Pole auf der Axe liegen.

Von dieser Art ist die Bewegung in der Wirbelkammer einer nach den Angaben von J. Thomson konstruierten Zentrifugalpumpe. Das Wasser wird an der Peripherie des Rades ausgeworfen und strömt spiralig nach außen in einen umgebenden Raum von etwa dem doppelten Durchmesser wie das Rad, bis es an der äußeren Peripherie das Abflußrohr erreicht und die Kammer tangential — oder beinahe tangential — verläßt. Die Geschwindigkeit nimmt also ab, und der Druck wächst entsprechend, und mit ihm folglich auch die Fördermenge der Pumpe, wenn sie zur Beförderung von Wasser auf ein höheres Niveau benutzt wird.

Das Wasser im Rade dreht sich mit diesem, und dadurch gibt es eine Kombination der erzwungenen und freien Wirbel.

Zyklone sind zweifellos Wirbel von der hier beschriebenen Art, haben aber einen Mittelteil, worin die Flüssigkeit bezw. die Luft in jedem Punkte mit annähernd gleicher Winkelgeschwindigkeit rotiert, so daß die Geschwindigkeit im Mittelpunkt sehr klein ist. Dies wird durch die Tatsache bestätigt, daß im Zentrum eines Zyklons verhältnismäßige Ruhe bei sehr kleinem Druck herrscht, was nach § 384 zu erwarten ist.

Auch wird die Flüssigkeit nahe am Grunde des Wirbels durch Reibung am Wasser oder am Boden verzögert, und darum — da der Druck in den äußeren Teilen des Wirbels größer ist als in den inneren — strömt die Luft nahe am Boden ebenso nach innen, wie sie rotiert. Die spiralig im Zentrum ankommende Luft wird von dort heraufgeweht, manchmal zusammen mit Staub oder Wasser in aufgelöstem Zustande, wie Schaum oder Gischt.

Wasser, das in einem Waschbecken rotiert und durch ein Loch im Boden abläuft, bietet einen Fall eines freien Spiralwirbels, zweifellos durch Reibung gehemmt, besonders wo das Wasser mit dem Becken in Berührung ist. Die Geschwindigkeit ist groß in der Mitte, an der Axe und klein an den Seiten, wo auch der Druck größer ist. Infolge der Verzögerung an den Gefäßwänden gibt es an den Seiten eine Flüssigkeitsströmung nach unten.

387. Theorie der Bildung von Flußkrümmungen nach J. Thomson. Ein anderer Fall eines freien Spiralwirbels kann in der Krümmung eines Flußlaufs gefunden werden; J. Thomson hat auf diese Weise eine Erklärung des Zurückweichens des äußeren Flußufers an einer Biegung und der Deltabildung gegeben. Wenn das Wasser um das Knie (Fig. 223) herumfließt, ist der Druck gegen das äußere Ufer nach der eben gegebenen Theorie größer, folglich ist das Niveau dort höher, da sonst das fließende Wasser nicht im Gleichgewicht sein würde. Aber infolge der Verzögerung durch die Reibung am Grunde erfordert das Wasser dort geringere Beschleunigung nach dem inneren Ufer zu, und folglich veranlaßt der Überdruck eine schräg nach innen gerichtete Strömung am Grunde entlang, die über dem Knie anfängt, wie die punktierte Linie in Fig. 223 anzeigt. Auch wird am äußeren Ufer das Wasser, das sich dort schnell bewegt, durch die Reibung am Ufer einigermaßen verzögert, und es entsteht eine Strömungskomponente nach unten am Ufer entlang, wie aus Fig. 224 ersichtlich ist. Das glatt dahinfließende Wasser glättet die Oberfläche am äußeren Ufer, und die durch den Strom am Grunde fortgesetzte Strömung nach unten bringt Sand und Schlamm mit und lagert es in gewissen Mengen am inneren Ufer ab. Das innere Ufer ist außerdem durch eine Lage langsam aufwärts strömender Flüssigkeit geschützt. Dadurch wird die Biegung schärfer und schärfer, bis der Fluß an günstiger Stelle und Zeit das immer schmaler gewordene Stück Land zwischen den beiden Teilen des Knies durchschneidet, einen Teil davon zur Insel zwischen zwei Kanälen macht und so ein Delta bildet.

Fig. 223.

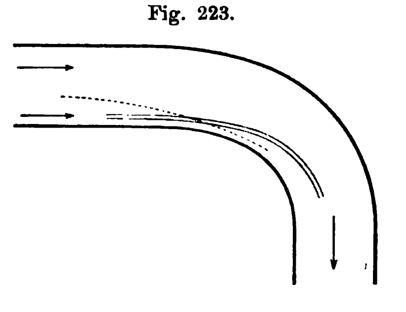


Fig. 224.

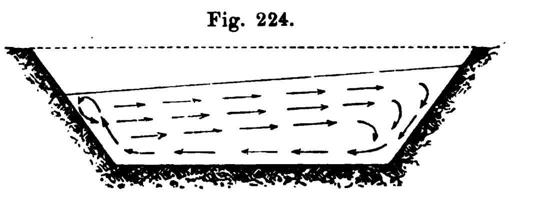


Fig. 224 zeigt die allgemeine Natur der Strömung in einem Quer-

schnitt des Stromes. Man muß natürlich bedenken, daß die Zeichnung nur die Querkomponente der Strömung gibt.

Man kann die Strömungen leicht in kleinem Maßstabe darstellen, wie es Thomson tat, indem man Wasser durch ein künstliches Flußbett laufen läßt und die Strömung an verschiedenen Stellen dadurch beobachtet, daß man kleine Kristalle von Kaliumpermanganat oder Anilin hineinbringt. Die Kristalle lösen sich auf und zeigen durch die von ihnen ausgehenden Stromfäden die Strömungsrichtung an.

388. Kinetische Energie einer Flüssigkeit im einfach zusammenhängenden Raume. Theorem von der kleinsten Energie. Physikalische Analogien. Die kinetische Energie U in einem beliebigen, mit Flüssigkeit erfüllten Raume ist

$$\frac{1}{2}\int \varrho\, q^2\, d\tilde{\omega},$$

wo $d\tilde{\omega}$ ein Volumenelement und das Integral über den ganzen Raum genommen ist. Wenn es ein Geschwindigkeitspotential für den ganzen Raum gibt, hat man

$$U = \frac{1}{2}\int \varrho\, q^2\, d\tilde{\omega} = \frac{1}{2}\iiint \varrho\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz \quad (65)$$

Ist der Raum einfach zusammenhängend oder wird er durch Scheidewände dazu gemacht, so kann man diesen Ausdruck partiell integrieren und erhält dann

$$U = -\frac{1}{2}\int \varphi\left(l\frac{\partial\varphi}{\partial x} + m\frac{\partial\varphi}{\partial y} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) dS - \frac{1}{2}\iiint \varrho \triangle\varphi\, dx\,dy\,dz \quad (66)$$

wo im ersten Gliede die Integration über die Oberfläche des Raumes, im zweiten über den Raum selbst zu erstrecken ist, und wo l, m, p die Richtungskosinus der nach innen gekehrten Oberflächennormale sind. Ist aber ϱ unveränderlich, so ist nach der Kontinuitätsgleichung $\triangle\varphi = 0$. Folglich ist dann für nicht wirbelnde Bewegung in einer Flüssigkeit von unveränderlicher Dichte die kinetische Energie innerhalb der Oberfläche durch den Ausdruck

$$U = -\frac{1}{2}\varrho\int \varphi\frac{d\varphi}{dn}\, dS \quad \ldots\ldots \quad (67)$$

gegeben, wo $d\varphi/dn$ für

$$l\frac{\partial\varphi}{\partial x} + m\frac{\partial\varphi}{\partial y} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

den Änderungsgrad von φ längs der Normalen von der Oberfläche nach innen gegen den Raum zu, gesetzt ist.

Es muß beachtet werden, daß, wenn

$$\int \frac{d\varphi}{dn}\, dS = 0$$

ist (und die Bedingung ist stets erfüllt, wenn die gesamte Oberfläche eines Raumes, in dem $\triangle \varphi = 0$ ist, betrachtet wird) die Hinzufügung einer unbestimmten Konstante zu φ durchaus nicht den Wert der kinetischen Energie beeinflußt.

Es folgt aus Gl. (67), daß, wenn 1. in der ganzen Oberfläche $\varphi = 0$, oder 2. in der ganzen Oberfläche $d\varphi/dn = 0$ oder 3. in einem Teil der Oberfläche $\varphi = 0$ und in dem Rest $d\varphi/dn = 0$ ist, $U = 0$ ist. Überdies ist, da das Integrationselement $q^2 d\tilde{\omega}$ überall positiv ist, die Flüssigkeit überall in Ruhe, wo eine der drei Bedingungen erfüllt ist.

Wenn also in keinem Punkte der Oberfläche Flüssigkeitsbewegung normal zur Oberfläche stattfindet, so ist die Flüssigkeit überall in Ruhe. Wenn aber die Oberfläche in Ruhe ist, d. h. wenn der betrachtete Raum von vollkommen starren Wänden begrenzt wird, ist $d\varphi/dn = 0$, und es kann im ganzen Raume keine nicht wirbelnde Flüssigkeitsbewegung geben. Dies gilt natürlich nur, wenn ϱ unveränderlich ist.

Betrachten wir eine andere Bewegung, deren Geschwindigkeitskomponenten $u + u_0$, $v + v_0$, $w + w_0$ sind, wo

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

und $lu_0 + mv_0 + pw_0 = 0$ sind, so daß die Geschwindigkeit normal zur Oberfläche in jedem Elemente dieselbe ist, wie in der eben betrachteten Bewegung. Es sei auch

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0.$$

Aus den für u_0, v_0, w_0 gegebenen Bedingungen folgt:

$$\iiint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} u_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} v_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} w_0\right) dx\, dy\, dz$$
$$= -\int \varphi\,(l u_0 + m v_0 + p w_0)\, ds$$
$$- \iiint \varphi \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = 0.$$

Die kinetische Energie der neuen Bewegung aber ist:

$$U = \frac{1}{2}\varrho \left[\int (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tilde{\omega} + \int (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)\, d\tilde{\omega} \right.$$
$$\left. + 2 \int (u u_0 + v v_0 + w w_0)\, d\tilde{\omega}\right].$$

Das dritte Glied auf der rechten Seite verschwindet nach dem soeben gefundenen Ergebnis; folglich ist:

$$U = U_1 + U_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

wo U_1 und U_0 die kinetischen Energieen der nicht wirbelnden Bewegung (u, v, w) und die Bewegung (u_0, v_0, w_0) sind, welche letztere, abgesehen von den oben festgestellten Bedingungen, unbeschränkt ist.

Demnach ist die kinetische Energie der nicht wirbelnden Bewegung (u, v, w) der Flüssigkeit um so viel kleiner, als die kinetische Energie jeder anderen dieselben Oberflächenbedingungen und die Kontinuitätsgleichung erfüllenden Bewegung als die kinetische Energie derjenigen Bewegung beträgt, welche mit der nicht wirbelnden Bewegung zusammengesetzt werden muß, um jene andere zu erzeugen.

Dieses von Lord Kelvin herrührende Theorem ist ein spezieller Fall des folgenden allgemeineren, ebenfalls von Lord Kelvin aufgestellten Theorems: Die kinetische Energie eines materiellen Systems, das durch Impulse auf bestimmte Punkte, die dadurch bestimmte Geschwindigkeiten erhalten, aus der Ruhelage in Bewegung versetzt wird, ist kleiner als die kinetische Energie jeder anderen, dieselben Geschwindigkeitsbedingungen erfüllenden Bewegung (s. oben § 251).

In einer Flüssigkeit von unveränderlicher Dichte, die außerhalb einer geschlossenen Fläche s_1 einen unendlichen Raum erfüllt, ist die kinetische Energie

$$U = -\frac{1}{2}\varrho\int\varphi\frac{d\varphi}{dn}\,ds_1.$$

Es ist nicht erlaubt, dies nach Gl. (68) anzunehmen auf Grund dessen, daß jetzt s_1 die ganze Begrenzung der Flüssigkeit ist. Man kann sich aber eine Oberfläche s_2, die s_1 einschließt, in der Flüssigkeit denken; wenn im Zwischenraume zwischen s_1 und s_2 $\triangle\varphi = 0$ ist, hat man

$$\int\frac{d\varphi}{dn}\,ds_1 + \int\frac{d\varphi}{dn}\,ds_2 = 0.$$

Man wird bemerken, daß, wo auch immer die äußere Oberfläche s_2 geschlagen werden möge, das Integral

$$\int\frac{d\varphi}{dn}\,ds_2$$

immer denselben Wert hat. Dadurch nun, daß man s_2 in jedem Punkte genügend weit von s_1 entfernt wählt, kann man dem Geschwindigkeitspotential in allen Punkten von s_2 einen beliebig annähernd konstanten Wert geben. Dieser sei C, dann hat man für die kinetische Energie im Zwischenraume

$$U = -\frac{1}{2}\varrho\left[\int\varphi\frac{d\varphi}{dn}\,ds_1 + \int C - \frac{d\varphi}{dn}\,ds_2\right] \quad . \; . \quad (69)$$

Wenn keine Strömung der Flüssigkeit durch die äußere Grenzfläche stattfindet, dann ist

$$\int\frac{d\varphi}{dn}\,ds_2 = -\int\frac{d\varphi}{dn}\,ds_1 = 0,$$

und es ergibt sich:

$$U = -\frac{1}{2}\varrho\int\varphi\frac{d\varphi}{dn}\,ds_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (70)$$

Das ist die kinetische Energie der Bewegung außerhalb einer beliebigen geschlossenen Oberfläche, die Quellen und Senken einschließt, wo im ganzen die Quellen in jedem Augenblick im selben Maße Flüssigkeit hergeben, als die Senken solche empfangen.

Man ersieht aus Gl. (70), daß, wenn $d\varphi/dn$ überall über s_1 null ist, U null ist. Folglich kann es keine nicht wirbelnde Bewegung in einem unendlichen Raume außerhalb der Oberfläche s_1 geben, denn das Oberflächenintegral ist null, und daher müssen u, v, w an allen Punkten des in Betracht stehenden Raumes null sein. Auch gibt es keine Bewegung, wenn s_1 unendlich klein ist.

Nicht wirbelnde Bewegung ist also unmöglich sowohl in dem Raume innerhalb, als in dem außerhalb s_1, wenn s_1 überall in Ruhe ist; denn dann kann die in irgend einem Augenblicke mit der Oberfläche sich berührende Flüssigkeit keine Geschwindigkeitskomponente $d\varphi/dn$ senkrecht zur Oberfläche haben. Ebenso ist sie unmöglich in einer einen unendlichen Raum erfüllenden und in der Unendlichkeit ruhenden Flüssigkeit.

Eine Quelle, aus der Flüssigkeit mit der Intensität q ausströmt, und eine Senke, in die Flüssigkeit mit der Intensität $-q$ einströmt, die also mit der Intensität q verschwindet, sind völlig analog den positiven und negativen (§ 474) Polen von gravitierender Materie; es lassen sich daher Lösungen derartiger Probleme der Flüssigkeitsbewegung ohne weiteres in Lösungen von Problemen, die aus entsprechenden Verteilungen anziehender Materien herrühren, übersetzen. Denn das Geschwindigkeitspotential φ und das Gravitationspotential V erfüllen dieselbe räumliche Differentialgleichung und dieselben Oberflächenbedingungen.

Eine ähnliche Analogie besteht zwischen der Geschwindigkeit einer ein System von Wirbeln umgebenden Flüssigkeit und der aus einem System von Strömen herrührenden magnetischen Kraft; dieser Gegenstand ist aber zu verwickelt, um hier behandelt zu werden (s. Magnetismus und Elektrizität).

389. Stationäre Bewegung der Kugel und des Zylinders in einer unbegrenzten Flüssigkeit. Als Beispiel wollen wir die kinetische Energie einer vollkommenen Flüssigkeit von unveränderlicher Dichte ermitteln, in der sich eine feste Kugel vom Radius a mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v bewegt. Die Radialgeschwindigkeit eines Oberflächenpunktes der Kugel, für welchen der nach ihm gezogene Radius mit der Bewegungsrichtung den Winkel θ bildet, ist gleich $v\cos\theta$. Es ist daher zu setzen:

$$\varphi = \frac{1}{2} v a^3 \frac{\cos\theta}{r^2};$$

denn die Gleichung $\triangle\varphi = 0$ wird hierdurch erfüllt, und es ergibt sich für $r = a$:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v \cos \theta,$$

wie oben. Ferner wird für $r = a$:

$$-\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{2} a v^2 \cos^2 \theta$$

und:

$$ds = 2 \pi a^2 \sin \theta d \theta.$$

Somit erhält man:

$$U = \pi \varrho a^3 v^2 \int_0^\pi \cos^2 \theta d(-\cos \theta),$$

also:

$$U = \frac{1}{3} \pi \varrho a^3 v^2.$$

Die kinetische Energie der Flüssigkeit ist daher halb so groß wie die kinetische Energie der mit Masse von der Dichte der Flüssigkeit erfüllt gedachten Kugel, wenn sie ohne Rotation mit der Geschwindigkeit v fortschreitet. Ist M die Masse der Kugel und m die Masse einer gleich großen Flüssigkeitskugel, so ist also die gesamte kinetische Energie:

$$U' = \frac{1}{2}\left(M + \frac{m}{2}\right) v^2.$$

Eine Arbeit von diesem Betrage muß also geleistet werden, um die Kugel in Bewegung zu setzen; die Masse der Kugel ist in dem entsprechenden Maße scheinbar erhöht.

Ist die Kugel einmal in gleichförmiger Bewegung, d. h. ohne Beeinflussung durch eine Kraft, so bewegt sie sich so, als ob die Flüssigkeit nicht vorhanden wäre, sie erfährt, wie man sagt, keinen hydrodynamischen Widerstand; wohl aber erfährt sie einen solchen bei beschleunigter Bewegung, die Beschleunigung ist eben, statt gleich b zu sein, gleich b':

$$b' = b \frac{M}{M + \frac{m}{2}};$$

ist die beschleunigende Kraft z. B. die Schwerkraft, so kommt außerdem noch der hydrostatische Auftrieb in Betracht, und es wird in Wahrheit die Fallbeschleunigung

$$g' = g \frac{M - m}{M + \frac{m}{2}},$$

oder, wenn man das allein maßgebliche Verhältnis $M:m$ mit $\varkappa$ bezeichnet:

$$g' = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + {}^1/_2};$$

je nachdem also $\varkappa > 1$, $\varkappa = 1$, $\varkappa < 1$ ist, fällt die Kugel beschleunigt, gleichförmig oder verzögert.

Auch von der wirklichen Bewegung der die Kugel umgebenden Flüssigkeitsteilchen kann man sich auf Grund der Formeln leicht ein Bild machen: die den Kugelpolen angelagerten beiden Teilchen erhalten die volle Geschwindigkeit der Kugel, die daran sich anschließenden axialen Teilchen eine desto kleinere, je weiter sie von der Kugel entfernt sind; während aber alle diese axialen Teilchen vorwärts fließen, strömen die dem Äquator der Kugel anliegenden Teilchen rückwärts, und zwar mit der halben Kugelgeschwindigkeit; die übrigen Teilchen endlich fließen schräg; und wenn man die Bewegung verfolgt, findet man, daß die Flüssigkeitsteilchen im allgemeinen schleifenförmige Bahnen beschreiben.

Das Problem der Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit ist u. a. von Poisson, Dirichlet, Stokes und Riecke behandelt worden; letzterer hat die Bewegung durch eine anschauliche Zeichnung erläutert. Eine wichtige Anwendung, die von Bessel, Green, O. E. Meyer u. a. gemacht worden ist, ist die auf die Schwingungen des Pendels unter dem Einflusse der umgebenden Flüssigkeit, sei es von konstanter Dichte (Wasser), sei es von veränderlicher (Luft). Im ersteren Falle hat Green für einen sehr flachen Pendelkörper (Linse) vom Durchmesser d und der Dicke d', der in seiner Hauptfläche schwingt, gezeigt, daß man seine Dichte ϱ durch $\varrho + \pi \varrho' d'/4d$ ersetzen muß, wo ϱ' die Dichte der Flüssigkeit ist.

Von dem Problem der durch eine Flüssigkeit strömenden Kugel nicht wesentlich verschieden ist das einer ruhenden Kugel in einem gleichförmigen Flüssigkeitsstrome; man braucht nur dem ganzen System von Kugel und Flüssigkeit noch eine Zusatzgeschwindigkeit von $-v$ zu erteilen; das Geschwindigkeitspotential wird dann

$$\varphi = v\left(r + \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta.$$

Handelt es sich nicht um eine Kugel, sondern um einen unbegrenzten Kreiszylinder in einer nach allen Seiten unbegrenzten tropfbaren Flüssigkeit, so wird das Problem in dem Falle, wo er sich senkrecht zur Axenrichtung bewegt, besonders einfach; die Zusatzmasse ist hier ein ganzer Flüssigkeitszylinder von der Größe des festen. In diesem Falle ist die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0,$$

oder, wenn r der Abstand eines Flüssigkeitspunktes von der Zylinderaxe und θ der Winkel der durch r und die Axe bestimmten Ebene mit der durch die Bewegungsrichtung und die Axe bestimmten Ebene ist:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0.$$

Die Geschwindigkeit eines Oberflächenpunktes des Zylinders ($r = a$) ist auch hier $v \cos \theta$; man hat daher dem Geschwindigkeitspotential φ und der Stromfunktion ψ die Werte

$$\varphi = v a^2 \frac{\cos \theta}{r}, \quad \psi = - v a^2 \frac{\sin \theta}{r}$$

beizulegen. Damit wird für $r = a$:

$$- \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} = v^2 a \cos^2 \theta$$

und die kinetische Energie der Flüssigkeit pro Längeneinheit des Zylinders:

$$U = \frac{1}{2} \varrho v^2 a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \varrho a^2 v^2,$$

d. h., sie ist auch in diesem Falle gleich der eines ganzen Flüssigkeitszylinders; in Formel, wenn U' wieder die gesamte kinetische Energie, M und m die Massen des festen bezw. des flüssigen Zylinders pro Längeneinheit bedeuten:

$$U' = \frac{1}{2} (M + m) v^2.$$

Durch Superpositionen einer Geschwindigkeit $-v$ erhält man auch hier den Fall eines stationären Flüssigkeitsstromes, der auf ein querzylindrisches Hindernis stößt, und es ist alsdann

$$\varphi = v\left(r + a^2 \frac{\cos \theta}{r}\right), \quad \psi = v\left(r - \frac{a^2}{r}\right) \sin \theta.$$

Für anders geformte Körper als Kugel und Zylinder ist die Zusatzmasse ein anderer Bruchteil der Flüssigkeitsmasse von der Größe des festen Körpers, und es entsteht die für die Schiffahrt wichtige Frage nach derjenigen Gestalt, für welche dieser Zusatz ein Minimum wird. Es ist einleuchtend, daß dies für einen vorn keilförmigen Körper eintreten wird; jedoch kann auf die Einzelheiten der Untersuchungen hier nicht eingegangen werden.

Schließlich sei bemerkt, daß zu dem hydrodynamischen Widerstande noch der hier gänzlich außer acht gelassene Reibungswiderstand hinzukommt, der unter Umständen, z. B. wenn der Körper eine im Verhältnis zu seiner Masse große Oberfläche hat, recht beträchtlich werden kann. Im übrigen ist das Problem solcher scheibenförmiger Körper schon oben in § 378 bis 380 berührt worden.

---

390. Gleichgewichtsgleichungen einer Flüssigkeit. Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir noch die Grundlagen des Gleich-

gewichtes der Flüssigkeiten feststellen, während der speziellen Betrachtung dieses Gebietes von Erscheinungen das folgende Kapitel gewidmet ist.

Die Grundgleichungen für das Gleichgewicht einer Flüssigkeit ergeben sich ohne weiteres aus den Gl. (12), indem man die Beschleunigungskomponenten null setzt. Sie lauten demnach:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \varrho X = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} - \varrho Y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} - \varrho Z = 0 \quad . \quad . \quad (71)$$

und sagen einfach aus, daß die äußeren Kräfte auf einem Flüssigkeitsfaden durch die Druckdifferenz an den Enden gerade ausbalanciert werden muß. Sind die äußeren Kräfte null, so ist der Druck überall der gleiche.

Lassen sich die Kräfte X, Y, Z von einem Kräftepotential V ableiten $\left(X = -\frac{\partial V}{\partial x} \text{ u. s. w.}\right)$, so nehmen unsere Gleichungen die Form

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \varrho \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} + \varrho \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \varrho \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad . \, . \quad (72)$$

an. Addiert man die mit dx, dy, dz multiplizierten Gl. (71) zueinander, so erhält man:

$$dp = \varrho (X dx + Y dy + Z dz) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

eine Gleichung, die man auch direkt aus einfachen Betrachtungen gewinnen kann.

391. Fall, in dem der Druck eine Funktion der Koordinaten ist. Wir wollen nun annehmen, daß der Druck eine einwertige Funktion von Koordinaten ist, die einem in der Flüssigkeit festen System angehören. Dann ist nach § 191 die linke Seite ein vollständiges Differential, die rechte folglich ebenfalls, und dies ist nur der Fall, wenn die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial(\varrho Z)}{\partial y} - \frac{\partial(\varrho Y)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial(\varrho X)}{\partial z} - \frac{\partial(\varrho Z)}{\partial x} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial(\varrho Y)}{\partial x} - \frac{\partial(\varrho X)}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (74)$$

erfüllt sind. Multipliziert man diese Gleichungen mit X, Y, Z und addiert sie, so erhält man:

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0 \quad . \, . \quad (75)$$

Zieht man durch den Punkt x, y, z nun die Kraftlinie, so sind deren Richtungskosinus proportional mit X, X, Z; die Faktoren, die in Gl. (75) mit X, Y, Z multipliziert sind, müssen daher (vergl. § 24) proportional sein mit den Richtungskosinus einer auf der Kraftlinie senkrechten

Linie durch x, y, z; und die Werte jener Faktoren lassen leicht erkennen, daß die sämtlichen Kraftlinien von einem gewissen System von Flächen senkrecht geschnitten werden. Denn es sei $F(x, y, z) = c$ die Gleichung dieser Schar; dann müssen die Richtungskosinus der Normale der zu ihr gehörigen, durch x, y, z gehenden Fläche proportional mit X, Y, Z sein, d. h. es ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = hX, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = hY, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = hZ,$$

wo h ein Faktor ist, der aber im allgemeinen eine Funktion der Koordinaten ist; dies gibt aber $\partial(hZ)/\partial y = \partial(hY)/\partial z$ u. s. w., und das führt wieder auf Gl. (75).

392. Die Flächen gleichen Drucks sind auch Flächen gleichen Potentials. Wie die Gl. (73) zeigt, ist die Dichte ϱ ein integrierender Faktor der Größe $Xdx + Ydy + Zdz$, d. h. sie verwandelt diesen Ausdruck in ein vollständiges Differential. Ist ϱ konstant, d. h. ist die Flüssigkeit inkompressibel, so ist $Xdx + Ydy + Zdz$ selbst ein vollständiges Differential (dp), d. h. X, Y, Z lassen sich aus einer Potentialfunktion ableiten, d. h. inkompressible Flüssigkeiten können nur im Gleichgewichte sein, wenn die Kräfte ein Potential haben.

In jedem Falle, ob nun ϱ konstant ist oder nicht, gilt bei Existenz eines Potentials der Kräfte die Gleichung

$$dp = -\varrho\, dV \quad \ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

Die Flächen gleichen Drucks sind also auch Flächen gleichen Potentials; denn für $dp = 0$ ist auch $dV = 0$. Aber auch ϱ ist in einer Fläche gleichen Drucks konstant; denn wenn dp der konstante Druckunterschied von einer Fläche gleichen Druckes zur nächsten ist, so ist dV die konstante Potentialdifferenz zwischen denselben beiden Flächen, und folglich muß ϱ konstant sein in jeder der Flächen.

Wenn die einzige äußere Kraft die Schwerkraft ist, sind die Flächen gleichen Drucks senkrecht zur Lotlinie, also horizontal.

393. Die Flächen gleichen Drucks schneiden die Kraftlinien senkrecht. Daß dies der Fall ist, wird durch die Gleichgewichtsgleichungen direkt ausgesagt. Denn p ist eine Funktion der Koordinaten, $f(x, y, z)$; $f(x, y, z) = p$, wo p ein konstanter Druckwert, ist daher eine Fläche gleichen Drucks. Die Richtungskosinus ihrer Normalen sind nun offenbar proportional mit $\partial p/\partial x$, $\partial p/\partial y$, $\partial p/\partial z$, diese Größen aber nach den Gl. (71) proportional mit X, Y, Z, woraus folgt, daß die Resultante von X, Y, Z auf den Flächen gleichen Drucks überall senkrecht steht.

Wenn die Kräfte kein Potential haben, sind die Flächen gleichen Drucks

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

und die Flächen gleicher Dichte

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} dx + \frac{\partial \varrho}{\partial y} dy + \frac{\partial \varrho}{\partial z} dz = 0 \quad \ldots \quad (78)$$

im allgemeinen verschieden, und nur ihr Schnitt ist eine Linie zugleich gleichen Drucks und gleicher Dichte. Dieser Fall bietet indessen kaum Interesse dar, da wir es in allen praktischen Fällen mit Kräften zu tun haben, die, vollständig dargestellt, ein Potential besitzen.

394. Kompressible Flüssigkeit im Kraftfelde. Im Falle einer kompressiblen Flüssigkeit, also praktisch eines Gases, ist die Dichte eine Funktion des Drucks und der Temperatur, und zwar, wenn man letztere als sogenannte absolute Temperatur θ (vergl. Bd. II) angibt, von der Eigenschaft, daß

$$\frac{p}{\varrho} = R\theta$$

ist, wo R eine Konstante bedeutet. Damit werden die Gleichgewichtsgleichungen

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{R\theta} X, \quad \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{R\theta} Y, \quad \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{R\theta} Z \quad \ldots \quad (79)$$

und die zur Bestimmung des Drucks dienende Gleichung ist:

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{R\theta}(X dx + Y dy + Z dz) \quad \ldots \quad (80)$$

oder, wenn ein Kräftepotential V existiert:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{R\theta} dV \quad \ldots \quad (81)$$

Integriert kann diese Gleichung nur werden, wenn die Verteilung der Temperatur in dem Gase bekannt ist; ist sie z. B. überall dieselbe, so wird:

$$\log p = -\frac{1}{R\theta} V + C \quad \ldots \quad (82)$$

wo C eine Konstante ist; oder auch, wenn

$$e^C = c, \qquad R\theta = k$$

gesetzt wird:

$$p = c e^{-\frac{V}{k}} \quad \ldots \quad (83)$$

Der Druck sinkt hiernach in geometrischer Progression, wenn V in arithmetischer Progression wächst. In der Atmosphäre ist z. B., wenn die positive Richtung nach oben gewählt wird, V positiv und ändert sich wie die Höhe über dem als null zu wählenden Niveau.

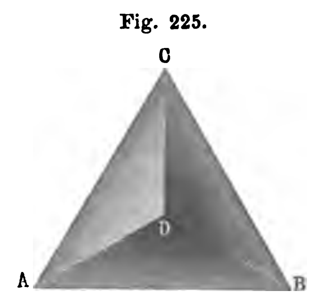
Zehntes Kapitel.

Spezielle Statik der Flüssigkeiten und Gase.

395. Elementare Theorie des Gleichgewichtes einer Flüssigkeit. Der Druck in einem Punkte ist in allen Richtungen derselbe. Man kann das Gleichgewicht einer Flüssigkeit, und speziell einer unter der Wirkung der Schwere stehenden Flüssigkeit, auch in der folgenden, mehr elementaren Weise behandeln. Man kann erstens zeigen, daß in jedem Punkte der Flüssigkeit der Druck in allen Richtungen derselbe ist, ein Satz, der für alle wirklichen, wenn auch noch so zähen Flüssigkeiten gilt, wenn sie im Gleichgewichte sind.

Betrachten wir ein kleines reguläres Tetraeder der Flüssigkeit, Fig. 225 zeigt ein solches Flüssigkeitselement, wie es einem Beschauer, der es in einer Richtung senkrecht zur einen Fläche vom entgegengesetzten Scheitelpunkte aus betrachtete, erscheinen würde. Alle vier Flächen sind gleichseitige Dreiecke. Dieser Teil der Flüssigkeit wird im Gleichgewicht erhalten unter der Wirkung zweier Kraftsysteme, die auf die in ihm enthaltene Materie wirken: 1. die äußeren wirksamen Kräfte, deren Komponenten X, Y, Z sind; 2. die über die Dreiecksflächen wirksamen Druckkräfte. Entsteht keine Bewegungsgröße des Tetraeders oder eines seiner Teile, so ist das Gleichgewicht dasselbe, wie das eines Stückes starrer Materie von derselben Gestalt, Größe und Dichte, durch das das Flüssigkeitstetraeder unter demselben Kräftesystem ersetzt werden könnte.

Fig. 225.



Wenn s die Kantenlänge AB des Tetraeders ist, so ist sein Volumen $\frac{1}{12}\sqrt{2}\,.\,s^3$, und der Inhalt jeder Fläche ist $\frac{1}{4}\sqrt{3}\,.\,s^2$. Die äußere Kraft in der x-Richtung ist daher $\sqrt{2}\; s^2 \varrho X/12$, und die Druckkraft über eine Fläche ist $\sqrt{3}\; s^2 p/4$. Das Verhältnis der ersteren zur letzteren ist

$$\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\varrho s X}{p}\,.$$

Nun werde s bis ins unendliche verkleinert, dann nimmt das soeben gefundene Verhältnis nach dem Nullwerte zu ab und kann durch die Wahl eines genügend kleinen s beliebig verringert werden. Es hat also die auf die Masse wirkende Kraft die Tendenz, im Vergleich zu der auf die Fläche wirkenden Druckkraft zu verschwinden, sehr begreiflich, da jene unendlich klein von der dritten, diese nur von der zweiten Ordnung wird. Darum können für ein sehr kleines Element die äußeren wirksamen Kräfte im Vergleich mit den Druckkräften vernachlässigt werden, und das mit immer größerer Annäherung an vollkommene Richtigkeit, je kleiner und kleiner das Element genommen wird.

Wenn man also nur die Druckkräfte auf das Tetraeder betrachtet, so ist es klar, daß sie für den Fall des Gleichgewichtes gleiche Kräfte sein müssen. Der mittlere Druck p ist demnach derselbe über jede Fläche, und im Grenzwert hat man das Ergebnis, daß der Druck im Zentrum des Tetraeders in allen vier Richtungen senkrecht zu den Flächen der gleiche ist.

Wenn man jetzt unter Festhaltung der Lage einer der Flächen sich ein neues Tetraeder denkt in der Lage, die das vorige haben würde, wenn es um einen Winkel um eine zur Ebene jener Fläche senkrechte, etwa durch den Schwerpunkt gelegte Axe gekippt würde. Man erhält das gleiche Resultat für die unverändert verbliebene Richtung und so für die drei Richtungen senkrecht zu den Lagen der drei anderen Flächen. Durch Wiederholung dieses Vorganges kann man diesen Satz der Reihe nach für alle Gruppen von vier Richtungen senkrecht zu den Flächen beweisen und so zeigen, daß der Druck im Mittelpunkte des Flüssigkeitselementes in allen Richtungen der gleiche ist.

Ist dieser Beweis erbracht, so sieht man ohne weiteres durch Betrachtung des Gleichgewichtes eines als Prisma gestalteten Flüssigkeitselementes ein, daß der Druck in allen Punkten der Flüssigkeit der gleiche ist, wenn keine äußeren Kräfte angreifen.

396. Eine Flüssigkeit unter der Wirkung der Schwere. Flächen gleichen Druckes sind horizontal. Man betrachte jetzt eine unter der Wirkung der Schwere stehende Flüssigkeit von gleichförmiger Dichte.

Zunächst kann bewiesen werden, daß der Druck in allen Punkten einer horizontalen Fläche derselbe ist. Zu diesem Zwecke nehmen wir ein dünnes Flüssigkeitsprisma, dessen Längsrichtung horizontal ist und dessen Endflächen vertikal sind. Ist die Flüssigkeit im Gleichgewicht, so ist das Prisma nach jeder Richtung hin im Gleichgewicht und erfährt deshalb nach keiner Richtung eine Beschleunigung. Nun sind die auf es wirkenden Kräfte 1. die äußeren Gravitationskräfte, die vertikal nach unten auf die Flüssigkeitsteilchen wirken, 2. die durch die umgebende Flüssigkeit auf seine Grenzoberfläche wirkenden Druckkräfte. Die letzteren zerfallen in zwei Gruppen, nämlich die auf die

Längsseiten und die auf die Endflächen des Prismas wirkenden Kräfte.

Betrachten wir die Beschleunigung des Prismas in seiner Längsrichtung. Weder die Massenkräfte, die vertikal sind, noch die Druckkräfte auf die Seiten können irgend einen Einfluß haben, eine solche Beschleunigung zu erzeugen oder zu verhindern, da ihre Richtungen senkrecht zur Länge des Prismas sind. Es bleiben also nur die Druckkräfte auf die Enden übrig. Von diesen treibt eine das Prisma in einer, die andere in der entgegengesetzten Richtung; sie müssen also gleich sein, da es sonst eine Beschleunigung geben würde; und da der Druck in irgend einem Punkte in allen Richtungen derselbe ist, so ist auch der Druck in jeder Richtung in einem Punkte einer horizontalen Ebene gleich dem Drucke in jeder Richtung in einem anderen Punkte der horizontalen Ebene.

397. Druckänderung mit dem Niveau. Betrachten wir ferner ein dünnes Prisma mit vertikaler Längsrichtung und den Endflächen in zwei horizontalen Ebenen, die um den Abstand h voneinander entfernt sind. Hinsichtlich der Beschleunigung in vertikaler Richtung haben die Druckkräfte auf die Seiten keinen Einfluß, es bleiben nur die Druckkräfte auf die Enden und die Gravitationskräfte übrig. Wenn p der Druck in der unteren Ebene, p' der in der oberen und a der Querschnitt des Prismas ist, so wirkt auf das Prisma eine Druckkraft nach oben gleich pa und eine Druckkraft nach unten $p'a$. Nach unten wirkt außerdem die Schwerkraft, und ihre Wirkung beträgt in absoluten Einheiten $g\varrho ah$. Die Kraft nach oben muß die gesamte Kraft nach unten aufheben, und es ist folglich

$$pa = p'a + g\varrho ah$$

oder

$$p = p' + g\varrho h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

d. h. der Druck in der unteren horizontalen Fläche übertrifft also den in der oberen um $g\varrho h$, oder im Gewichtsmaß um ϱh.

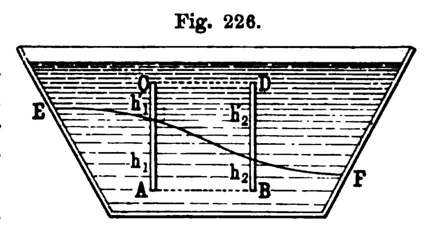
So ist z. B. das Gewicht einer Wassersäule von 5 m Tiefe und 1 qm Querschnitt gleich 5000 kg, anderseits ist der Druck der Atmosphäre auf 1 qm gleich 10 330 kg; somit ist auf dem Grunde eines 5 m tiefen Teiches der Gesamtdruck pro Quadratmeter 15 330 kg.

398. Behältnis mit verschiedenen unvermischbaren Flüssigkeiten. Es sei bemerkt, daß, da ein System von Körpern nur dann im stabilen Gleichgewichte ist, wenn seine potentielle Energie ein Minimum ist, sich eine Anzahl verschiedener Flüssigkeiten, die verschiedene Dichte haben und sich nicht vermischen, in einem gemeinsamen Gefäße nach der Dichte anordnen werden, mit der dichtesten Flüssigkeit zu unterst. Nur bei dieser Anordnung kann die potentielle Energie des aus der

anziehenden Erde und den Flüssigkeiten im Gefäße (dessen Lage als gegeben angenommen wird) bestehenden Systems ein Minimum sein.

399. Die Trennungsoberfläche zweier Flüssigkeiten ist horizontal. Kommunizierende Röhren. Es kann jetzt gezeigt werden, daß die Trennungsfläche zweier aneinanderstoßender Flüssigkeiten horizontal ist. Denn denken wir uns zwei horizontale Flächen AB, CD (Fig. 226), eine in jeder Flüssigkeit; der Druck ist in jeder in allen Punkten der gleiche. Zwei schmale vertikale Prismen stehen mit ihren unteren Enden in der unteren, mit den oberen in der oberen Oberfläche. Ihre Längen sind gleich; aber wenn die Trennungsfläche EF nicht horizontal wäre, könnten sie in solcher Stellung sein, daß ihre Längen in den oberen und unteren Flüssigkeiten nicht für beide gleich sind. Es seien alsdann h_1, h_2 die Längen der Prismen in der unteren Flüssigkeit, h'_1, h'_2 ihre Höhen in der oberen, ϱ, ϱ' die Dichten der Flüssigkeiten und p, p' die Drucke in der unteren und oberen Fläche. Nach Gl. (1) hat man

Fig. 226.



$$p = p' + g(\varrho h_1 + \varrho' h'_1) = p' + g(\varrho h_2 + \varrho' h'_2).$$

Folglich ist

$$\varrho h_1 + \varrho' h'_1 = \varrho h_2 + \varrho' h'_2.$$

Ebenso ist

$$\varrho (h_1 + h'_1) = \varrho (h_2 + h'_2).$$

Daraus ergibt sich durch Subtraktion:

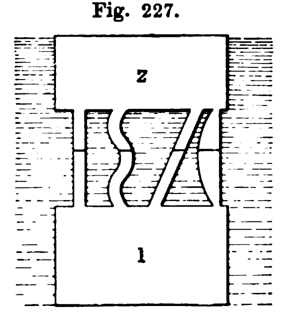
$$h'_1 (\varrho - \varrho') = h'_2 (\varrho - \varrho'),$$

d. h.:

$$h'_1 = h'_2,$$

oder: die in den oberen Flüssigkeiten stehenden Prismen sind von gleicher Länge. Folglich ist diese und auch jede weitere Trennungsfläche horizontal.

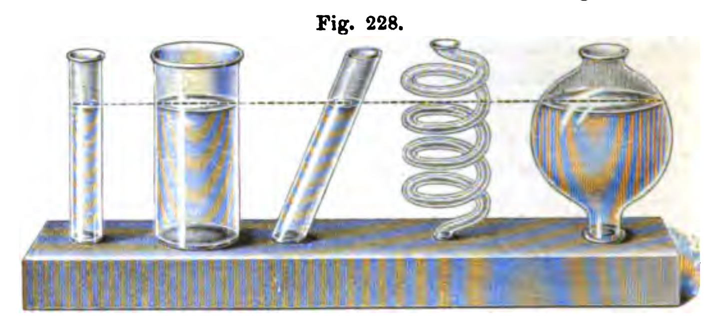
Fig. 227.



In einem Gefäße, das aus einer oberen und einer unteren Kammer besteht, die durch Röhren von verschiedener Größe und Gestalt miteinander zusammenhängen (Fig. 227), seien zwei Flüssigkeiten enthalten; befindet sich die eine Flüssigkeit im unteren Raume und einem Teile der Verbindungsröhren, die andere im oberen Raume und dem übrigen Röhrenraume, so zeigt sich, daß das Niveau der Trennungsfläche in allen Verbindungsröhren gleich ist.

Ein spezieller Fall ist der aus Fig. 228 ersichtliche; dort sind der untere Raum und die unteren Teile der verschieden gestalteten, mit

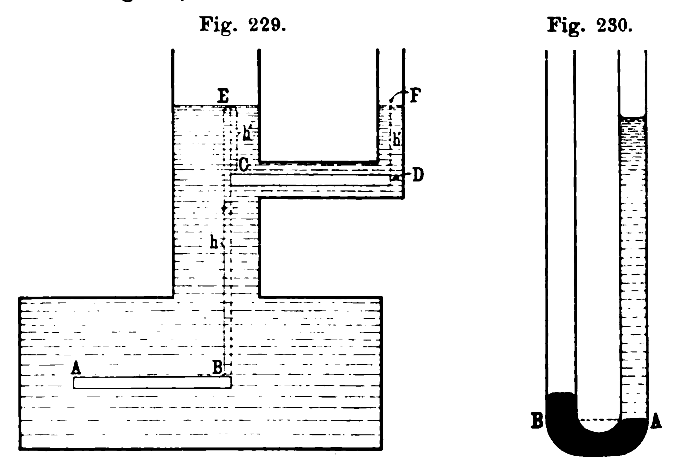
Fig. 228.



ihm kommunizierenden Röhren mit Wasser, der obere Teil der Röhren aber sowie der gesamte Raum, in den ihre oberen Enden münden, mit Luft gefüllt; in sämtlichen miteinander zusammenhängenden Röhren steht das Niveau gleich hoch.

Der wissenschaftliche Beweis für die hier beschriebene Tatsache nach hydrostatischen Prinzipien ist überaus einfach. Man betrachte in Fig. 229 das horizontale Prisma mit den Enden A und B im unteren Teile der Flüssigkeit; B sei ein Punkt einer von der freien Oberfläche

Fig. 229. Fig. 230.



aus gezogenen Senkrechten EB, aber A möge außerhalb jeder solchen Linie liegen. Der Druck ist in A derselbe wie in B, und der Druck in B ist um $g\varrho h$ größer als der in E. Ferner betrachte man das obere Prisma CD. Dann ist wieder der Druck in D derselbe wie in C, wo er um $g\varrho h'$ größer ist als in E. Somit muß die Höhe der freien Oberfläche über D gleich h' sein.

Denken wir uns zwei Flüssigkeiten, z. B. Wasser und Quecksilber, in Berührung miteinander in einer U-förmigen Röhre wie in Fig. 230.

Es sei, wenn sie in atmosphärische Luft eingetaucht werden, P der Atmosphärendruck am oberen Ende der rechten Säule, h und h' die Höhen der rechten und linken Säule über AB, dem Niveau der Trennungsfläche, ϱ, ϱ' die Dichten der Flüssigkeiten und ϱ_a die Dichte der Luft. Der Druck im Niveau AB ist auf der rechten Seite $P + g\varrho h$, auf der linken $P + g\varrho_a(h - h') + g\varrho' h'$. Diese Drucke müssen gleich sein, und man hat daher

$$(\varrho - \varrho_a)h = (\varrho' - \varrho_a)h' \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Dichten $\varrho - \varrho_a$, $\varrho_1 - \varrho_a$ sind daher umgekehrt proportional den Höhen h, h' über der gemeinsamen Trennungsfläche. Wird ϱ_a vernachlässigt, oder bringt man das System ins Vakuum, so ist einfacher

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{h'}{h} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2\,a)$$

Es wird dem Leser auffallen, daß die Querschnitte der Röhren nichts damit zu tun haben. Die beiden Schenkel können in der Tat beliebige relative Querschnitte haben, die nur groß genug sein müssen, um die Wirkungen der Kapillarität aufzuheben.

400. Störung der Horizontalität der Oberfläche durch die Kapillarität. Es muß hier etwas erwähnt werden, worauf später näher eingegangen werden wird, nämlich, daß die Horizontalität der Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten nur in einer durch die Erfahrung festgesetzten Entfernung von den Wandungen des Gefäßes gilt. Das in einer Kapillarröhre von 1 mm oder weniger Durchmesser stehende Wasser ist nirgends horizontal, außer in einem Punkte. Wenn das Wasser das Gefäß netzt, so ist die Oberfläche nach oben konkav, und diese Konkavität führt zu einer Erhebung der Oberfläche über den Stand, den sie haben würde, wenn sie eben wäre.

Anderseits ist Quecksilber in einer engen Glasröhre konvex, und die Oberfläche hat einen niedrigeren Stand, als sie haben würde, wenn sie eben wäre.

Man kann sagen, daß in Röhren von 2 cm oder mehr Durchmesser kein merkliches Steigen oder Fallen von Flüssigkeiten stattfindet. An den Wänden wird sich allerdings eine entweder konkave oder konvexe Biegung der flüssigen Oberfläche finden.

Jedermann kann die Aufwärtswölbung von Tee um den Tassenrand herum beobachten, oder, indem er ein Glas mit Wein zwischen sein Auge und ein Licht hält, den Meniskus sehen, den der Wein bildet. Die konvexe Wölbung der Quecksilberoberfläche im Barometer ist allbekannt; sie wird benutzt, um zu konstatieren, ob die Oberfläche der Säule im Steigen oder im Fallen ist. Steigt das Quecksilber in der Röhre, so schleppt der durch die Röhre zurückgehaltene Rand der Säule etwas nach, wohingegen die Mitte entsprechend stärker steigt, so daß sie die Konvexität über ihren mittleren Stand bei völliger Ruhe der

Säule übersteigt. Das Umgekehrte findet statt, wenn die Oberfläche fällt; dann ist die Konvexität kleiner als im Mittel.

401. Druckübertragung. Hydrostatisches Paradoxon. Aus dem Gesagten folgt, daß, wenn eine Flüssigkeit in einem von festen Wänden umgebenen Raume enthalten ist, jeder ihr an irgend einem Punkte der Wandung erteilte Druck der gesamten Flüssigkeit mitgeteilt wird. Denn die aus den Niveauunterschieden herrührenden Druckunterschiede müssen dieselben bleiben, so daß der Druck überall um denselben Betrag erhöht worden ist.

Dies führt zu einem sehr wichtigen Ergebnis, dem sogenannten hydrostatischen Paradoxon, das in Fig. 231 veranschaulicht ist.

Das gefüllte Gefäß besteht aus zwei, wie man sieht, kommunizierenden Zylindern, deren einer einen kleinen, deren anderer einen verhältnismäßig großen Durchmesser hat; ihre Querschnitte seien f und F. Die Zylinder sind mit Stempeln versehen, die als wasserdicht und reibungslos angesehen und der Einfachheit wegen als vertikal angenommen werden.

Fig. 231.

Wenn jetzt ein Gewicht von P kg angewandt wird, um den kleineren Stempel herunterzudrücken, so wird der große Stempel heraufgedrückt werden, und es wird ein Gewicht $G = PF/f$ gebraucht werden, um ihn in derselben Lage wie vorher zu erhalten. Denn — wenn von der geringfügigen Änderung des durch die Flüssigkeit eingenommenen Raumes abgesehen wird — der Druck der Flüssigkeit gegen die untere Fläche des kleineren Stempels hat um P/f zugenommen. Der Druck gegen die untere Fläche des großen Stempels hat also um denselben Betrag zugenommen, und die auf ihn ausgeübte ganze Druckkraft ist PF/f. Daß die durch den kleinen Stempel auf die Flüssigkeit ausgeübte Kraft P eine durch die Flüssigkeit auf den großen Stempel ausgeübte Kraft PF/f ergeben soll, ist als paradox angesehen worden.

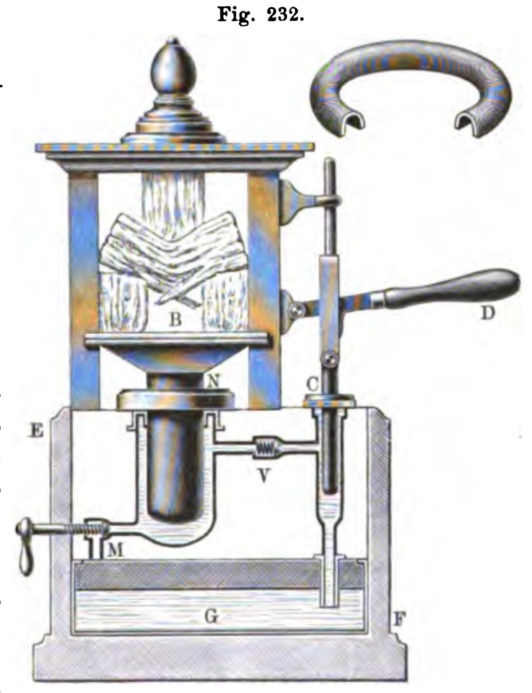
Es ist aber nichts Paradoxes dabei, wenn man die Sache im Lichte des Arbeitsprinzips anschaut. Wenn der kleine Stempel um eine Strecke h heruntergetrieben wird, so ist die durch die Kraft P geleistete Arbeit Ph. Wenn aber das Volumen der Flüssigkeit dasselbe bleiben soll wie vorher, so muß der große Stempel steigen, und zwar um so viel, daß der Raum um genau so viel vergrößert wird, als er durch das Eindringen des kleinen Stempels geschmälert worden war; letzterer Betrag ist aber fh; folglich steigt der große Stempel um eine Entfernung $H = fh/F$. Die durch Hebung des Gewichtes G geleistete Arbeit ist alsdann Gfh/F. Nun ist aber $G = PF/f$, so daß die Arbeit Gfh/F gleich Ph ist; d. h. die beim Herunterdrücken des kleinen Stempels

verbrauchte Arbeit ist genau dieselbe, wie die beim Heben des großen Stempels geleistete.

In der Praxis ist — infolge der Reibung — die bei der Hebung des großen Stempels geleistete Arbeit niemals so groß als die zum Hinunterdrücken des andern aufgewendete.

402. Hydraulische Presse. Fig. 232 veranschaulicht das Prinzip der hydraulischen Presse, die von dem großen Physiker und Philosophen Pascal erfunden worden ist. Der Druck wird auf das in dem kleinen Zylinder befindliche Wasser dadurch ausgeübt, daß man den Taucher *C* durch den Hebel *D* hinunterzwingt. Der Aufwärtsbewegung des großen Stempels *N* widersetzt sich ein Körper, der zwischen die auf dem großen Stempel ruhende „Ramme" und einen darüber befindlichen Balken gebracht ist. Zu einer praktischen Maschine wurde die Presse umgestaltet durch Bramah, der die bedeutende Schwierigkeit überwand, die Stempel wasserdicht zu machen, indem er sie mit dem Ledergürtel von U-förmigem Querschnitt umgab, der in der Figur extra und außerdem im Durchschnitt am oberen Ende des Rammzylinders abgebildet ist. Das Wasser tritt in den ringförmigen Raum zwischen den beiden Rändern des Leders ein und drückt den inneren Rand gegen den Zylinder. Andere aus dieser nach einem alten Holzschnitt gegebenen Darstellung der Presse nicht ersichtliche Details finden sich bei den modernen Formen des Apparates. Es wird Wasser unter genügend hohem Druck in einem darunter befindlichen Reservoir gehalten und fließt durch eine Klappe, die sich im Boden des kleinen Zylinders nach oben öffnet, wenn der Druckstempel gehoben wird. Ein starkes Kupferrohr von feinem Lumen verbindet jetzt meistens den Druckstempelzylinder mit dem Rammzylinder. In der Abbildung ist der Kanal in einen Metallblock eingeschnitten und

Fig. 232.

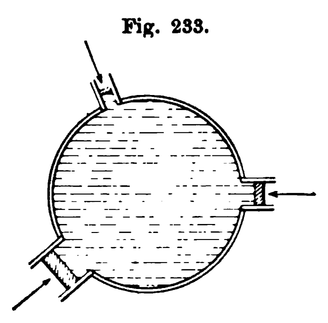


mit einem Federventil V versehen, das sich gegen den Rammzylinder öffnet.

Hat man ein geschlossenes Gefäß mit daran befestigten Zylindern, in denen verschiedene Stempel arbeiten, wie in Fig. 233, so kann, wenn ein hoher Druck im Gefäß erhalten wird, auf diese verschiedenen Stempel durch den Druck, den sie alle von der Flüssigkeit erhalten, Arbeit geleistet werden. Dies ist in der Praxis verwirklicht durch den hohen Druck in Kanälen, die Kraft für arbeitende Aufzüge oder andere hydraulische Maschinen liefern.

Die hydraulische Kraft wird heutzutage für viele Zwecke benutzt, z. B. um die Tore der Docks zu öffnen und zu schließen, für den Betrieb von Aufzügen, um Eisen- und Stahlplatten zu nieten, auf Schiffen, um die Kanonen zu richten, zur Hebung von Lokomotiven usw. Auch wird die hydraulische Kraft oft mit Hilfe eines sogenannten **Akkumulators** verwandt. Dieser besteht aus einem schweren Gewicht, das einen Druckstempel herunterpreßt und so den nötigen Druck liefert. Dieses Verfahren ist sehr angebracht, wo die Kraft nicht fortwährend gebraucht wird, wie z. B. zum Öffnen der Tore von Docks; denn der Akkumulator kann durch eine in der Zwischenzeit arbeitende Maschine von verhältnismäßig geringer Kraft allmählich wieder heraufgepumpt werden.

Fig. 233.



Die durch die Maschine gelieferte Energie wird in dem gehobenen Gewichte aufgespeichert, oder vielmehr in dem trotz ihrer gegenseitigen Anziehung getrennten System von Erde und Gewicht, und kann in verhältnismäßig kurzer Zeit verbraucht werden. In der Elektrizität erfüllen den entsprechenden Zweck die Akkumulatorenbatterien; ganz allmählich durch chemische Umsetzungen in einer Batterie aufgespeicherte Energie kann so schnell, als irgend wünschenswert ist, verausgabt werden.

403. Druckkräfte. Druck auf eine ebene Fläche. Es sei df ein so kleines Flächenelement, daß der Druck (der als von Punkt zu Punkt stetig sich ändernd angenommen wird) in ihm als gleichförmig angesehen werden kann. Das Produkt $p\,df$ wird häufig der „ganze Druck" über das Element oder „Flächendruck" genannt, und die Summe $\Sigma(p\,df)$ solcher Produkte für die ganze Fläche oder einen Teil von ihr heißt „ganzer Druck" über die Fläche oder den betreffenden Teil von ihr. Es ist aber genau zu unterscheiden zwischen den Begriffen: Druck schlechthin oder Einheitsdruck einerseits und Druckkraft, ganzer Druck oder Flächendruck anderseits; letzterer, also $p\,df$, ist von der Dimension einer Kraft, ersterer von der einer durch eine Fläche dividierten Kraft (also bezw. $L\,T^{-2}M$ und $L^{-1}\,T^{-2}M$).

Ist die Fläche eine Ebene, so ist $\Sigma(pdf)$ der gesamte, durch die Flüssigkeit auf die Fläche ausgeübte Flächendruck. Ist die Fläche nicht eben, so ist $\Sigma(pdf)/\Sigma df$, die Summe der auf die Elemente ausgeübten Drucke, dividiert durch den Flächeninhalt, der **mittlere Druck** auf die Oberfläche; und wenn θ die Neigung der Normalen von df zu einer gewählten Richtung ist, so ist $\Sigma p \cos\theta\, df$ der ganze Druck auf die Fläche in dieser Richtung.

Die Berechnung der auf eine ebene Fläche ausgeübten Druckkraft ist für manche praktische Zwecke von Wichtigkeit, z. B. für die innerhalb und außerhalb eines Schleusentors durch das Wasser ausgeübten ganzen Drucke.

Wenn man die auf eine ebene Fläche ausgeübte Druckkraft mit P bezeichnet, so ist

$$P = \int p\, df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wo p der Druck im Element df ist und die Integration über die ganze Fläche zu nehmen ist.

Ist die Flüssigkeit von gleichförmiger Dichte und rührt der Druck von der Schwere her, so ist

$$P = \int (p_0 + g\varrho h)\, df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\text{a})$$

wo p_0 der Druck in der freien Oberfläche und h die Tiefe von df unter ihr ist. Um p_0 in die Rechnung einzubeziehen, braucht man nur den Flächeninhalt mit p_0 zu multiplizieren; alsdann kann man von p_0 absehen und braucht nur $\int g\varrho h\, df$ zu berechnen.

Als erstes Beispiel sei eine dreieckige Platte betrachtet, die so eingetaucht ist, daß ihr Scheitelpunkt in der Oberfläche und ihre Basis mit der Oberfläche parallel liegt. Die Neigung der Platte gegen die Vertikale sei mit θ, die Entfernung des Scheitelpunktes von der Basis mit b und die Länge der Basis mit a bezeichnet. Der Flächeninhalt eines Streifens in der Entfernung h vom Scheitel und von der Breite dh ist $ah\, dh/b$, und der Druck ist $g\varrho h \cos\theta$, da die senkrechte Tiefe des Streifens $h\cos\theta$ ist. Somit ist

$$P = g\varrho \cos\theta\, \frac{a}{b} \int_0^b h^2\, dh = \frac{1}{3}\, g\varrho a b^2 \cos\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Dies ist die Größe der Resultante der Druckkräfte auf die Plattenelemente. Sie ist das Produkt von $g\varrho$ und dem Volumen $\frac{1}{3} ab^2 \cos\theta$ des Prismas, das dadurch gebildet wird, daß man von BC die Linien BD, CE (Fig. 234, a. f. S.) senkrecht zur Ebene des Dreiecks ABC und so lang, wie die Tiefe von BC unter der Oberfläche ist, zieht.

404. Druckkraft auf den Boden eines Gefäßes. Experiment mit den Pascalschen Gefäßen. Pascal hat gezeigt, daß die gesamte Druckkraft auf die Böden von mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßen verschiedener Gestalt, wie in Fig. 235 (a. f. S.), denselben Wert hat. Dies folgt

ganz natürlich aus der Wirkung des hydrostatischen Drucks; es kann aber auch experimentell bewiesen werden, indem man das (zunächst unten offene) Gefäß für sich unterstützt, die als Boden dienende Scheibe dagegen mittels eines Drahtes an einer Wage aufhängt und, nach Füllung mit Wasser, abwägt. Es zeigt sich, daß in allen Fällen das

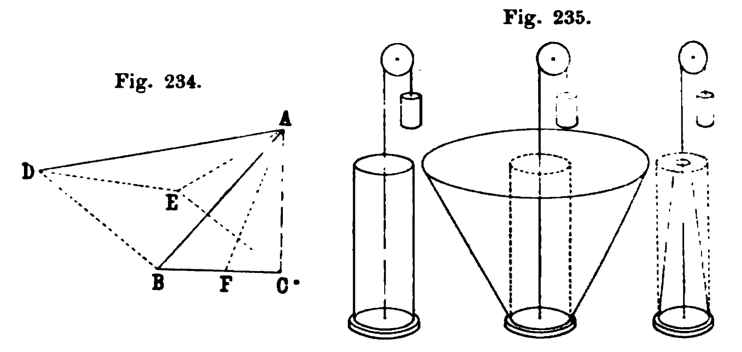


Fig. 234.

Fig. 235.

Gegengewicht dasselbe ist, nämlich gleich dem Gewichte der Scheibe mitsamt dem Gewichte der auf ihr ruhenden zylindrischen Flüssigkeitssäule.

Man hat dieses Ergebnis für paradox angesehen, aber seine Erklärung liegt auf der Hand. Was bei dem weitmündigen Gefäße an Gewicht hinzukommt, wird von den Gefäßwänden getragen; in dem engmündigen Gefäße ist das ganze Gewicht geringer als der Bodendruck, aber die gesamte von der Flüssigkeit nach unten ausgeübte Druckkraft ist der Bodendruck minus der auf die inneren schrägen Gefäßwände ausgeübten Druckkraft nach oben; und diese Kraft nach unten ist gerade das Gewicht der Flüssigkeit. Denn die Druckkraft nach oben ist gerade das Gewicht derjenigen Flüssigkeit, welche im letzteren Falle von außen erforderlich ist, um den Flüssigkeitszylinder zu vervollständigen, wie durch die punktierten Linien in der dritten Figur von Fig. 235 angegeben ist.

Immerhin ist dieses Verhalten durchaus charakteristisch für den flüssigen Zustand der Materie; läßt man das zu dem Versuche benutzte Wasser in den Gefäßen zu Eis erstarren, so kommt (vorausgesetzt, daß keine Adhäsion an die Gefäßwände stattfindet) sofort das Gewicht der wirklichen Massen zur Geltung, ausgenommen den Fall des weiten Gefäßes, dessen Wände einen mehr oder weniger beträchtlichen Teil der festen Masse tragen werden.

405. Druckzentrum. Offenbar wird eine eingetauchte ebene Platte einen Punkt haben, in dem ein Zug vom Betrage $g\varrho \int h df$, wenn er senkrecht angreift, die Resultante der Druckkräfte auf die Elemente der einen Seite der Ebene aufheben wird. Um diesen Punkt zu finden, wählt man zwei beliebige, nicht parallele Beziehungslinien in der Ebene und setzt x und y für die Entfernungen von df von ihnen.

Für die Summen M_1 und M_2 der Momente der Druckkräfte um diese Beziehungslinien gilt, wenn $p_0 = 0$ ist, der Ausdruck

$$M_1 = g\varrho \int hx\,df, \qquad M_2 = g\varrho \int hy\,df,$$

und, wenn ξ und η die Entfernungen der Wirkungslinie der Resultante von denselben Linien bezeichnet:

$$\xi = \frac{\int hx\,df}{\int h\,df}, \qquad \eta = \frac{\int hy\,df}{\int h\,df} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

wo die Integrale über die Platte genommen sind.

Der so gefundene Punkt ist der Schwerpunkt einer Materienverteilung über die Fläche von einer mit h, der Tiefe des Punktes unter der freien Oberfläche, proportionalen Flächendichte. Er heißt das **Druckzentrum** der Platte für die hier angenommene Druckverteilung.

Für die dreieckige Platte in der oben beschriebenen Lage nimmt man nur eine Bezugslinie, die Schnittlinie der Ebene mit der freien Oberfläche. Eine zweite Linie in der Platte ist unnötig, da offenbar die Wirkungslinie der Resultante in diesem Falle durch einen Punkt der den Scheitelpunkt mit dem Mittelpunkte der Basis verbindenden Linie hindurch muß. Es ist daher, wenn $p_0 = 0$ ist:

$$\xi = \frac{\int_0^b h^3\,dh}{\int_0^b h^2\,dh} = \frac{3}{4}\,b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Hätte das Dreieck seine Basis in der freien Oberfläche, so würde man für die Länge eines mit der Basis parallelen Streifens, der um den Betrag h von der Basis entfernt wäre, den Wert $a(b - h)/b$ haben, und demnach

$$P = g\varrho\,\frac{a}{b}\,\cos\theta \int_0^b (b - h)\,h\,dh = \frac{1}{6}\,g\varrho a b^2 \cos\theta \quad . \; . \quad (7)$$

oder die Hälfte des früheren Ergebnisses aus Gl. (4).

Das Druckzentrum ist in diesem Falle, wie leicht zu ermitteln ist, in der Entfernung $\frac{1}{2}\,b$ von der Basis. Man sieht dies ohne Rechnung ein, durch die Erwägung, daß die Druckkräfte auf Streifen in beiderseits gleichen Entfernungen von der Mitte von AF offenbar gleiche Momente um die Basis haben.

406. Druckzentrum für eine beliebige ebene Fläche. Für eine beliebige ebene Fläche, in einer gleichförmigen Flüssigkeit unter der Wirkung der Schwere ist, wie wir sahen, der Druck in einem Punkte mit der Tiefe dieses Punktes unter der freien Oberfläche proportional, wenn der Oberflächendruck als null angenommen wird. Daraus folgt, daß der Druck mit der Entfernung des Punktes von der Schnittlinie AB der Ebene mit der freien Oberfläche proportional ist. Wenn x

und y die Koordinaten eines Punktes P in der ebenen Fläche, auf Axen in der Ebene bezogen, sind, und α der Winkel ist, den ein vom Anfangspunkt auf eine mit AB parallele Linie durch P gefälltes Lot mit der x-Axe bildet, so ist der senkrechte Abstand des Anfangspunktes von der Linie offenbar $x \cos \alpha + y \sin \alpha$. Wenn dann $\bar{\omega}$ der Abstand des Anfangspunktes von AB ist, hat man für den Abstand von P von AB:

$$\bar{\omega} - x \cos \alpha - y \sin \alpha.$$

Folglich ist für die Koordinaten des Druckzentrums, wenn man über die eingetauchte Fläche integriert:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\int x(\bar{\omega} - x \cos \alpha - y \sin \alpha)\, df}{\int (\bar{\omega} - x \cos \alpha - y \sin \alpha)\, df}, \\ \eta &= \frac{\int y(\bar{\omega} - x \cos \alpha - y \sin \alpha)\, df}{\int (\bar{\omega} - x \cos \alpha - y \sin \alpha)\, df} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Wird nun der Koordinaten-Anfangspunkt im Schwerpunkte gewählt und sind die Axen die Hauptträgheitsaxen an dieser Stelle, so ist nach §§ 147 und 168: $\int x\, df = 0$, $\int y\, df = 0$, $\int xy\, df = 0$, so daß sich ergibt:

$$\xi = -\frac{\cos \alpha}{\bar{\omega} f} \int x^2 df, \quad \eta = -\frac{\sin \alpha}{\bar{\omega} f} \int y^2 df \quad . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Nun sind aber $\int x^2 df$, $\int y^2 df$ die Trägheitsmomente der Fläche um die x- bezw. y-Axe. Bezeichnet man diese mit fa^2 bezw. fb^2, wo a und b mit den Reziproken der Halbaxen der Momentenellipse für die Ebene proportional sind, so ergibt sich:

$$\xi = -\frac{a^2}{\bar{\omega}} \cos \alpha, \quad \eta = -\frac{b^2}{\bar{\omega}} \sin \alpha \quad . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Somit sind wir instand gesetzt, die Gleichung der Linie AB, die $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \bar{\omega} = 0$ lautet, in der Form

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} + 1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

zu schreiben, so daß die Linie AB die Polare von $-\xi$, $-\eta$ mit Bezug auf die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist; d. h., ξ und η sind die sogenannten Antipole der Linie AB in bezug auf diese Ellipse.

Ist die Ebene so gelegt, daß eine Hauptaxe der Ellipse, etwa die x-Axe, horizontal ist, so ist $\cos \alpha = 0$ und $\sin \alpha = 1$, so daß $\xi = 0$ und

$$\eta = \frac{-b^2}{\bar{\omega}}$$

wird. Der Mittelpunkt des Drucks liegt dann auf der durch den Schwerpunkt nach der Linie AB gezogenen Senkrechten.

Wenn der Druck in der Oberfläche p_0 nicht null ist, so braucht man nur $\bar{\omega}$ um den der Tiefe eines Flüssigkeitsstreifens, der p_0 hervorbringen würde, entsprechenden Betrag zu steigern.

407. Druckzentrum eines Dreiecks mit in beliebigen Tiefen gelegenen Ecken. Als Beispiel möge die Tiefe des Druckzentrums eines Dreiecks vom Flächeninhalt F gefunden werden, dessen Ecken A, B, C in den Tiefen f, g, h liegen, und das im übrigen so gelegen ist, daß eine Hauptaxe der Momentenellipse horizontal läuft. Die x-Axe sei horizontal; die Ebene des Dreiecks darf als vertikal angenommen werden, ohne daß dadurch eine Lagenänderung des Druckzentrums relativ zum Dreieck stattfindet.

Nun ist das Trägheitsmoment des Dreiecks um eine horizontale Axe in seiner Ebene durch die Ecke A:

$$\frac{F}{6}\,[(g-f)^2 + (g-f)(h-f) + (h-f)^2].$$

Die Tiefe des Schwerpunktes unter der Ecke A ist $\frac{1}{3}(g + h - 2f)$, und folglich ist das Trägheitsmoment des Dreiecks um eine durch den Schwerpunkt gelegte horizontale Axe in seiner Ebene:

$$\frac{F}{6}\,[(g-f)^2 + (g-f)(h-f) + (h-f)^2 - \frac{2}{3}(g + h - 2f)^2]$$
$$= \frac{1}{18}\,F(f^2 + g^2 + h^2 - fg - gh - hf).$$

Somit ist, da $\bar{\omega} = \frac{1}{3}(f + g + h)$ ist, der Abstand des Schwerpunktes unter der Oberfläche:

$$\frac{b^2}{\bar{\omega}}\sin\alpha = \frac{f^2 + g^2 + h^2 - fg - gh - hf}{6(f + g + h)}$$
$$= \frac{1}{12}\,\frac{(f-g)^2 + (g-h)^2 + (h-f)^2}{f + g + h}.$$

Die Tiefe des Druckmittelpunktes unter der Oberfläche ist also

$$\bar{\omega} - \eta = \frac{1}{4}\,\frac{(f+g)^2 + (g+h)^2 + (h+f)^2}{f + g + h} \quad . \quad . \quad (12)$$

408. Druckkraft in einer gegebenen Richtung auf eine gekrümmte Oberfläche. Die ganze Druckkraft in irgend einer Richtung über eine gekrümmte Fläche wird gefunden, indem die Druckkraft über jedes Flächenelement genommen und dieser mit dem Kosinus des Winkels θ zwischen der Normalen zu df und der verlangten Richtung multipliziert wird. Wenn man das über die ganze Oberfläche addiert, so ergibt sich:

$$P = \int p\cos\theta\, df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Wenn p konstant über die ganze Oberfläche ist, so ist

$$P = p\int \cos\theta\,.\,df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Nun ist aber $\int \cos\theta \,.\, df$ die Projektion der von der Grenzlinie der gekrümmten Oberfläche eingeschlossenen ebenen Fläche auf eine zu der verlangten Richtung senkrechte Ebene. Nennt man diese Projektionsfläche f_0, so ist

$$P = pf_0.$$

Ist p nicht konstant, so kann man eine Größe p_a finden, welche die Gleichung

$$P = \int p \cos\theta \,.\, df = p_a f \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

erfüllt; p_a heißt alsdann die mittlere Druckkomponente in der verlangten Richtung.

Der mittlere Druck selbst über die Oberfläche ist nicht dieser, sondern

$$\frac{\int p\, df}{F},$$

wo F der gesamte Flächeninhalt ist.

409. Der zur Trennung der Magdeburger Halbkugeln notwendige Zug. Als Beispiel möge eine Kugel dienen, die aus zwei Halbkugeln vom äußeren Radius r besteht, die durch Flanschen um einen größten Kugelkreis verbunden sind; das Innere der Kugel soll luftleer sein. Es handelt sich darum, festzustellen, welche Kraft dazu gehört, um gegen den äußeren Luftdruck die Halbkugeln voneinander zu reißen. Der Apparat ist unter dem Namen der Magdeburger Halbkugeln (nach dem Bürgermeister von Magdeburg, Otto v. Guericke, der sie zur Veranschaulichung des Luftdrucks erfand) allbekannt.

Wenn die äußere Dicke der Flanschen b und der äußere Druck P ist, so ist die notwendige Kraft $\pi P(r + b)^2$, da die Projektion der unter der Wirkung stehenden Oberfläche, senkrecht zur Zugrichtung ein Kreis vom Radius $r + b$ ist. Es wäre also für Magdeburger Halbkugeln vom Radius 10 cm und einer Flanschendicke von 3 cm die erforderliche Kraft etwa $22/7 \times 1{,}03 \times 169$, also rund 550 kg oder 11 Zentner. In einem alten Holzschnitte zur Illustrierung von Luftpumpenexperimenten sieht man zwei Gespanne von Pferden zwei Magdeburger Halbkugeln von nicht sehr bedeutender Größe vergeblich auseinander zerren.

410. Archimedisches Prinzip. Denken wir uns einen Körper in eine unter der Wirkung der Schwere stehende Flüssigkeit eingetaucht und nehmen wir an, der durch die Flüssigkeit auf die Körperoberfläche wirkende Druck sei in jedem Elemente derselbe, wie er auf das entsprechende Element einer im Gleichgewicht befindlichen Masse der Flüssigkeit stattfinden würde, die man, ohne die umgebende Flüssigkeit irgend zu stören, an Stelle des Körpers setzte. Unter dieser Annahme sind die vertikalen Komponenten der Druckkraft auf die verschiedenen Ober-

flächenteile der den Körper ersetzenden Flüssigkeit genau die gleichen wie die auf den Körper. Aber die auf die Flüssigkeit ausgeübte resultierende Druckkraft nach oben ist gleich der Schwere der den Körper ersetzenden Flüssigkeit, folglich wird auf den Körper eine resultierende Druckkraft nach oben von genau dem gleichen Betrage ausgeübt. Daher verliert der Körper beim Eintauchen scheinbar an Gewicht so viel, wie die durch ihn verdrängte Flüssigkeit wiegt.

411. Experimenteller Beweis des archimedischen Prinzips. Dieses Ergebnis kann durch den in Fig. 236 abgebildeten Apparat leicht geprüft werden. Es wird eine Wage aufgestellt mit einem massiven Kupfer- oder Messingzylinder, der über sich einen Hohlzylinder hat, dessen inneres Volumen dasselbe wie das Volumen des massiven Zylinders ist. Nachdem die Zylinder durch Gewichte in der anderen Wagschale aufgewogen sind, wird ein Gefäß mit Wasser derart unter den massiven Zylinder gebracht, daß dieser eingetaucht wird. Das Gleichgewicht der Wage wird durch den auf den eingetauchten Zylinder wirkenden Druck nach oben gestört und durch Füllung des Hohlzylinders mit Wasser wieder hergestellt.

Fig. 236.



Es sei hier bemerkt, daß, wenn das Gefäß mit Wasser auf eine Schale einer anderen Wage gestellt wird, das Eintauchen des massiven Zylinders eine scheinbare Zunahme des Gewichtes von Wasser und Gefäß verursacht. Dies rührt von der größeren Tiefe des Wassers im Gefäße her, die einen größeren Bodendruck als vorher durch das Gewicht des vom Zylinder verdrängten Wassers erzeugt. So findet sich also das scheinbar verloren gegangene Gewicht des Zylinders in dem Gewichtszuwachs des Wassergefäßes wieder. Das archimedische Prinzip kann auch dadurch erhärtet werden, daß man einen Körper von regulärer Gestalt wägt, dessen Dimensionen man vorher genau gemessen und dessen Volumen V in Kubikzentimetern man berechnet hat. Der Körper wird alsdann gewogen und sein scheinbarer Gewichtsverlust im Wasser festgestellt; er muß Vg betragen, da ja 1 ccm Wasser sehr annähernd 1 g ist.

412. Anwendung des Prinzips zur Entdeckung der Fälschung von Gold. Das vorliegende Prinzip wurde von Archimedes gefunden, den Hieron, der König von Syrakus, beauftragt hatte, festzustellen, ob eine für ihn gemachte Krone, die aus reinem Gold sein sollte, durch irgend ein geringeres Metall gefälscht worden wäre. Je größer der

eingetauchte Körper ist, desto größer ist die zum Ersatz des Körpers notwendige Flüssigkeitsmenge, und desto größer ist daher auch die auf den Körper ausgeübte Druckkraft nach oben. Nun würde ein bestimmtes Gewicht einer Mischung von Gold und Silber oder Gold und Kupfer ein größeres Volumen haben als das gleiche Gewicht reinen Goldes. Es würde also die Mischung einen größeren scheinbaren Gewichtsverlust durch das Eintauchen in Wasser erleiden als das reine Gold; und es konnte auf diese Weise die Echtheit der Krone geprüft werden. Man brauchte nur ein Goldgewicht von der gewünschten Feinheit und entweder genau vom Gewicht der Krone oder in bekanntem Verhältnis zu diesem zu prüfen und den Gewichtsverlust durch Eintauchen in Wasser in beiden Fällen zu bestimmen.

Die Tradition behauptet, der Gedanke, die Frage auf diese Weise zu entscheiden, sei Archimedes beim Baden gekommen, als er an seinem eigenen Körper die tragende Kraft des Wassers spürte.

413. Wägungskorrektion für verdrängte Luft. Auftrieb. Das Prinzip gilt für alle Fluida, auf welche die Schwere eine merkliche Wirkung hat. So erfährt ein gänzlich in Wasser eingetauchtes Stück Holz einen nach oben gerichteten Druck, der durch das Gewicht des verdrängten Wassers gemessen wird, eine Kraft, die tatsächlich größer ist als das Gewicht des Holzes und den Körper steigen macht, wenn keine andere Kraft wirkt. Auf einen Ballon wirkt eine nach oben gerichtete Kraft, die dem Gewicht der verdrängten Luft gleichkommt; sie kann größer sein als das Gewicht des Ballons mit seinen Anhängseln und daher das Aufsteigen des Ballons verursachen. Man nennt diese nach oben gerichtete Kraft den Auftrieb.

Daraus folgt, daß man bei genauer Wägung von Körpern das Gewicht sowohl der durch den Körper, als der durch die Gewichte in der anderen Wagschale verdrängten Luft mit in Rechnung ziehen muß. Dadurch hat man eine praktische Methode, die spezifische Gewichte der Körper oder, mit anderem Worte, ihre Dichten (§ 135) zu vergleichen. Wir werden demnächst hierauf zurückkommen.

414. Die durch Eintauchen eines Körpers auf eine Flüssigkeit geleistete Arbeit. Beispiel dafür. Das archimedische Prinzip kann folgendermaßen aus dem Energieprinzip abgeleitet werden. Ein Körper vom Volumen V werde in eine Flüssigkeit von der Dichte ϱ vollkommen eingetaucht. Legt man den Schwerpunkt des Volumens V um einen Betrag x tiefer, so ändert sich die Lage der freien Oberfläche nicht, und die Änderung in der Verteilung der Flüssigkeit ist genau dieselbe, wie wenn man ein Volumen V der Flüssigkeit um eine Strecke x gehoben hätte. Folglich ist die auf die Flüssigkeit geleistete Arbeit in Gravitations-Arbeits-Einheiten ϱVx, d. h. der durch die Flüssigkeit dem Körper erteilte Auftrieb ist ϱV in Gravitationseinheiten. Es ist

also ϱVx der durch die Lagenänderung des Körpers in diesem Falle verursachte Energiezuwachs der Flüssigkeit.

Wird der Körper nur teilweise eingetaucht und wird das Flüssigkeitsvolumen von V auf $V + v$ erhöht, so ist die auf die Flüssigkeit geleistete Arbeit gleich derjenigen bei der Hebung des Schwerpunktes der verdrängten Flüssigkeit um die Strecke, durch die der Schwerpunkt des früheren Volumens V sich gesenkt hat, plus derjenigen beim Heben eines Volumens v der Flüssigkeit über die frühere freie Oberfläche in den den Körper umgebenden Raum. Diese Arbeit ist $\varrho v x'$, wenn x' die Strecke ist, um die der Schwerpunkt dieser Flüssigkeitsmenge gehoben worden ist.

Es seien nun a und a' die Querschnitte des Körpers bezw. des Gefäßes an der freien Oberfläche, und der Körper möge ohne jede andere Lagenänderung um eine kleine Strecke x heruntersinken. Würde nur das schon vorher unter der freien Oberfläche befindliche Volumen V tiefer eingetaucht, so wäre die auf die Flüssigkeit geleistete Arbeit, nach dem eben gefundenen Ergebnis, ϱVx. Dann würde die Flüssigkeit dieselbe freie Oberfläche haben wie vorher, und diese würde in der Höhe x über dem höchsten Punkte des Volumens V stehen.

Die Hinzufügung einer Länge x zu dem Teil des Volumens V wird die Flüssigkeit, die also darüber steht, zu einer Schicht von der Dicke $ax/(a' - a)$ über die frühere freie Oberfläche erheben. Der Schwerpunkt dieser Flüssigkeitsmenge steigt also um eine Höhe

$$\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \frac{ax}{a' - a}$$

oder

$$\frac{1}{2} \frac{a'x}{a' - a}.$$

Die geleistete Arbeit ist das Produkt davon mit $\varrho a x$, d. h.:

$$\frac{\varrho}{2} \frac{a a' x^2}{a' - a}.$$

Die ganze auf die Flüssigkeit geleistete Arbeit A wird daher durch den Ausdruck

$$A = \varrho V x + \frac{1}{2} \varrho x^2 a \frac{a'}{a' - a} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

gegeben. Für die durch den festen Körper auf die Flüssigkeit und durch die Flüssigkeit auf den festen Körper ausgeübte mittlere Kraft K haben wir also in Gravitationseinheiten

$$K = \varrho V + \frac{1}{2} \varrho x a \frac{a'}{a' - a} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Das zweite Glied kann vernachlässigt werden, wenn x unendlich klein und folglich die Kraft ϱV ist wie vorher.

Als ein Beispiel kann gezeigt werden, daß, wenn eine Kugel vom Radius r in ein zylindrisches Gefäß mit Wasser vom Radius R gerade eben eintaucht und langsam aus dem Wasser gehoben wird, der Verlust des Wassers an potentieller Energie

$$G'r\left(1-\frac{2}{3}\frac{r^2}{R^2}\right)$$

ist, wenn G' das Gewicht des durch die Kugel verdrängten Wassers ist.

Wenn die Kugel bis zu einer Strecke h, von ihrem tiefsten Punkte bis zur freien Oberfläche gemessen, eingetaucht und dann im wirklichen Niveau um eine Strecke dx gehoben wird, so nimmt die Tiefe h um einen Betrag

$$dh=\frac{a'dx}{a'-a}$$

ab. Es ist aber

$$\frac{a'-a}{a'}=\frac{R^2-2rh+h^2}{R^2},$$

so daß

$$dx=\frac{R^2-2rh+h^2}{R^2}\,dh$$

ist. Wenn man dx für x in Gl. (16) und für V seinen Wert $\frac{1}{3}\pi h^3(3r-h)$ einsetzt, erhält man für die ganze, durch das Wasser, wenn es um eine Strecke dh an der Kugel fällt, verlorene potentielle Energie

$$dA=\frac{1}{3}\pi\varrho\,\frac{3r-h}{R^2}\,(R^2-2rh+h^2)h^2dh.$$

Das letzte Glied in Gl. (16) ist zu vernachlässigen, da es dx^2 enthält und wir dx hier unendlich klein nehmen. Die gesamte dem Wasser verloren gegangene potentielle Energie ist also:

$$\frac{\pi\varrho}{3R^2}\int_0^{2r}(R^2-2rh+h^2)(3r-h)h^2dh=\frac{4}{3}\pi\varrho r^4\left(1-\frac{2}{3}\frac{r^2}{R^2}\right)$$

oder kurz:

$$G'r\left(1-\frac{2}{3}\frac{r^2}{R^2}\right),$$

was zu beweisen war.

Die gesamte Niveauänderung x der Kugel ist ferner:

$$x=\frac{1}{R^2}\int_0^{2r}(R^2-2rh+h^2)dh=\frac{2r}{R^2}\left(R^2-\frac{2}{3}r^2\right).$$

Folglich ist die von der festen Kugel im Aufsteigen gewonnene potentielle Energie, wenn G das Gewicht der Kugel ist:

$$2Gr\left(1-\frac{2}{3}\frac{r^2}{R^2}\right).$$

415. Mittelpunkt des Auftriebs. Die vertikalen Komponenten der Druckkraft haben eine Resultante, die in einer bestimmten Vertikalen im Körper wirkt. Denn denken wir uns den Körper weggenommen und das Gleichgewicht durch Auffüllen des leeren Raumes mit derselben Flüssigkeit, in der der Körper schwamm, aufrecht erhalten, ohne die Anordnung der umgebenden Flüssigkeit irgendwie zu stören. Die Gravitationskräfte auf die den Körper solcherart ersetzende Flüssigkeit haben eine Resultante, die nach unten durch den Schwerpunkt der ersetzenden Flüssigkeitsmenge wirkt, und es wird angenommen, daß die durch die umgebende Flüssigkeit auf den Körper wirkenden Druckkräfte dieselben waren wie die jetzt auf die Oberfläche der ihn ersetzenden Flüssigkeitsmenge wirkenden. Der auf diese Flüssigkeit und folglich auch auf den Körper wirkende Auftrieb muß durch ebendiesen selben Schwerpunkt hindurchwirken. Derjenige Punkt des von dem Körper in der Flüssigkeit eingenommenen Raumes, welcher also mit dem Schwerpunkte der ersetzenden Flüssigkeit zusammenfallen würde, heißt der Mittelpunkt des Auftriebs des Körpers in dem Zustande des völligen oder partiellen Eintauchens, den er eben hat.

Es folgt aus dem Obigen, daß der Auftrieb für einen schwimmenden Körper gleich dem Gewicht des Körpers ist. Man sagt von einem schwimmenden Körper, daß er eine Reserveschwimmkraft oder Auftriebreserve hat, die davon abhängt, mit welchem Betrage der Körper über die Flüssigkeitsoberfläche hervorragt. Das Freibord oder die Höhe der Schiffsseiten über der Wasserlinie bezeichnet die Reserveschwimmkraft des Schiffes.

An jedem britischen — neuerdings auch jedem deutschen — Schiffe von mehr als 80 Tonnen Wasserverdrängung muß außen eine „Ladelinie“ (die oberste Kante einer zollbreiten, horizontalen Linie) aufgemalt sein, über die hinaus das Schiff nicht ins Meerwasser einsinken darf. Sie sichert dem Schiffe eine Auftriebreserve von einem Viertel seines gesamten Auftriebs. Der Auftrieb mit jeder beliebigen Ladung ist genau das Gewicht des Wassers, das das Schiff mit dieser Ladung verdrängt; man versteht unter Auftrieb aber häufig, besonders bei Bojen und Rettungsgürteln, die Auftriebreserve des Körpers, wenn er schwimmt, für sich allein.

Wenn man die Schiffe mit wasserdichten Räumen, den sogenannten Schotten, baut, kann eine Reserveschwimmkraft erhalten bleiben, selbst nachdem sich infolge eines Zusammenpralls ein oder mehrere Räume des Schiffes mit Wasser gefüllt haben. Der verlorene Auftrieb rührt natürlich nur davon her, daß sich Räume, die vorher ohne Ladung waren, mit Wasser gefüllt haben.

Wenn ein schwimmender Körper vom Gewicht G, völlig eingetaucht, ein Gewicht Wasser G' verdrängt, so ist die Auftriebreserve $G' - G$ oder $G(G'/G - 1)$. Das Verhältnis G/G' ist das scheinbare

spezifische Gewicht des Körpers und wird häufig durch s bezeichnet. Somit ist der Reserveauftrieb $G\left(\frac{1}{s}-1\right)$.

416. Austausch von Auftrieb und Auftriebreserve. Ein homogener Körper vom spezifischen Gewichte s möge mit einer bestimmten Wasserlinie schwimmen. Der Auftrieb ist G und die Auftriebreserve $G\left(\frac{1}{s}-1\right)$. Nun möge sich das spezifische Gewicht auf $1-s$ ändern, so wird der Auftrieb $G(1-s)/s$ und die Auftriebreserve

$$G\,\frac{1-s}{s}\left[\frac{1}{1-s}-1\right],$$

also G werden. Durch die Änderung des spezifischen Gewichtes sind Auftrieb und Auftriebreserve ausgetauscht worden. Folglich wird der Körper nach der Änderung des spezifischen Gewichtes, wenn er umgekehrt wird, mit derselben Wasserlinie wie vorher schwimmen.

Überdies wird der Körper in der umgekehrten Lage dasselbe Richtungsmoment für denselben Kielwinkel haben. Betrachten wir zum Nachweis dessen die beiden Teile des Körpers auf beiden Seiten der durch die Wasserlinie gebildeten Ebene. Die Schwerpunkte der Volumina dieser beiden Teile, die die Mittelpunkte des Auftriebs für die beiden Lagen des Körpers sind, müssen, da der Körper homogen ist, auf einer Linie durch P liegen und in Entfernungen von P, die sich umgekehrt wie die Volumina der Teile verhalten. Nun verhalten sich die Auftriebe in den beiden Lagen direkt wie diese Volumina; also ist der Satz bewiesen.

417. Aufrichtungsmoment. Der Begriff des Mittelpunktes des Auftriebs ist für das richtige Verständnis der Gleichgewichtsbedingungen eines in eine Flüssigkeit eingetauchten Körpers notwendig. Die von der Schwere erzeugte resultierende Kraft nach unten auf den Körper wirkt in einer Vertikalen durch den Schwerpunkt des Körpers, die Resultante der Druckkräfte nach oben auf die Körperoberfläche wirkt in der durch den Mittelpunkt des Auftriebs hindurchgehenden Vertikalen. Wenn Gleichgewicht herrschen soll, müssen diese beiden Kräfte gleich sein und in derselben Vertikalen wirken. Wird der Körper um einen kleinen Winkel aus der Lage, in der diese Bedingung erfüllt ist, verrückt, so wirken die beiden Kräfte nicht mehr in derselben Vertikalen, sondern bilden ein Kräftepaar, das den Körper entweder nach der Gleichgewichtslage hin oder von ihr weg dreht. Im ersten Falle ist das Gleichgewicht stabil, im zweiten unstabil. Das von dem Kräftepaar für irgend eine gegen die Gleichgewichtslage geneigte Lage des Körpers ins Spiel gebrachte Moment heißt „Aufrichtungsmoment" oder „Kippungsmoment", je nachdem es den Körper in die Gleichgewichtslage zu bringen oder von ihr abzuwenden bestrebt ist.

418. Metazentrum. Metazentrische Höhe. Stabilitätskurven. Jetzt möge sich ein im Gleichgewichte schwimmender Körper so um einen beliebigen Winkel neigen, daß er dieselbe Verdrängung beibehält. Das Auftriebzentrum und der Schwerpunkt des Schiffes werden dann im allgemeinen nicht mehr in einer Vertikalen liegen. Die Senkrechte durch die neue Lage des Auftriebzentrums wird die Linie durch den Schwerpunkt des Fahrzeugs, die in der Gleichgewichtslage senkrecht ist, in einem Punkte M treffen; dieser Punkt heißt das Metazentrum. Von der Lage des Metazentrums relativ zum Schwerpunkte des Schiffes hängt die Stabilität oder Unstabilität des Gleichgewichtes ab.

Fig. 237.

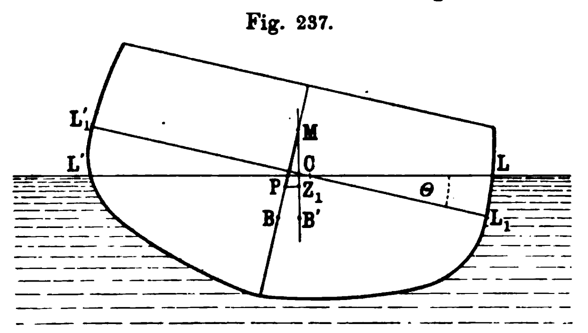


Fig. 237 stellt den Querschnitt eines Schiffes dar, das um den zwischen den beiden Wasserlinien LL', L_1L_1' angegebenen Winkel θ gekippt ist; der Mittelpunkt des Auftriebs sei B', während B der Punkt sei, der mit dem Mittelpunkte des Auftriebs zusammentreffen würde, wenn das Schiff kielrecht stünde. Auch sei P der Schwerpunkt des Schiffes. Ist die Wasserverdrängung durch das Kippen nicht verändert worden, so hat sich der Querschnitt um eine durch C, den Schwerpunkt der Schwimmebene oder der Ebene der Wasserlinie des Schiffes, hindurchgehende Axe gedreht, wie der Leser beweisen mag.

Wenn das Gewicht oder „Deplacement" des Schiffes G ist, so ist N, sein Richtungsmoment, $G \times$ Entfernung zwischen P und der Linie $B'M$, d. h.

$$N = G\,.\,(MP)\sin\theta = GH_m \sin\theta,$$

wenn H_m die Größe (MP) bezeichnet. Also ist das Richtungsmoment für einen gegebenen Ausschlagwinkel um so größer, je größer die Höhe H_m des Metazentrums über dem Schwerpunkte des Schiffes ist. Offenbar muß zur Erzielung von Stabilität M über P liegen; das Gleichgewicht ist unstabil, wenn M unter P liegt. Also ist das Gleichgewicht stabil oder nicht, je nachdem die metazentrische Höhe H_m positiv oder negativ ist.

Die Lage des Metazentrums ändert sich mit dem Werte von θ und wird nicht selten bei Schiffen, wo θ einen hohen Wert erreicht, sehr klein oder selbst negativ. In solchen Fällen muß das Schiffskommando

alle Sorgfalt darauf verwenden, zu verhindern, daß das Schiff sich breitseit gegen Wellen stellt, die nahezu dieselbe Periode haben, mit welcher das Schiff frei rollt, damit nicht eine so große Weite θ der Schlingerwelle erzeugt werde, daß sie den Punkt überschreitet, wo H_m verschwindet. Kommt das Schiff in ein Rollen von solcher Amplitüde, so muß es umkippen, wenn nicht schleunigst Maßregeln dagegen ergriffen werden, wie die, eine Abteilung Leute quer auf die andere Seite des Decks zu beordern, um auf diese Weise ein die Aufrichtung des Schiffes unterstützendes Moment hereinzubringen.

Die Lage von M für einen unendlich kleinen Ausschlagwinkel wird manchmal als Metazentrum und der zugehörige Wert von H_m als metazentrische Höhe definiert. In diesem Sinne ist die metazentrische Höhe ein genaues Maß der Stabilität des Schiffes, wenn es aufrecht oder, wie man sagt, kielrecht steht.

Wenn sich das Schiff um eine durch C hindurchgehende, zu dem in Fig. 238 dargestellten Querschnitt senkrechte Linie wiegt, so bewegt sich der Mittelpunkt des Auftriebs der Reihe nach in verschiedenen Lagen B_1, B_2 ..., die auf einer „Auftriebskurve" genannten Kurve liegen.

Gewöhnlich ist die Stabilität eines Schiffes für kleine Ausschlagwinkel gering, weil (MP) für solche Deplacements klein ist. Infolgedessen besitzt das Schiff für mittlere Winkel eine lange Schwingungsperiode und daher sehr ruhigen Gang. In solchen Fällen wächst (MP) sehr schnell mit θ, so daß das Schiff für bedeutende Neigungen durchaus stabil ist. Ein Schiff, dessen metazentrische Höhe für kleine Neigungen groß ist, nennt man steif. Der Steifigkeitsgrad für verschiedene Neigungen kann in einer Kurve dargestellt werden, deren Abszissenwerte die Ausschlagwinkel und deren Ordinatenwerte die zugehörige metazentrischen Höhen sind.

Eine Kurve, in der statt der metazentrischen Höhen die Momente der aufrichtenden Kräftepaare verzeichnet sind, heißt die Kurve der statischen Stabilität. Noch eine andere Kurve, die der dynamischen Stabilität, wird gezeichnet; in dieser sind die Ordinatenwerte den Beträgen an Arbeit proportional, die geleistet werden müssen, wenn man das Schiff langsam aus der vertikalen Stellung in die geneigten Lagen umkippt. Es ist klar, daß jeder Ordinatenwert dieser Kurve dem Flächeninhalt der Kurve der statischen Stabilität vom Anfangspunkte herauf zur entsprechenden Ordinate der letzteren Kurve proportional ist.

419. Longitudinales Metazentrum. Auftriebsfläche. Metazentrische Höhen. Ein Schiff kann sich aber auch um eine horizontale Axe senkrecht zu einem Längsschnitt durch P und den Kiel drehen, so, wenn es „stampft", wenn es mit der Spitze auf die Wellen trifft oder auf irgend welche Weise verschiedenen Tiefgang an Bug

und Steuer hat. Für diese Neigung gibt es ebenfalls ein Metazentrum, das sogenannte longitudinale Metazentrum. Für dieses ist augenscheinlich die metazentrische Höhe viel größer als die gewöhnliche oder transversale metazentrische Höhe. Das Richtungsmoment hat einen dem schon gefundenen entsprechenden Ausdruck.

Infolgedessen bewegt sich der Mittelpunkt des Auftriebs, wenn die Schiffsbewegung sich aus Rollen und Stampfen zusammensetzt; durch eine Reihenfolge von Punkten, die alle auf einer Fläche liegen; diese Fläche wird die **Auftriebsfläche** genannt.

Beide metazentrische Höhen werden für jedes Schiff experimentell bestimmt, indem man ein Gewicht an Deck entlang bewegt und die von ihm in verschiedenen Lagen erzeugte Neigung beobachtet, oder indem man die Bote auf den beiden Seiten des Schiffes abwechselnd mit einem vorher bekannten Gewicht Wasser füllt. Dies wird für verschiedene Deplacements des Schiffes wiederholt, so daß man die Stabilität unter verschiedenen Bedingungen kennen lernt.

Das Gewicht sei g und werde durch eine Strecke b über Deck bewegt. Wenn dann G die Wasserverdrängung des Schiffes und θ der Neigungswinkel ist, so gilt für das Gleichgewicht der Ausdruck $gb\cos\theta = G.(PZ) = GH_m \sin\theta$ oder

$$gb = GH_m \, tg\,\theta.$$

Nun ist aber $H_m \, tg\,\theta$ die Strecke, um welche der Schwerpunkt des Schiffes in derselben Richtung relativ zum Schiff wie g verrückt worden ist, denn wenn diese Strecke mit (PP_1) bezeichnet wird, so ist

$$\frac{b}{(PP_1)} = \frac{G}{g}.$$

Wenn dann die Wasserverdrängung G des Schiffes bekannt ist und θ mit Hilfe eines Klinometers (eines im Schiffe aufgehängten mit graduiertem Kreisbogen versehenen Pendels, um die Winkelablenkung des Schiffes von einer in ihm festen Linie durch den Aufhängepunkt zu messen) beobachtet wird, so wird der Wert gb/G oder (PP_1) berechnet, und daraus erhält man H_m als

$$\frac{(PP_1)}{tg\,\theta}.$$

420. Eintauchender und auftauchender Keil. Wenn ein Schiff kippt wie in Fig. 237, so wird ein Keil des Schiffes CLL_1 ins Wasser getaucht, während ein anderer Keil von gleichem Volumen $CL'L'_1$ auftaucht. Der erste heißt der **eintauchende Keil**, der zweite der **auftauchende Keil**. Das von diesen Keilen herrührende aufrichtende Kräftepaar L ist die Summe der um die Längslinie durch C genommenen Momente des Auftriebs des eintauchenden und des negativen Auftriebs des auftauchenden Keils; sie ergeben zwei Momente in der-

selben Richtung. Es sei $d\bar{\omega}$ ein beliebiges Volumen des eintauchenden Keils, x seine horizontale Entfernung von der Linie durch C, und $\varrho d\bar{\omega}$ sei das Gewicht des $d\bar{\omega}$ füllenden Wassers. Dieselben Zeichen mit Strich gelten für den auftauchenden Keil. Dann ist

$$L = \int \varrho x d\bar{\omega} + \int \varrho x' d\bar{\omega}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

wo die Integrale über die ganzen Keile genommen sind.

Nehmen wir zwei um dy voneinander entfernte Querschnitte und wählen wir θ klein. Dann ist für ein Raumelement zwischen ihnen $d\bar{\omega} = x\theta\, dx\, dy$.

Nun ist aber $dx\,dy$ eine Fläche dA, parallel mit dem Wasserspiegel, in Wahrheit also ein Element der sogenannten Schwimmebene des Durchschnittes des Schiffes durch den Wasserspiegel. Infolgedessen kann man, wenn man alle so gefundenen Scheiben des Keiles addiert, nach Gl. (18) schreiben:

$$L = \varrho\theta\, (\int x^2 dA + \int x'^2 dA'] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Die Größe auf der rechten Seite ist das Trägheitsmoment eines mit der Schwimmebene zusammenfallenden ebenen Stückes Materie vom Betrage $\varrho\theta$ pro Flächeneinheit um die Längslinie durch C. Wenn A der ganze Inhalt der Schwimmebene und k ihr Trägheitsradius um die Längslinie durch C ist, so ist

$$L = \varrho\,\theta\, A k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Wenn die Schwerpunkte der beiden Keile gefunden und mit ss' bezeichnet sind, so muß offenbar die Linie (ss') der Linie (BB') (Fig. 237), die die Mittelpunkte des Auftriebs für die beiden Lagen des Schiffes miteinander verbindet, parallel sein. Auch ist, wenn U das Volumen eines Keils, V das ganze eingetauchte Volumen, q die Länge der Projektion von (ss') auf die Wasserlinie in der Verrückungslage und p die Länge des von B auf $(B'M)$ gefällten Lotes ist, offenbar $q = p\,V/U$. Wenn nun θ unendlich klein ist, so ist (ss') ganz nahezu horizontal und daher (BB') ebenfalls. Dann ist also die Tangente an die Kurve des Auftriebs in B parallel zur Wasserlinie.

Durch die eben aufgestellte Beziehung zwischen p und q ergibt sich für das Richtungsmoment:

$$\begin{aligned} G\,.\,(PZ) &= G\,(p - (PB) \sin\theta) \\ &= G\left(\frac{U}{V}\, q - (PB) \sin\theta\right) = \varrho\,(Uq - V.(PB) \sin\theta). \end{aligned}$$

Die letztere Beziehung ist als Atwoodsches Theorem bekannt.

Das Glied $\varrho\, Uq$ ist einfach das von dem auftauchenden und eintauchenden Keil herrührende Kräftepaar ($L = \varrho\,\theta\, A k^2$). Das gesamte Richtungsmoment muß daher für einen beliebigen Fall eines schwimmenden Körpers durch Berechnung von $\varrho\,\theta\, A k^2$ für die Schwimmebene und Subtraktion des Wertes von $G\,.\,(PB) \sin\theta$ vom Resultate bestimmt werden. So ist für einen homogenen geraden Kreiszylinder vom

Radius r und der Höhe $2h$, der mit vertikal stehender Axe und bis zur Tiefe t eingetaucht schwimmt, bei kleinem θ

$$\varrho\,\theta A k^2 = \frac{1}{4}\,\varrho\,\theta\,\pi r^4, \qquad G.(PB)\sin\theta = \varrho\pi r^2 t\left(h - \frac{1}{2}t\right)\theta,$$

so daß sich als Richtungsmoment ergibt:

$$\varrho\,\theta\,\pi r^2\left[\frac{1}{4}\,r^2 - \left(h - \frac{1}{2}\,t\right)t\right].$$

Das Gleichgewicht ist nur dann unstabil, wenn $Ak^2 < V.(PB)$ ist. Folglich ist es in dem vorliegenden Falle nur unstabil, wenn $t^2 - 2ht + \frac{1}{2}r^2 < 0$ ist, und ist durchaus stabil, wenn $\frac{1}{2}\,r^2 > h^2$, d. h. $h < r/\sqrt{2}$ ist, da dies gewährleistet, daß $t^2 - 2ht + \frac{1}{2}r^2$ oder $(t-h)^2 + \frac{1}{2}r^2 - h^2$ für jedes t positiv sein muß.

Wird der Körper vollständig eingetaucht, so ist der Mittelpunkt des Auftriebs im Körper fest, da sich die Gestalt des von ihm in der Flüssigkeit eingenommenen Raumes keineswegs ändert. Schon durch das bloße Zeichnen einer Figur sieht man ein, daß für stabiles Gleichgewicht der Mittelpunkt des Auftriebs B über dem Mittelpunkte der Schwere P liegen muß. Das Richtungsmoment für eine Neigung θ ist augenscheinlich $G.(PB)\sin\theta$.

421. Schwankungen eines schwimmenden Körpers. Für kleine Schwankungen eines schwimmenden Körpers, wie eines Schiffes, kann man einen annähernden Ausdruck nach § 53 erhalten, wenn man die Bewegung des Wassers vernachlässigt. Wenn man GK^2 das Trägheitsmoment des Schiffes um die horizontale Linie durch O und T die Periode nennt, so ergibt sich

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K^2}{H_m}} \quad \dots\dots\dots \quad (21)$$

Je größer also das Richtungsmoment, desto kleiner ist die Schlinger- oder Rollperiode. Die Größe GH_m kann als Maß der in § 418 eingeführten Steifigkeit des Schiffes gelten.

Die Theorie der Schiffsschwankungen ist ein sehr wichtiger Teil der angewandten Mechanik und kann hier nicht auseinandergesetzt werden. Der Leser muß dafür auf Lehrbücher über die Stabilität von Schiffen verwiesen werden.

422. Durch die Schiffsschraube beim Schraubendampfer erzeugtes Vornüberneigen. Ein Schraubendampfer wird durch die Reaktion des Wassers auf die Schraube gekippt, ein Segelschiff durch die Wirkung der Segel, die ebenfalls die Neigung hat, den Bug zu tauchen und das Steuer zu heben. Im ersteren Falle ist das gesamte, der Schraube durch die Maschinen erteilte Moment das Maß des Momentes N der durch das Wasser ausgeübten Gegenwirkung. Diese

Arbeit wird durch das Überkippen des Schiffes um einen Winkel θ in der entgegengesetzten Richtung zu derjenigen, in welcher die Maschinen die Schraube drehen, aufgehoben. Wenn die von den Maschinen an der Schraube ausgegebene Pferdestärke U ist, und wenn ferner n die Umdrehungszahl der Schraube in der Minute, also die Winkelgeschwindigkeit der Schraube in Bogenmaß pro Minute $2\pi n$, ist, so ist, da eine Pferdekraft in der Minute 4500 mkg ausmacht:

$$4500\, U = 2\pi n \times N \quad \text{oder} \quad N = \frac{4500\, U}{2\pi n}.$$

Wenn H_m, wie bisher, die metazentrische Höhe in Metern und θ der erzeugte Kippwinkel ist, so ist

$$\frac{4500\, U}{2\pi n} = W H_m \sin\theta,$$

oder bei kleinem θ:

$$\theta = \frac{4500\, U}{2000\, \pi n\, W H_m} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

wo W in Tonnen (1 t = 1000 kg) zu nehmen ist.

Für ein Kriegsschiff von 12000 Tonnen und $^1/_2$ m metazentrischer Höhe, dessen Maschinen eine Kraft von 12000 Pferdestärken entwickeln und dessen Schraube 80 Umdrehungen in der Minute macht, wird hiernach die Neigung in Graden:

$$\theta = \frac{4500\,.\,57{,}3}{2000\,.\,80\,.\,{}^1/_2\,\pi} = 1 \text{ (nahezu)};$$

dasselbe Resultat kommt offenbar bei beliebigem Gewichte W heraus, wenn nur die Maschinenkraft in PS gerade so groß ist wie das Gewicht in t; denn nur auf das Verhältnis beider kommt es an.

Die Wirkung der Reaktion des Wassers auf die Räder eines Raddampfers geht dahin, auf dieselbe Weise die Lastverhältnisse des Schiffes zu ändern — nämlich den Bug zu heben und das Steuerende herabzudrücken. Dem entgegengesetzten Effekt der Windwirkung auf die Segel eines Segelschiffes wird bis zu einem gewissen Grade durch das „Hängen" der Masten gegen das Steuer entgegengewirkt.

Es ist hier kein Raum, um die Frage des Gleichgewichtes schwimmender Körper weiter zu behandeln, wie wichtig sie auch vom praktischen Standpunkte aus sein möge. Der Leser muß hierfür auf die Lehrbücher der Hydrostatik, allenfalls auch auf die Werke über Schiffsbaukunst verwiesen werden.

---

423. Spezifisches Gewicht. Bestimmung des spezifischen Gewichtes fester Körper. Beziehung zwischen spezifischem Gewicht und Dichte. Wie schon oben erwähnt wurde, ist eine hochwichtige Anwendung des archimedischen Prinzips die zur Bestimmung

spezifischer Gewichte. Das spezifische Gewicht eines Körpers ist (vergl. § 136) das Verhältnis seines wahren Gewichtes (Gewicht im Vakuum) zum wahren Gewicht eines gleichen Volumens Wasser von derjenigen Temperatur, bei welcher es die größte Dichte hat. (Wasser von der Temperatur des schmelzenden Eises zieht sich bei der Erwärmung zuerst zusammen, bis die Temperatur von 4° C. erreicht ist, worauf es sich mit steigender Temperatur ausdehnt.)

Diese Gewichte sind annähernd zu bestimmen, wenn man den Körper in Luft wägt und dann den Gewichtsverlust feststellt, den er bei der Wägung in Wasser erleidet. Die erstere Wägung wird ausgeführt, indem man den Körper an einem feinen Faden an der Wagschale am einen Balkenende aufhängt und eine gleiche Fadenlänge mit den Gewichten in die andere Schale legt. Dann wird ein Gefäß mit Wasser in das Gehäuse der Wage hereingebracht und so weit gehoben, bis der Körper völlig eingetaucht ist. Es sind aber zur Gewinnung eines genauen Resultates mehrere Korrektionen notwendig. Erstens muß das wahre Gewicht des Körpers durch Einbeziehung der durch den Körper und der durch die Gewichte verdrängten Luft korrigiert werden, dann muß das Gewicht des Körpers in Wasser ebenso korrigiert werden; es muß ferner die Temperatur des Wassers beobachtet und eine Korrektion gemacht werden infolge des Umstandes, daß das Wasser, worin der Körper gewogen wurde, nicht die maximale Dichte hatte.

Die folgenden Vorsichtsmaßregeln sind bei der Ausführung der Experimente notwendig: Dem Wasser muß durch Kochen alle Luft entzogen worden sein; Luftblasen, die von den eingetauchten Körpern mit hineingenommen werden und sich an sie ansetzen, müssen von außen her durch Berührung mit einem gut gereinigten Stifte entfernt werden. Der Körper darf, wenn er im Wasser gewogen wird, nirgendwo die Wand des Gefäßes berühren oder ihr auch nur sehr nahe kommen.

Einzelheiten in betreff der Wägungs- und Korrektionsmethoden für den Auftrieb der Luft werden im Kap. XVI über „Messungen und Instrumente“ gegeben werden. Hier soll nur die Feststellung der spezifischen Gewichte der festen Körper und Flüssigkeiten einigermaßen besprochen werden, während die Bestimmung der Gasdichten der Behandlung im zweiten Teile vorbehalten bleibt.

424. Bestimmung des spezifischen Gewichtes eines Körpers, der leichter ist als Wasser. Hat ein fester Körper ein geringeres spezifisches Gewicht als Wasser, so muß man einen Sinker, d. h. ein Gewicht, das ihn zum Untersinken bringt — am besten aus Kupfer- oder Messingdraht — an ihm befestigen, um das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser feststellen zu können. Das wahre Gewicht des Sinkers braucht nicht bekannt zu sein, nur sein Gewicht in Wasser. Denn wenn das wahre Gewicht des festen Körpers W, das des festen Körpers und des Sinkers zusammen im Wasser W_1, das des Sinkers allein in

Wasser W_2 ist und dann für einen Augenblick W' als wahres Gewicht des Sinkers gesetzt wird, so ist das Gewicht des Wassers vom Volumen des Körpers und Sinkers zusammen: $W + W' - W_1$. Das Gewicht des durch den Sinker verdrängten Wassers ist $W' - W_2$. Somit ist das Gewicht des durch den festen Körper verdrängten Wassers

$$W + W' - W_1 - (W' - W_2) = W - W_1 + W_2;$$

W' ist also herausgefallen. Folglich ist

$$s = \frac{W}{W - W_1 + W_2} \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

Bei der Bestimmung der spezifischen Gewichte einer Anzahl von Stoffen, die spezifisch leichter sind als Wasser, kann derselbe Sinker aus Kupferdraht benutzt und gleich im Wasser gelassen werden. Der Körper kann, sobald es nötig ist, leicht daran befestigt werden.

Bei der Bestimmung der spezifischen Gewichte von Körpern, die im Wasser löslich sind oder von ihm chemisch angegriffen werden, muß man den festen Körper in einer anderen Flüssigkeit, gegen die er unempfindlich ist, wägen und dann das spezifische Gewicht dieser Flüssigkeit nach einer geeigneten Methode bestimmen. Wenn W das Gewicht des Körpers und W_2 sein Gewicht in der Flüssigkeit ist, so ist das, was man das spezifische Gewicht des Körpers, bezogen auf die betreffende Flüssigkeit, nennen kann:

$$s_2 = \frac{W}{W - W_2} \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

Wenn sich nun das Gewicht eines Volumens der Flüssigkeit als w_2 und das desselben Volumens Wasser als w herausstellt, so wird ein Volumen Wasser, das dem des festen Körpers gleich ist, das Gewicht

$$w \frac{W - W_2}{w_2}$$

haben, oder wenn σ das spezifische Gewicht w_2/w der Flüssigkeit ist, wird dieses Volumen Wasser

$$\frac{W - W_2}{\sigma}$$

wiegen. Somit ist das wahre spezifische Gewicht

$$s = \frac{W\sigma}{W - W_2} = s_2 \sigma. \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

425. Pyknometer. Die Dichte von festen Körpern sowohl, als von Flüssigkeiten kann mit Hilfe des Pyknometers bestimmt werden. Es ist dies eine kleine Glasflasche, in deren Hals ein Glasstöpsel so eingeschliffen ist, daß er immer genau bis zur selben Stelle hineingeht. Der Stöpsel ist der Länge nach durchlocht, so daß Luft und Flüssigkeit durch ein enges Röhrchen entweichen können, wenn der Stöpsel ein-

getrieben wird; man kann also die Flasche bis genau zum Stöpsel füllen (Fig. 238 a, b, c, d).

Das wahre Gewicht der Flasche und des Wassers, das sie enthält, sind vorher festgestellt worden, dann wird sie gut getrocknet, völlig

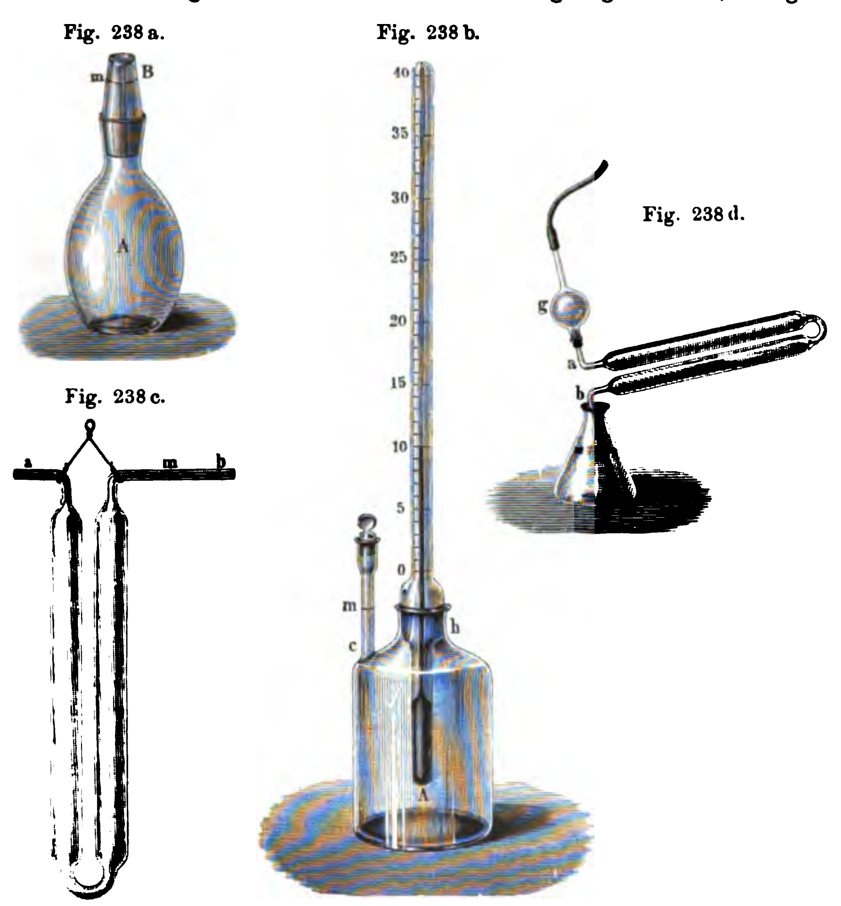


Fig. 238 a. Fig. 238 b. Fig. 238 c. Fig. 238 d.

exakt gefüllt und das Gewicht der in ihr enthaltenen Flüssigkeit unter Anwendung der nötigen Korrektionen gefunden. Wenn W_2 und W die Gewichte der Flüssigkeit bezw. des Wassers, die die Flasche faßt, sind, so ist

$$s = \frac{W_2}{W} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Um das spezifische Gewicht eines festen Körpers, z. B. einiger Körnchen eines seltenen Metalles oder eines unlöslichen Pulvers, zu bestimmen, wird das Gewicht W_0 des festen Körpers festgestellt, dann wird er in die Flasche gebracht, diese wird mit Wasser gefüllt und das

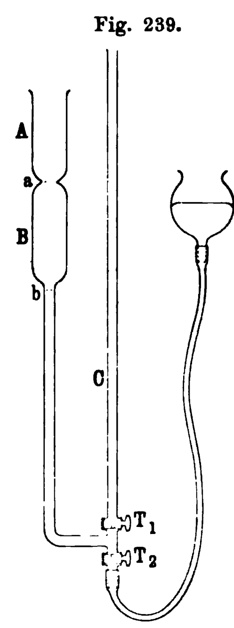
Gewicht W' des gesamten Inhaltes gefunden. Das Gewicht des Wassers mitsamt der festen Substanz in der Flasche ist jetzt $W' - W_0$. Das Gewicht eines dem festen Körper gleichen Volumens Wasser ist daher $W - (W' - W_0) = W + W_0 - W'$. Somit ist

$$s = \frac{W_0}{W + W_0 - W'} \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

426. Volumenometer. Das Volumen eines Körpers und daraus sein spezifisches Gewicht kann mit Hilfe eines Volumenometers oder, wie es auch manchmal heißt, eines Stereometers festgestellt werden. Es ist von einem französischen Offizier namens Say zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes des Schießpulvers erfunden worden.

Eine Form des Instrumentes ist in Fig. 239 dargestellt. AB sind zwei Teile eines durch einen kurzen Hals zusammenhängenden Gefäßes. Der untere Teil B setzt sich fort in dem einen Schenkel einer U-Röhre, deren anderer Schenkel mit zwei Zapfhähnen, einem über, einem unter der Verbindungsstelle, versehen ist. Das untere Ende des zweiten Schenkels C kann frei bleiben oder auch an ein biegsames Rohr angeschlossen werden, das mit einem Quecksilber enthaltenden Bassin verbunden ist, durch welches Quecksilber bis zu jedem beliebigen Stande in der U-Röhre gehoben werden kann. Der obere Rand des Gefäßes A ist so geschliffen, daß eine eingefettete Glasplatte, die man darauf schiebt, es luftdicht verschließt.

Fig. 239.



Das Instrument wird zunächst folgendermaßen kalibriert. Das untere Ende des Schenkels C wird frei gelassen, der Zapfhahn T_2 ist geschlossen, der andere geöffnet. Dann wird in die Öffnung von C Quecksilber eingegossen, bis es zum oberen Rande des Gefäßes A gestiegen ist, das darauf mit der Glasplatte geschlossen wird', wobei das Miteinschließen von Luft streng zu vermeiden ist. Dann wird T_1 geschlossen und T_2 geöffnet und das bis zur Marke a aus A ausgelaufene Quecksilber gewogen. Dies ergibt das Volumen von A, es sei V_1 genannt. Dann wird das Quecksilber bis zur Marke b herausgelassen und gewogen und ergibt so das Volumen V_2 von B.

Bei einer Bestimmung mit dem Instrumente wird das bewegliche Gefäß aus praktischen Gründen angeschlossen, obgleich es nicht von wesentlicher Wichtigkeit ist, und das Quecksilber wird auf dem Niveau von a gehalten, während beide Röhrenenden oben offen sind. Dann wird die Platte über A geschoben und das Bassin so weit tiefer gestellt,

bis der Spiegel des Quecksilbers auf b gefallen ist. Dadurch wird der Druck der in AB eingeschlossenen Luft um so viel unter Atmosphärendruck verringert, als der vertikale Abstand der Höhe der Quecksilbersäule in C von b anzeigt. Diese Höhe sei h, dann gilt, wenn der Druck in Quecksilberhöhe berechnet wird und H die Höhe der Barometersäule ist, für den Druck in $AB\ H - h$. Dann wird das Quecksilber wieder auf a gebracht bei geöffnetem A; alsdann wird der Körper, dessen Volumen bestimmt werden soll, in A gebracht, die Platte wieder aufgelegt und nochmals das Bassin gesenkt, bis der Spiegel des Quecksilbers im linken Rohr auf b sinkt. Jetzt wird der vertikale Abstand h' der Säule in C von b abgelesen.

Die Berechnung des Volumens v des Körpers wird alsdann folgendermaßen ausgeführt: Nach dem Boyleschen Luftdruckgesetze (§ 431) ergibt sich nach der ersten Bestimmung des Drucks:

$$\frac{H - h}{H} = \frac{V_1}{V_1 + V_2},$$

und nach der zweiten:

$$\frac{H - h'}{H} = \frac{V_1 - v}{V_1 + V_2 - v}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich:

$$v = \frac{h' - h}{h'} (V_1 + V_2) = \frac{h' - h}{h'} \frac{H}{h} V_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Wenn man so v gefunden hat und nun noch das Gewicht W des Körpers feststellt, so findet man ohne weiteres die Dichte:

$$\varrho = \frac{W}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Selbstverständlich ist es nötig, daß h und h' groß genug sind, um genau bestimmt werden zu können.

Der Apparat neigt zu Ungenauigkeiten infolge der Feuchtigkeit der Luft, Undichte der Platte und Änderung der Temperatur.

Ändert sich der Luftdruck, so muß man das Barometer ablesen, wenn das Quecksilber bei a steht und wenn h und h' beobachtet werden, und die gefundenen Werte in einer Formel verwenden, die ohne Annahme konstanten Hs gebildet ist, um Irrtümer aus dieser Quelle zu vermeiden.

---

427. Wattsches Hydrometer. Die spezifischen Gewichte von Flüssigkeiten können durch einen von James Watt erfundenen, in Fig. 240 (a. f. S.) angegebenen Apparat verglichen werden. In zwei die zu vergleichenden Flüssigkeiten enthaltenden Gläsern stehen zwei Glasröhren, A und B, die unten offen und oben durch ein gebogenes Rohr

verbunden sind, an dem ein Röhrchen T angebracht ist, durch das man die Luft aus beiden Röhren absaugen kann. Das Röhrchen kann, wenn nötig, durch einen Quetschhahn an einem Stückchen Gummischlauch, das das Ende von T bildet, geschlossen werden.

Wenn durch T die Luft abgesaugt wird, steigen die Flüssigkeiten in den Röhren über den Stand in den Gläsern hinaus. Die beiden Höhen über diesen Spiegeln in A und B seien h und h'; P möge den Atmosphärendruck, p den Druck in dem gebogenen Röhrenstück über den Säulen (unter Vernachlässigung der Druckdifferenz in der Luft aus der Niveauverschiedenheit in den Säulen) und ϱ und ϱ' die Dichten der Flüssigkeiten bezeichnen. Dann ist

$$P - p = g\varrho h = g\varrho' h',$$

so daß sich ergibt:

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{h'}{h} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

d. h., die spezifischen Gewichte verhalten sich umgekehrt wie die Steighöhen.

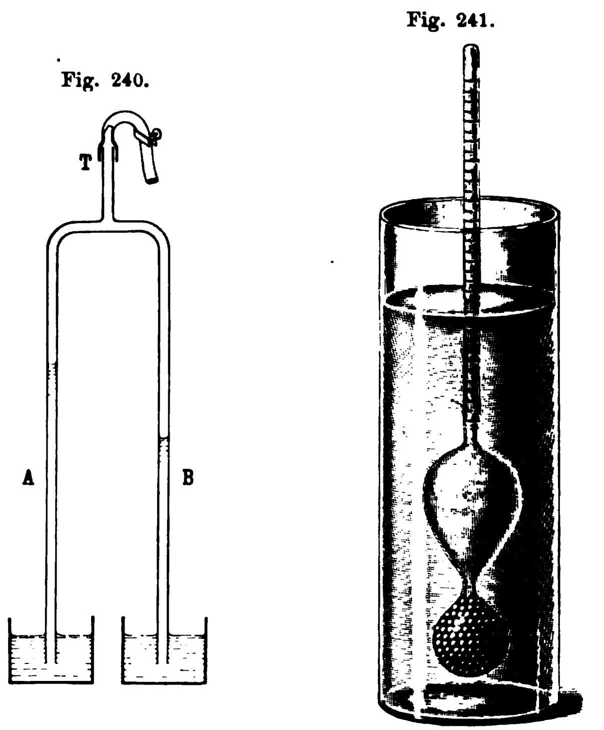


Fig. 240.

Fig. 241.

428. Spezifisches Gewicht von Flüssigkeiten. Hydrometer von wechselnder Immersion. Graduierung. Das spezifische Ge-

wicht einer Flüssigkeit kann durch Feststellung des scheinbaren Gewichtsverlustes eines eingetauchten Körpers von bekanntem Volumen festgestellt werden. Beträgt der Verlust w g und das Volumen des Körpers V ccm, so ist das gesuchte spezifische Gewicht w/V.

Wenn keine große Genauigkeit erfordert wird, bestimmt man die spezifischen Gewichte der Flüssigkeiten durch Hydrometer. Es gibt deren zwei Arten, nämlich solche mit veränderlicher und solche mit konstanter Immersion. Ein Hydrometer mit wechselnder Immersion (Fig. 241) besteht aus einem hohlen Körper an einer gleichmäßig graduierten dünnen Stange. Der untere Teil des Hohlkörpers wird mit Schrot oder Quecksilber so belastet, daß das Ganze in der betreffenden Flüssigkeit mit senkrecht stehender Stange schwimmt. Die freie Oberfläche der Flüssigkeit reicht bis zu einem bestimmten Grade der Stange, und da der Stab von kleinem Querschnitte ist, ist das Instrument annähernd ein völlig eingetauchter Körper und unterliegt annähernd den gleichen Stabilitätsbedingungen.

Es ist klar, daß der in die freie Oberfläche fallende Punkt des Stabes um so tiefer liegen wird, je größer das spezifische Gewicht der Flüssigkeit ist, so daß die Lage dieses Punktes genügt, um das spezifische Gewicht einer Flüssigkeit, in die das Hydrometer getaucht wird, zu bestimmen. Das spezifische Gewicht kann gefunden werden aus der Kenntnis des Volumens des Hohlkörpers im Instrumente bis zu irgend einem Punkte des Stabes, des Gewichtes des Instrumentes und der Dicke des Stabes. Diese Größen können folgendermaßen bestimmt werden: Zuerst wird das Instrument gewogen; dann wird es in eine Flüssigkeit getaucht, deren spezifisches Gewicht man auf andere Weise genau kennt. Der mit der freien Oberfläche zusammenfallende Querschnitt wird auf dem Stabe verzeichnet. Das Volumen des Instrumentes bis zu diesem Zeichen ist gleich dem Flüssigkeitsvolumen vom Gewichte des Hydrometers, und dieses Volumen kann aus dem schon bekannten Gewichte des Instrumentes und dem spezifischen Gewichte der Flüssigkeit festgestellt werden.

Der Querschnitt des Stabes kann entweder durch Ausmessung des Durchmessers an verschiedenen Stellen mit Hilfe einer Meßschraube oder eines Dickenmessers (s. Kap. XVI) oder dadurch gefunden werden, daß man das Instrument in eine zweite Flüssigkeit von ebenfalls bekanntem spezifischen Gewicht bringt. In diesem letzteren Falle wird das Instrument bis zu einem anderen Querschnitt des Stabes einsinken, und es ist, wenn V das in die erste Flüssigkeit eingesunkene Volumen, $V + v$ das in die zweite Flüssigkeit eingesunkene Volumen ist und s und s' die spezifischen Gewichte der beiden Flüssigkeiten sind, die Volumendifferenz offenbar gleich mit

$$V \frac{s - s'}{s'}.$$

Wenn die Stablänge l zwischen den beiden Querschnitten ausgemessen

ist, so ist der Querschnitt v/l, so daß bei bekanntem Stabquerschnitt das Volumen jedes Stabstückes natürlich ebenfalls bekannt ist.

Um das Instrument zu graduieren, geht man folgendermaßen vor. Zunächst stellt man das spezifische Gewicht fest, das einem Strich, der als unterster Punkt der Stange angesehen wird, entspricht; zu diesem Zwecke wird das Volumen des Instrumentes bis zu diesem Querschnitte berechnet. Das spezifische Gewicht einer Flüssigkeit, in der das Instrument bis zu diesem Striche steht, ist offenbar $(W/V\varrho_w)$, wo W das Gewicht, V das Volumen des Instrumentes (ohne Stab) und ϱ_w der — je nach der Temperatur von 1 etwas abweichende — Zahlenwert der Dichte des Wassers ist.

Ferner ist das spezifische Gewicht einer Flüssigkeit, in der das Instrument in einer Höhe x über dem untersten Striche steht:

$$\frac{W}{(V + xc)\varrho_w},$$

wo c der Querschnitt des Stabes ist. Nun sei V gleich lc, so daß l gewissermaßen die Länge eines Stabes ist, welcher V an Volumen gleich wäre. Dann ist das spezifische Gewicht dieser Flüssigkeit gleich

$$\frac{W}{(l + x)c\varrho_w}.$$

Bezeichnet man dieses x zugehörige spezifische Gewicht mit y, so hat man die Gleichung

$$(l + x)\, y = \frac{W}{c\varrho_w}.$$

Legt man dann von einem Anfangspunkte O in der x-Axe eine Strecke $l + x$ zurück und von dem so gefundenen Punkte und senkrecht zu jener Strecke eine andere Strecke

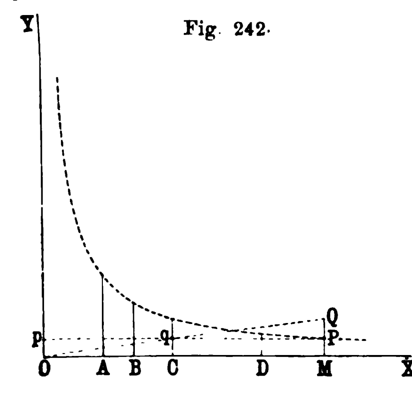


Fig. 242.

$$y = \frac{W}{(l + x)c\varrho_w}$$

und führt dies für verschiedene Werte von x aus, so erhält man eine Reihe von Punkten, die eine Kurve bilden. Die Ordinaten dieser Kurve sind die spezifischen Gewichte der den verschiedenen Werten von x zugehörigen Flüssigkeiten. Die Kurve ist offenbar eine gleichseitige Hyperbel, auf ihre Asymptoten als Koordinatenaxen bezogen, und in Fig. 242 abgebildet. Es ist also nur nötig, eine gleichseitige Hyperbel für den konstanten Parameter $(W/c\varrho_w)$ zu zeichnen, dann hat man die vollständige Graduierung des Instrumentes.

Es werden Werte von y gewählt, die durch einfache Zahlen ausgedrückt sind und in arithmetischer Progression aufeinander folgen; die ihnen entsprechenden Punkte werden durch Querlinien auf der Skala längs des Stabes vermerkt. Wie aus der Kurve zu ersehen ist, sind die Zwischenräume AB, BC, CD zwischen den in arithmetischer Progression vorschreitende y-Werte darstellenden Linien desto kleiner, je kleiner die Werte von x sind, d. h. je größer das spezifische Gewicht ist. Daher wird die Gradteilung des Stabes nach der Spitze des Instrumentes zu immer weiter.

OM stellt l + der Stangenlänge vom untersten bis zum obersten Strich dar; die Ordinate MP bei M ist das kleinste spezifische Gewicht, das das Instrument noch angibt. Um den Punkt auf dem Stabe für irgend ein durch das Instrument meßbares spezifisches Gewicht zu finden, kann man sich folgender Konstruktion bedienen. Von P wird eine Linie Pp parallel mit OM gezogen. Längs MP wird das spezifische Gewicht, dessen Punkt ermittelt werden soll, abgetragen, es sei MQ. OQ wird verbunden, so daß es Pp in q schneidet, und die Ordinate durch q trifft OX in C. Dann ist MC die Entfernung des Punktes vom obersten Teilstrich des Hydrometers.

Man könnte ein Instrument von jeder gewünschten Spielweite machen, indem man den Stab genügend lang machte; es würde aber sehr unhandlich sein, und man ordnet daher lieber eine Reihe von Instrumenten durch Veränderung des Ballastes und des Hohlkörpers so an, daß die Gradreihe eines Stabes dort unten anfängt, wo die des vorigen oben aufgehört hatte.

Bei dem häufig benutzten „Twaddellschen Hydrometer“ sind die an den Teilstrichen des Stabes verzeichneten Zahlen nicht die diesen Strichen entsprechenden spezifischen Gewichte selbst; wenn n eine der Zahlen ist, so ist das betreffende spezifische Gewicht: $1 + 5\,n/1000$ oder $1 + n/200$. Bei den meisten Typen jedoch, insbesondere bei den weitverbreiteten Aerometern und Alkoholometern, liest man unmittelbar das spezifische Gewicht ab.

429. Hydrometer mit konstanter Immersion. Nicholsonsches Hydrometer. Ein Hydrometer mit konstanter Immersion besteht aus einem Hohlkörper mit feinem Stabe nach oben, der, um Stabilität zu haben, unten belastet ist, aber oben am Stabe eine Wagschale zur Aufnahme von Gewichten trägt. Auf dem Stäbchen ist ein einziger Strich verzeichnet, bis zu dem das Instrument in alle Flüssigkeiten eingesenkt wird unter Benutzung von Gewichten, die oben in die Wagschale gelegt werden (s. Fig. 243, a. f. S.).

Wenn W_0 das Gewicht des Hydrometers und W_1 das in der Wagschale nötige Gewicht ist, um das Instrument bis zum Strich in Wasser einzusenken, so ist das Gewicht des in diesem Falle verdrängten Wassers $W_0 + W_1$.

Nun sei W_2 das Gewicht, das in die Wagschale gelegt werden muß, um das Hydrometer bis zum Strich in eine Flüssigkeit einzusenken, deren spezifisches Gewicht bestimmt werden soll. Das Gewicht der durch das Hydrometer verdrängten Flüssigkeit ist $W_0 + W_2$. Folglich ist, wenn s das spezifische Gewicht ist:

$$s = \frac{W_0 + W_2}{W_0 + W_1} \quad \text{. . . . .} \quad (33)$$

Wie man sieht, ist das Instrument bis zu einer gewissen Grenze

$$s = \frac{W_0}{W_0 + W_1}$$

auch auf Flüssigkeiten anwendbar, die spezifisch leichter sind als Wasser.

Es ist auch tunlich, mit diesem Hydrometer das Gewicht eines nicht zu schweren Körpers annähernd zu bestimmen; man legt ihn in die obere Wagschale unter Hinzufügung von Ergänzungsgewichten, um das Instrument bis zum Strich einzusenken. Dann wird der Körper durch Gewichte ersetzt, die die gleiche Wirkung haben.

Fig. 243.



Beim Nicholsonschen Hydrometer wird dem eben beschriebenen Instrumente noch eine Wagschale am unteren Ende beigefügt, mit deren Hilfe man das spezifische Gewicht eines nach der soeben besprochenen Art gewogenen Körpers bestimmen kann. Der Körper wird, nachdem er in der oberen Wagschale gewogen worden ist, in die untere gebracht, und das in der oberen Wagschale notwendig gewordene Ergänzungsgewicht, um das Instrument wiederum bis zum Strich einzutauchen, wird hinzugefügt.

Das Gewicht des Instrumentes sei W_0, das des Körpers W und die notwendigen Ergänzungsgewichte für den Körper in der oberen und in der unteren Wagschale seien W_1 und W_2. Das Gewicht des im ersten Falle verdrängten Wasssers ist $W_0 + W + W_1$, im zweiten ist es $W_0 + W_2 + W$.

Das Gewicht des im zweiten Falle von dem Körper verdrängten Wassers ist demnach $(W_0 + W_2 + W) - (W_0 + W + W_1) = W_2 - W_1$. Das spezifische Gewicht des Körpers ist daher

$$s = \frac{W}{W_2 - W_1} \quad \text{. . . . .} \quad (34)$$

Die Empfindlichkeit des Nicholsonschen Hydrometers ist um so größer, je dünner der Stab an der Marke ist, die so angebracht ist, daß sie an der Flüssigkeitsoberfläche steht. Denn offenbar wird dann jedes Ergänzungsgewicht, das in die Wagschale gelegt oder herausgenommen wird, ein heftiges Fallen oder Steigen des Instrumentes ver-

ursachen, da das einsinkende oder auftauchende Volumen gleich dem Querschnitt des Stäbchens mal dem in Frage stehenden Fallen oder Steigen ist. Die zu große Dicke des Stabes ist bei vielen der üblichen Instrumente geradezu zweckwidrig. Ein vom Verfasser konstruiertes Instrument besteht nur aus Glas und Platin (außer der oberen Wagschale) und hat ein Stäbchen von nur 1 mm Durchmesser.

Das kapillare Ansteigen des Wassers um das Stäbchen des Hydrometers erzeugt eine Kraft nach unten; der von ihr ausgehende Fehler wird dadurch äußerst verkleinert, daß man den Stab so klein wie möglich macht.

430. Periode der vertikalen Schwingungen eines Hydrometers. Die vertikale Schwingung eines solchen Hydrometers ist leicht zu untersuchen, wenn die Bewegung der Flüssigkeit vernachlässigt wird. Das Instrument, das mit der Marke in Oberflächenhöhe schwimmt, möge um eine weitere Strecke x eingesenkt werden. Das neu eintauchende Volumen ist xc, wenn c der Querschnitt ist. Die nach oben wirkende Kraft ist jetzt in absoluten Einheiten $(W_0 + \varrho xc)g$, wenn ϱ die Dichte der Flüssigkeit ist, und diese Kraft ergibt über die Aufhebung der Schwerkraft hinaus eine beschleunigende Kraft nach oben ϱxcg. Die Beschleunigung nach oben ist also $\varrho xcg / W_0$. Folglich ergibt sich als Schwingungsperiode T:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{W_0}{\varrho c g}} \quad \text{. . . . . (35)}$$

Die Länge des äquivalenten einfachen Pendels ist also $W/(\varrho c)$ und desto größer, je kleiner c und je kleiner ϱ ist. Ein in diesem Sinne sehr empfindliches Nicholsonsches Hydrometer wurde von Milne und Gray zu Beobachtungen der vertikalen Bewegungen des Erdbodens bei Erdbeben benutzt. Da das Instrument eine sehr lange Schwingungsperiode hat, reagiert es nicht auf die schnell wechselnden vertikalen Bewegungen seiner Unterlage und bildet einen feststehenden Punkt, auf den diese Bewegungen bezogen und so beobachtet werden können.

---

431. Druck in Gasen (Boylesches Gesetz). Ein Gas ist, wie wir gesehen haben, ein Fluidum, das sich in jedem Raume, der sich ihm darbietet, verbreitet, selbst wenn dieser Raum schon von einem anderen Gas erfüllt ist. Auch strömen zwei Mengen von demselben Gas tatsächlich ineinander. Es stellt sich indessen ein Gleichgewichtszustand her, in welchem Druckänderungen an allen Stellen im Gas, das aber den Elementargesetzen des Drucks in einer unter der Wirkung der Schwere stehenden Flüssigkeit unterworfen ist, sich gegenseitig ausgleichen.

Für die ausführliche Erörterung der Gasgesetze mit Einschluß der

Diffusionserscheinungen, insofern sie Begriff und Messung der Temperatur enthalten, muß der Leser auf den zweiten Band verwiesen werden. Wir müssen uns hier begnügen, die Lehre vom Gasdruck unter der Bedingung der zeitlichen Konstanz und räumlichen Gleichmäßigkeit der Temperatur, ferner unter der Bedingung der Nichtübertragung der Wärme kurz zu behandeln, wobei für den letzterwähnten Fall die Beziehung zwischen Druck und Volumen vorgreifend als bekannt angenommen werden soll.

Es wurde oben § 426 das Boylesche Gesetz vorausgesetzt, welches besagt, daß bei konstant erhaltener Temperatur der Druck in einem Gas sich umgekehrt wie das Volumen verhält, das es einnimmt. Dieses Gesetz wurde von dem Engländer Robert Boyle und bald darauf von dem Franzosen Mariotte aufgefunden und heißt nach ihnen Boylesches oder Mariottesches Gesetz. Die Beschreibung, die Boyle von seinem bezüglichen Versuche macht, möge hier wiedergegeben werden. Vorauszuschicken ist, daß man damals die Frage erörterte, ob das Stehen des Quecksilbers im Barometer oder, wie man damals sagte, in der Torricellischen Röhre eine Folge des Druckes der atmosphärischen Luft wäre. Die Herstellung der Torricellischen Röhre geschah auf demselben Wege, auf dem man bis zum heutigen Tage die Quecksilberbarometer herstellt.

Fig. 244.



Eine reine Glasröhre von etwa 3 Fuß oder 90 bis 100 cm Länge und über $^3/_8$ Zoll bezw. 5 mm innerem Durchmesser wird an einem Ende zugeschmolzen. Dann wird sie mit dem geschlossenen Ende nach unten, bis zu etwa ein Zoll unter dem oberen Ende mit Quecksilber gefüllt und, indem das obere Ende mit dem Finger zugehalten wird, gestürzt. Die Luftblase aus dem leer gebliebenen Raume läuft nach oben unter Mitnahme der meisten der kleinen Luftblasen von den Röhrenwänden. Dann wird die Röhre zurückgeneigt, und die Luft kehrt nach dem offenen Ende zurück, indem sie immer weiter das Quecksilber von darin enthaltener Luft befreit. Dies wird zwei- oder dreimal wiederholt, dann wird der leere Raum mit Quecksilber gefüllt, der Finger gegen das offene Ende gedrückt, die Röhre umgestürzt und das offene Ende, ehe der Finger weggezogen ist, in ein offenes Gefäß mit Quecksilber unter die Oberfläche eingetaucht. Dann zeigt sich, daß die Quecksilbersäule zwar ein Stück herunterfällt, daß aber ihr oberes Ende in einer Höhe von ungefähr 30 Zoll oder 76 cm, etwas mehr oder weniger, über dem Stande des Quecksilbers in dem offenen Gefäße stehen bleibt (Fig. 244).

Die Ausführung des Instrumentes kann vervollkommnet werden, indem man das Quecksilber in der Röhre kocht, um die Luft auszutreiben; dies muß aber äußerst vorsichtig gemacht werden. Zuerst wird nur 2 bis 3 Zoll hoch Quecksilber eingefüllt, dann wird mittels

einer Lampe am unteren Ende Wärme zugeführt, während die Röhre in geneigter Lage gehalten wird. Man läßt zuerst das Quecksilber am Grunde kochen und treibt Quecksilberdampf und Luft heraus, dann stellt man die Lampe etwas höher, so daß das Quecksilber weiter oben kocht u. s. w. bis zu $^{3}/_{4}$ Zoll von der Oberfläche hinauf. Um Oxydation des Quecksilbers zu vermeiden, darf es nicht an der Oberfläche kochen. Dann werden wieder ein paar Zoll nachgefüllt, und das Kochen wird weitergeführt, bis die Röhre fast ganz gefüllt ist. Nachdem man das Quecksilber sich hat in Ruhe abkühlen lassen, wird die Röhre aufgefüllt und, wie beschrieben, verkehrt in das offene Gefäß gestellt.

Daß diese Säule durch den Luftdruck gehalten würde, war von Torricelli behauptet und von Pascal bewiesen worden, der im Jahre 1648 ein Barometer auf einen 30 m hohen Turm in Paris trug und dabei an der Höhe der Säule eine Abnahme von 3 mm konstatierte. Pascal war es auch, der das im selben Jahre vorgenommene Experiment anregte, daß ein Quecksilberbarometer auf einen Berg, den Puy de Dôme, getragen wurde, wobei man beobachtete, daß in dem Maße, in dem mit der Erhebung der Druck abnahm, auch die Höhe der Säule geringer wurde.

Fig. 245.

432. Boylesches Experiment über die „Spannkraft der Luft". Eine ausführliche Erörterung des barometrischen Prinzips und verschiedener Barometerformen wird weiter unten gegeben werden. Hier folgt Boyles eigener Bericht über seine wichtigen Experimente „in betreff des Maßes der Spannkraft zusammengepreßter und ausgedehnter Luft".

„Wir nahmen alsdann ein langes Glasrohr, das durch eine geschickte Hand mit Hilfe einer Lampe derart am Ende gekrümmt worden war, daß der nach oben gewendete Teil dem übrigen Teile des Rohres fast parallel war; nachdem die Öffnung dieses kürzeren Armes des Hebers (wenn ich das ganze Instrument so nennen darf) hermetisch versiegelt war, wurden beide Schenkel in Zolle eingeteilt (deren jeder wiederum in acht Teile geteilt wurde) durch zwei gerade Streifen Papier, die, mit diesen Einteilungen versehen, sorgfältig der Länge nach auf sie aufgeklebt wurden. Dann, nachdem wir so viel Quecksilber eingefüllt hatten, wie notwendig war, den Bogen oder gebogenen Teil des Hebers zu füllen, so daß das Quecksilberniveau in dem einen Arm gerade das untere Ende des Papierstreifens und im anderen Arm genau dieselbe Höhe oder horizontale Linie erreichen konnte, trugen wir Sorge durch häufiges Neigen des Rohrs, so daß die Luft frei an den Seiten des Quecksilbers vorbei von einem Arme in den anderen gelangen konnte (ich sage wir trugen Sorge), daß die schließlich in dem kürzeren Zylinder eingeschlossene Luft von gleicher Dichte mit der

31*

übrigen darum herum befindlichen Luft sein möchte. Darauf begannen wir Quecksilber in den längeren Heberarm einzufüllen, welches, indem es durch sein Gewicht das im kürzeren Arm befindliche heraufdrückte, nach und nach die in ihm eingeschlossene Luft zusammenpreßte; und während wir fortfuhren, Quecksilber einzugießen, bis die Luft im kürzeren Arm durch Kondensation auf den halben Raum, den sie vorher eingenommen (ich sage eingenommen, nicht ausgefüllt) hatte, reduziert war, warfen wir den Blick auf den längeren Arm des Glases und bemerkten nicht ohne Freude und Genugtuung, daß das Quecksilber in diesem längeren Teile des Rohres um 29 Zoll höher stand als im anderen. Nun wird jeder, der auf unsere Lehre achtgibt, leicht erkennen, daß die Beobachtung mit unserer Annahme übereinstimmt und sie bestätigt; und Herrn Pascals und unserer englischen Freunde Experimente tun dar, daß, je größer das Gewicht ist, das auf der Luft lastet, desto heftiger ihr Ausbreitungsbestreben und folglich ihre Widerstandskraft ist (wie auch andere Federn desto stärker sind, mit je größeren Gewichten sie belastet werden). Denn mit Rücksicht hierauf wird der Versuch von guter Übereinstimmung mit der Hypothese erscheinen, daß, sowie in Übereinstimmung mit ihr die Luft in jenem Grade von Dichtigkeit und entsprechender Widerstandskraft, zu der das Gewicht der aufliegenden Atmosphäre sie gebracht hatte, imstande war, den Druck eines Quecksilberzylinders von ungefähr 29 Zoll Quecksilber aufzuwiegen und ihm zu widerstehen, wie uns das Torricellische Experiment lehrt; so hier dieselbe Luft, wenn sie zu ungefähr dem doppelten Dichtigkeitsgrade, den sie vorher hatte, gebracht wird, eine doppelt so große Spannkraft als vorher erhält; wie dadurch zur Erscheinung kommt, daß sie fähig wird, einen Zylinder von 29 Zoll in der längeren Röhre mitsamt dem Gewichte des Luftzylinders, der auf diesen 29 Zoll Quecksilber lastete, auszuhalten oder ihm Widerstand zu leisten, und also, wie wir eben aus dem Torricellischen Experiment schlossen, ihnen äquivalent war.

„Wir wurden durch zufälliges Zerbrechen des Rohres damals an der Fortsetzung der Versuche verhindert. Da aber ein exaktes Experiment dieser Art von großer Wichtigkeit für die Lehre von der Spannkraft der Luft sein würde und bis jetzt (soviel ich weiß) noch von niemandem gemacht worden ist, weil es auch heikler, als man denkt, zu machen ist in Ansehung der Schwierigkeit sowohl der Beschaffung zweckdienlicher gekrümmter Röhren, als auch richtiger Schätzung der wahren Stelle der überragenden Quecksilberoberfläche; so vermute ich, es wird dem Leser nicht unwillkommen sein, zu erfahren, daß nach einigen anderen Versuchen, deren einer mit einem Rohr unternommen wurde, dessen längerer Arm senkrecht, dessen anderer, die Luft enthaltender aber horizontal war, wir uns zuletzt ein Rohr von der in der Zeichnung dargelegten Form verschafften; welches Rohr, obgleich von ziemlicher Dicke, so lang war, daß der Zylinder, aus dem der kürzere

Arm bestand, noch einen Papierstreifen zuließ, der vorher in 12 Zolle und ihre Viertel eingeteilt worden war, während der andere Arm einen anderen Streifen Papier von mehreren Fuß Länge und derselben Einteilung zuließ. Nachdem nun so viel Quecksilber eingegossen war, um den gebogenen Teil des Glases zu füllen, so daß, wie wir vor kurzem sagten, seine Oberfläche in jedem Arm bei derselben horizontalen Linie stand, wurde mehr und mehr Quecksilber in das längere Rohr eingefüllt; und indem aufmerksam beobachtet wurde, wie hoch das Quecksilber in dem längeren Rohr gestiegen war, wenn es zu einem neuen Teilstrich in dem kürzeren aufgestiegen erschien, so ergaben die verschiedenen Beobachtungen, die so der Reihe nach gemacht wurden, die folgende Tabelle:

Eine Tabelle der Luftverdichtung.

A.	A.	B.	C.	D.	E.
48	12	00		$29\frac{2}{16}$	$29\frac{2}{16}$
46	$11\frac{1}{2}$	$01\frac{7}{16}$		$33\frac{6}{16}$	$33\frac{6}{16}$
44	11	$02\frac{13}{16}$		$31\frac{15}{16}$	$31\frac{12}{16}$
42	$10\frac{1}{2}$	$04\frac{6}{16}$		$33\frac{5}{16}$	$33\frac{1}{7}$
40	10	$06\frac{3}{16}$		$35\frac{5}{16}$	35
38	$9\frac{1}{2}$	$07\frac{14}{16}$		37	$36\frac{15}{19}$
36	9	$10\frac{2}{16}$		$39\frac{5}{16}$	$38\frac{7}{8}$
34	$8\frac{1}{2}$	$12\frac{8}{16}$		$41\frac{10}{16}$	$41\frac{2}{17}$
32	8	$15\frac{1}{16}$		$44\frac{3}{16}$	$43\frac{11}{16}$
30	$7\frac{1}{2}$	$17\frac{15}{16}$		$47\frac{1}{16}$	$46\frac{3}{5}$
28	7	$21\frac{3}{16}$		$50\frac{5}{16}$	50
26	$6\frac{1}{2}$	$25\frac{3}{16}$		$54\frac{5}{16}$	$53\frac{10}{13}$
24	6	$29\frac{11}{16}$	$29\frac{1}{8}$	$58\frac{13}{16}$	$58\frac{2}{8}$
23	$5\frac{3}{4}$	$32\frac{3}{16}$		$61\frac{5}{16}$	$60\frac{18}{23}$
22	$5\frac{1}{2}$	$34\frac{15}{16}$		$64\frac{1}{16}$	$63\frac{6}{11}$
21	$5\frac{1}{4}$	$37\frac{15}{16}$		$67\frac{1}{16}$	$66\frac{4}{7}$
20	5	$41\frac{9}{16}$		$70\frac{11}{16}$	70
19	$4\frac{3}{4}$	45		$74\frac{2}{16}$	$73\frac{11}{19}$
18	$4\frac{1}{2}$	$48\frac{12}{16}$		$77\frac{14}{16}$	$77\frac{2}{3}$
17	$4\frac{1}{4}$	$53\frac{11}{16}$		$82\frac{12}{16}$	$82\frac{4}{17}$
16	4	$58\frac{2}{16}$		$87\frac{14}{16}$	$87\frac{3}{8}$
15	$3\frac{3}{4}$	$63\frac{15}{16}$		$93\frac{1}{16}$	$93\frac{1}{5}$
14	$3\frac{1}{2}$	$71\frac{5}{16}$		$100\frac{7}{16}$	$99\frac{6}{7}$
13	$3\frac{1}{4}$	$78\frac{11}{16}$		$107\frac{13}{16}$	$107\frac{7}{13}$
12	3	$88\frac{7}{16}$		$117\frac{9}{16}$	$116\frac{4}{8}$

AA. Die Anzahl gleicher Raumteile in dem kürzeren Arm, die dem gleichen Teil von verschieden ausgedehnter Luft enthielten.

B. Die Höhe des Quecksilberzylinders im längeren Arm, der die Luft in diese Dimensionen zusammendrückte.

C. Die Höhe des Quecksilberzylinders, der den Druck der Atmosphäre aufwog.

D. Die Summe der beiden letzten Reihen B. und C., den durch die eingeschlossene Luft ausgehaltenen Druck darstellend.

E. Die Werte, die dieser Druck nach der Hypothese, wonach Druck und Expansion im Reziprozitätsverhältnis stehen, haben müßte."

Die obige Versuchsreihe liefert nur Drucke, die größer sind als der Atmosphärendruck. Um das Verhalten auch bei kleineren Spannungen zu prüfen, nahm Boyle eine dünne, an beiden Enden offene Röhre, drückte sie vertikal hinunter in ein tiefes Bassin mit Quecksilber, bis sie nur noch etwa einen Zoll weit herausragte, und verschloß das obere

Ende mit Siegellack. Er erhielt auf diese Weise ein Quantum Luft, das unter Atmosphärendruck ungefähr einen Zoll der Röhre füllte. Dann hob er die Röhre auf ein etwas höheres Niveau, so daß die Luft ein größeres Stück der Röhre einnehmen konnte, und bemerkte, daß das Quecksilber in der Röhre höher als im Bassin stieg. Der Luftdruck in der Röhre war dabei nach § 397 gleich dem Atmosphärendruck weniger $g\varrho h$, wo h die Höhe des oberen Endes der Quecksilbersäule in der Röhre über der Quecksilberoberfläche im Bassin und ϱ die Dichte des Quecksilbers war. Daher machte Boyle durch Heben der Röhre in verschiedene Höhen und Messung der Werte von h eine Reihe von Experimenten bei geringerem als Atmosphärendruck, die seine früheren Ergebnisse bestätigten.

Somit erhalten wir das Gesetz: Volumen und Spannung einer gegebenen Luftmasse stehen in umgekehrtem Verhältnisse zueinander, oder anders ausgedrückt: Das Produkt aus Druck und Volumen ist konstant, in Formel:

$$pv = const.$$

Dabei ist aber vorausgesetzt, daß die Temperatur in allen Versuchsfällen dieselbe sei.

Statt des Volumens der gegebenen Gasmasse kann man offenbar auch ihr Reziprokes, die Dichte ϱ einführen und erhält dann

$$\frac{p}{\varrho} = const,$$

d. h. Druck und Dichte eines Gases sind (bei konstanter Temperatur) einander proportional.

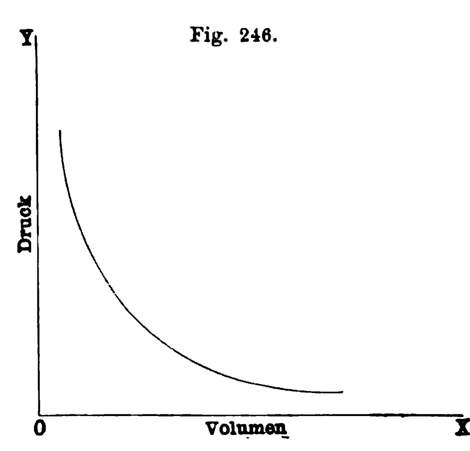
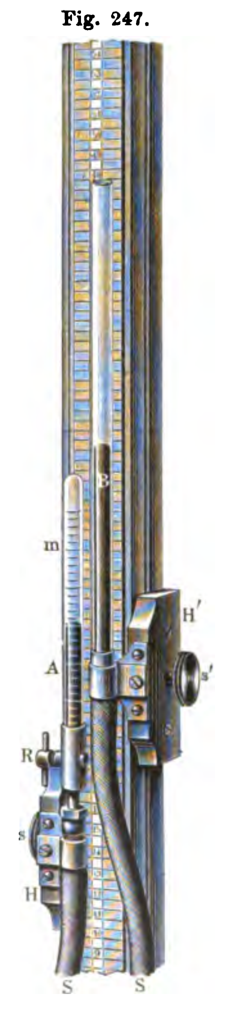


Fig. 246.

Wenn man die Drucke als Ordinaten einer Kurve nimmt, deren Abszissen die entsprechenden Volumina der Luftmasse sind, so wird der Zustand des Gases durch Punkte auf einer gleichseitigen Hyperbel (Figur 246) dargestellt, die deshalb der graphische Ausdruck des Boyleschen Gesetzes ist. Eine Kurve, die so die Beziehung zwischen den Drucken und den korrespondierenden Volumina eines Gases bei konstanter Temperatur zeigt, heißt eine isothermische Kurve oder Isotherme desselben. Sie gilt für eine bestimmte Temperatur, bei einer anderen erhält man eine andere gleichseitige Hyperbel u. s. w.

Die übliche experimentelle Anordnung zum Beweisen des Boyleschen Gesetzes für Drucke sowohl über, als unter Atmosphärendruck ist die in Fig. 247 gegebene. Die Röhre links ist geschlossen und enthält Luft, die rechts ist offen, und sie ist es, welche den Druck mißt. Beide Röhren sind hinsichtlich der Höhe verstellbar, und der der Luft über Atmosphärendruck hinaus erteilte Druck ist gleich der Höhe des Quecksilberspiegels in der rechten Röhre über dem Spiegel in der linken.

Fig. 247.



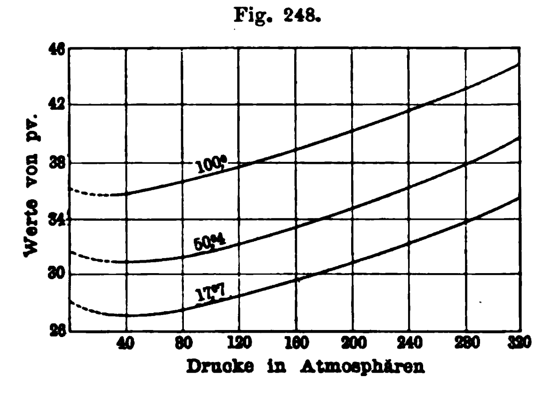
433. Bestätigung des Boyleschen Gesetzes. Experimente von Regnault und Amagat. Die Genauigkeit, mit welcher die Gase dem Boyleschen Gesetze folgen, bildet den Gegenstand einer wichtigen Untersuchung von Regnault und einer späteren von Amagat, der die Regnaultschen Versuche auf eine viel größere Reihe von Drucken ausdehnte.

Es ist wesentlich, daß die zusammengepreßte Luft immer in derselben Temperatur erhalten werde. Dies wurde in den Regnaultschen Experimenten auf das sorgfältigste sicher gestellt durch ein den Raum, worin das Gas komprimiert wurde, umgebendes Wasserbad. Der Apparat war eine Boylesche Röhre, deren kurzer Arm 3 m lang und genau kalibriert worden war; zwei Marken auf ihm gaben Volumina an, die sich wie 1 : 2 verhielten. Der andere Arm war ungefähr 36 m lang und so angebracht, daß er die Anwendung verschiedener Drucke zuließ und ein genaues Maß dieser Drucke gab. Das Rohr war außerdem so konstruiert, daß der Arm, worin das Gas komprimiert wurde, beliebig mit einem Gasreservoir verbunden und mit dem Gas unter jedem beliebigen Druck gefüllt werden konnte. Der Gasraum im Rohr wurde zuerst mit dem Gas unter einem im Reservoir herrschenden Druck, der aufgeschrieben wurde, gefüllt (der erste gewählte Druck war Atmosphärendruck), dann wurde das Gas auf den halben Raum zusammengepreßt und der dazu nötige Druck beobachtet. Alsdann wurde das Rohr mit Gas unter etwa zwei Atmosphären gefüllt und das Volumen wieder unter Beobachtung des Druckes auf etwa die Hälfte des Volumens reduziert. Dasselbe Experiment wurde mit Gas, das anfänglich unter dem Druck von vier Atmosphären stand, gemacht u. s. w.

Diese Methode vermied die Schwierigkeit, Experimente bei sehr hohen Drucken zu machen, wenn man, wie bei Boyles eigener Methode, die ursprünglich unter Atmosphärendruck stehende Luft auf einen so kleinen Raum reduzierte, daß seine Messung mit auch nur entfernter Genauigkeit wenn nicht ganz, so doch nahezu unmöglich wurde.

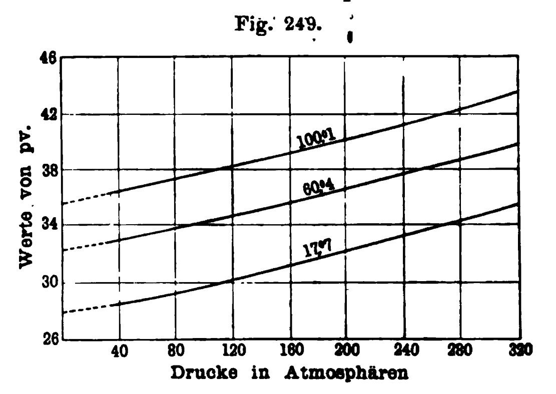
Das allgemeine Ergebnis war, daß das Produkt *pv* für Luft, Stickstoff und Kohlensäure mit steigendem Druck etwas abnahm; d. h.,

Fig. 248.



daß diese Gase bei konstanter Temperatur etwas kompressibler waren, als nach dem Boyleschen Gesetz zu erwarten wäre, während das Gegenteil für Wasserstoff der Fall war. Indessen konnte Regnault keine höheren Drucke als etwa 45 Atmosphären erzielen, und das eben

Fig. 249.



mitgeteilte Ergebnis wurde von Amagat (der mit viel höherem Druck arbeitete) als sehr unvollständig den Tatsachen entsprechend gefunden.

Amagats Apparat war im Prinzip derselbe wie der Regnaultsche. Nur befand sich sein Kompressionsrohr in einem Gang eines Steinkohlenbergwerks, wo natürlich die Temperatur nahezu konstant war, während sein Druckrohr aus Stahl am Schacht der Grube aufstieg und 300 m lang war. Eine Anzahl von Seitenrohren, deren jedes eine

Klappe an sich und eine am Hauptrohr hatte, war derart an der Röhre angebracht, daß der Druck durch Öffnen der Seitenklappe und Schließen der Hauptrohrklappe fixiert werden konnte. Quecksilber wurde mit einer Kraftpumpe heraufgepumpt, bis es zu dem den Druck fixierenden Seitenrohr auslief.

Sorgfältige Untersuchungen wurden zuerst an Stickstoff mit Drucken, die von etwa 30 bis zu 420 Atmosphären aufstiegen, angestellt. Infolge dieser Versuche war es möglich, das Verhalten anderer Gase mit dem des Stickstoffes zu vergleichen, indem man sie Seite an Seite in verschlossenen Röhren, die unter derselben Druckquelle standen, komprimierte, wie es als erster Pouillet getan hatte.

Die allgemeinen Ergebnisse aus den Amagatschen Experimenten sind für Stickstoff und Wasserstoff in den Fig. 248 und 249 gegeben, worin die Ordinaten Werte von pv und die Abszissen Werte des Druckes in Atmosphären sind. Nach dem Boyleschen Gesetz müßten die pv-Kurven horizontal sein, nach Regnaults Versuch müßten sie von links nach rechts fallen. Man sieht aber, daß dieser Abfall beim Stickstoff, z. B. in der Kurve von der Temperatur 17,7° C., schon bei einem Druck von etwa 40 Atmosphären sich in einen Anstieg verwandelt, daß also für höhere Drucke das Gas weniger kompressibel ist, als es nach dem Boyleschen Gesetz sein müßte. Also ist nur bei dem Drucke von 40 Atmosphären, d. h. beim kleinsten Wert von pv, das Boylesche Gesetz genau erfüllt.

Der Punkt, in dem das Boylesche Gesetz zur genauen Erfüllung kommt, tritt, wie man bemerken wird, bei immer geringerem Druck ein, je höher die Temperatur ist, für welche die Kurve gilt.

Ähnliche Resultate wurden für Luft, Kohlensäure, Sumpfgas und Äthylen beobachtet.

Die Abnahme von pv auf ein Minimum und darauf folgende Steigerung mit steigendem Druck zeigt sich sehr auffallend beim Äthylen und der Kohlensäure; es muß aber eine vollständige Erörterung der Kurven für den zweiten Teil vorbehalten bleiben, wo auch ein Bericht über die klassischen Untersuchungen von Andrews über Kohlensäure zu finden sein wird.

Für Wasserstoff waren die Amagatschen Kurven für alle Temperaturen gerade schräge heraufgehende Linien, wie in Fig. 249a, so daß er also geringere Kompressibilität zeigt, als das Boylesche Gesetz verlangt. Beachtenswert ist die große Ähnlichkeit der Wasserstoffkurven mit den Hochdruckteilen der Stickstoffkurven.

Bei hohen Drucken, wo die Kurven für Stickstoff nahezu gerade Linien sind, und für Wasserstoff so weit, als die Beobachtungen überhaupt gehen, ist die Gleichung der Kurven sehr annähernd

$$p(v-b) = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Für die Erfüllung des Boyleschen Gesetzes bei niedrigen Drucken sind keine sehr zuverlässigen Ergebnisse gefunden worden. Bei sehr

niedrigem Druck entsteht eine große Schwierigkeit durch die Kondensation des Gases an den Röhrenwänden. Das allgemeine Ergebnis geht dahin, eine, wenn überhaupt, nur sehr schwache Abweichung vom Boyleschen Gesetz zu erweisen.

434. Daltonsches Gesetz der Gasmischung. Ein anderes das Boylesche einschließendes Gesetz gilt für ein Gemisch von Gasen. Wenn eine Anzahl verschiedener Gase gemeinsam ein bestimmtes Volumen bei einer bestimmten Temperatur einnimmt, so ist der Druck die Summe derjenigen Drucke, welche die Gase ergeben würden, wenn sie einzeln den ganzen Raum bei der gegebenen Temperatur erfüllten. Dieses Gesetz ist zwar nur annähernd richtig, kann aber für alle praktischen Zwecke als genügend angesehen werden. Auch dieses Gesetz wird im zweiten Teil erörtert werden.

435. Isothermen eines Gases. Wenn das Boylesche Gesetz als genau gültig für ein Gas angesehen wird, so wird man, wie in § 432 bemerkt wurde, sehen, daß die sogenannte isothermische Kurve, d. h. diejenige Kurve, welche entsteht, wenn man die Drucke als Ordinaten und die entsprechenden Volumina als Abszissen nimmt, eine gleichseitige Hyperbel ist, deren Asymptoten die Axen des Druckes null und des Volumens null sind. Für verschiedene Temperaturen erhält man verschiedene Kurven; in Wahrheit ist der Parameter c in der Gleichung der Kurve $pv = c$ mit der absoluten Temperatur, (s. zweiten Band) direkt proportional. Fig. 246 zeigt die Form der Kurve. Der Parameter ist das Quadrat der Ordinate desjenigen Punktes, in welchem die Symmetrieaxe, d. h. die den rechten Winkel XOY schneidende Linie, die Kurve schneidet.

436. Lotmaschine. Tiefenmessung. Bei Lord Kelvins Lotmaschine, die jetzt vielfach benutzt wird, um schnelle Tiefenlotungen ausführen zu können, wenn man sich bei nebligem Wetter der Küste nähert, wird eine Röhre, die innen mit Silberchromat bestrichen und am einen Ende geschlossen ist, mit dem offenen Ende nach unten mit dem Senkblei heruntergelassen. Das eindringende Seewasser komprimiert die darin enthaltene Luft und entfärbt bis zu der Höhe, zu der es eingedrungen ist, die Röhre, so daß es auf diese Weise eine Tiefenmessung zurückläßt. Durch Anlegen der Röhre an einen mit geeigneter Graduierung versehenen Maßstab kann man im Augenblick die Tiefen in Fadenlängen ablesen.

Die Graduierung des Stabes liefert ein Beispiel für das Boylesche Gesetz. Anfänglich hat die Luft Atmosphärendruck, und wenn, in Faden ausgedrückt, die Höhe einer Säule von Seewasser, die an ihrer Basis Atmosphärendruck liefert, H ist, so steigert die Senkung bis in eine Tiefe T den Druck im Verhältnis $(H + T)/H$. Wenn l die Länge der Röhre und h die Höhe ist, bis zu der das Seewasser in ihr steigt,

so ist das Verhältnis des anfänglichen zum schließlichen Luftvolumen $l\,(l-h)$. Nach dem Boyleschen Gesetz hat man $(H+T)(l-h)=Hl$, und folglich ist $T=Hh/(l-h)$ die Tiefe in Faden. Um den Maßstab zu graduieren, braucht man nur auf ihm an Punkten in verschiedenen Entfernungen h von dem Ende, an das das offene Röhrenende angelegt werden soll, die entsprechenden Werte von T zu verzeichnen, die durch die Formel $Hh/(l-h)$ gegeben sind. Dies ergibt natürlich die Tiefe der Spitze der Wassersäule in der Röhre, diese ist aber mit einer für alle praktischen Zwecke genügenden Genauigkeit die Tiefe des Wassers bei dem Schiff.

In dieser Darlegung ist die Wirkung der Kapillarität vernachlässigt, sie wird aber bei der Graduierung des Maßstabes berücksichtigt. Selbstverständlich beeinflußt die Kapillarität die Gestalt der Wasseroberfläche in der Röhre und hindert die freie Oberfläche, horizontal zu werden, wenn sich die im Kielwasser des Schiffes folgende Röhre gegen die Vertikale neigt. Immerhin ist die Höhe, bis zu der das Wasser steigt, immer gut bestimmt.

Die Wirkung dieser Röhre ist dieselbe wie die der früher viel zur Untersuchung untergegangener Schiffe oder sonst unter Wasser befindlicher Gegenstände viel benutzten Taucherglocke. Wie die Glocke, die schwer und mit tief liegendem Schwerpunkt konstruiert war, mit der Öffnung nach unten tiefer ins Wasser sank, wurde in den oberen Teil mehr und mehr Luft eingepreßt. Es ist nicht schwierig, den Druck für jede beliebige Tiefe nach dem Boyleschen Gesetz zu berechnen. — Nun wurde aber fortwährend von einem oben befindlichen Boot aus Luft in diesen Raum eingepumpt, um die Atmung des Tauchers zu unterstützen, so daß der Druck nicht notwendig der durch die obige Berechnung für die Lotmaschine gegebene war. Indessen benutzen heutzutage die Taucher fast ausschließlich den Fleußschen Tauchpanzer, eine luftdichte Hülle, in die durch eine Röhre von oben Luft eingepumpt wird. Der Taucher kann daher, soweit die Wirksamkeit der Röhre reicht, sich frei auf dem Wrack oder Meeresgrund herumbewegen.

437. Theorie der Pipette. Ein an beiden Enden offenes Röhrchen wird bis zu einer Tiefe h in eine Flüssigkeit getaucht, dann wird der Finger auf das obere Ende gehalten und das Röhrchen gehoben; die Aufgabe ist, die Länge der in dem Röhrchen gehobenen Säule zu finden. Diese Länge sei x, und l sei die Länge des Röhrchens; der Druck in der darüber befindlichen Luft ist $P-g\varrho x$, wenn P der Atmosphärendruck und ϱ die Dichte der Flüssigkeit ist. Das Volumen der Luft hat im Verhältnis von $l-x$ zu $l-h$ zugenommen. Also hat man nach dem Boyleschen Gesetz

$$(P-g\varrho x)(l-x)=P(l-h),$$

was für x die quadratische Gleichung:

$$g\varrho x^2 - (P + g\varrho l)x + Ph = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

ergibt. Die Lösung des Problems ist die kleinere Wurzel dieser Gleichung.

Dasselbe Prinzip kann zur Erklärung der Wirkung der Pipette herangezogen werden, in welcher man (entweder indem man sie tief genug eintaucht oder durch Saugen am oberen Ende) die Flüssigkeit in einen erweiterten mittleren Teil aufsteigen läßt. In der obigen Lösung ist die Kapillarität vernachlässigt.

438. Barometer. Messung des Luftdrucks. Die Konstruktion des Barometers ist oben § 431 beschrieben worden; in der Praxis wendet man gewöhnlich verschiedene Hilfsmittel zur genauen Bestimmung des Druckes an. Ehe wir darauf eingehen, diese zu besprechen, sei hier eine sehr falsche Erklärung der Wirkung des Barometers erwähnt, die manchmal in populären Vorträgen als gut geeignet für das Verständnis von Laien oder Anfängern gegeben wird. Es wird nämlich behauptet, daß das Gewicht der auf der Quecksilberoberfläche in dem offenen Schenkel bezw. in dem Gefäß außerhalb der Röhre stehenden Luftsäule dem Gewicht der Quecksilbersäule in der Röhre die Wage hält. Die Absurdität dieser sogenannten „Erklärung" springt in die Augen, wenn man bedenkt, daß das Gewicht der Säule von der Beziehung zwischen dem Flächeninhalt der der Luft ausgesetzten Oberfläche und dem Flächeninhalt des Röhrenquerschnitts gänzlich unabhängig ist. Man könnte den Inhalt der Quecksilberoberfläche im offenen Gefäß oder „Bassin" von 1 oder 2 qcm bis zur Größe eines halben Morgens steigern, ohne die Höhe der von ihr getragenen Quecksilbersäule irgend merklich zu ändern, während das Gewicht der unterstützten Luftsäule um gerade so viele Male, als der Inhalt der früheren Oberfläche in dem der neuen enthalten ist, zugenommen hätte. Also ist die Behauptung von dem Gleichgewicht dieser beiden Gewichte gänzlich irrig.

Die Gleichheit besteht natürlich zwischen den hydrostatischen Drucken, d. h. zwischen der Kraft pro Flächeneinheit, die von der Luft auf die freie Quecksilberoberfläche wirkt, und dem Druck im gleichen Niveau im Rohre.

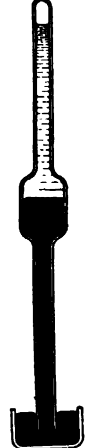
Der Druck in der Atmosphäre ändert sich von Stunde zu Stunde und von Tag zu Tag, weicht aber in allen seinen Fluktuationen (abgesehen von ungewöhnlichen Vorkommnissen) nie um mehr als 5 oder 6 Proz. von seinem mittleren Wert ab. Aber jede Verringerung x der Säulenhöhe bedingt ein Steigen des Quecksilberniveaus im Gefäß bezw. offenen Schenkel vom Betrage xa/A, wo a und A die Querschnittflächen der Säule am oberen Ende und der Quecksilberoberfläche im Gefäß sind. Wenn x von einer Skala am oberen Teil der Röhre abgelesen wird, so ist der wahre Abfall der Höhe der Säule $x(1 + a/A)$. Wenn die Höhe der Säule etwa für die Lage des oberen Säulenendes,

wenn $x = 0$ ist, bekannt ist, so ist die Höhe der Säule nach dem Niveauabfall x gleich $h - x(1 + a/A)$. Die Größe xa/A wird manchmal die Kapazitätskorrektion genannt. Ist x eine Erhöhung, so lautet die Formel natürlich $h + x(1 + a/A$.)

Dadurch, daß man die Gradteilungen im Verhältnis $A/(A + a)$ kürzer macht, als sie in Wahrheit sind, kann der Abfall ohne weiteres am oberen Säulenende von der Skala abgelesen werden. Schiffsbarometer werden in dieser Weise graduiert, und überdies wird ein Stück Rohr mitten zwischen oberem und unterem Ende mit engem Lumen versehen, um zu verhindern, daß das Quecksilber durch die Schwankungen des Schiffes in heftige Schwingungen gerät.

Eine Form des Barometers ist von Huygens vorgeschlagen worden zum Zwecke der Vergrößerung der Bewegungsweite der Spitze der Quecksilbersäule. Das Quecksilber sollte obenauf eine Wassersäule tragen, wie in Fig. 250 gezeigt ist. Das Rohr sollte sich am oberen Ende des Quecksilbers erweitern, und die Spitze der Wassersäule sollte verhältnismäßig eng sein. Eine schwerer bewegliche Flüssigkeit, wie Glycerin oder Schwefelsäure, würde sich besser dafür eignen als Wasser, dessen Dampfdruck über der Säule ganz beträchtlich ist und sich schnell mit der Temperatur ändert.

Fig. 250.



Es sei h die Höhe des Quecksilbers, h' die Höhe der darüber befindlichen Flüssigkeitssäule, ϱ und ϱ' die Dichten der Flüssigkeiten. Wenn dann P der Druck ist, so haben wir in Gravitationseinheiten $P = \varrho h + \varrho' h'$. Der Druck möge sich in P_1 ändern und die Höhen der Säulen in h_1 bezw. h'_1. Dann ist $P_1 = \varrho h_1 + \varrho' h'_1$. Demnach ist

$$P_1 - P = \varrho(h_1 - h) + \varrho'(h'_1 - h').$$

Wenn aber A die Größe der Quecksilberoberfläche, a die der Flüssigkeitsoberfläche ist, so ist (unter Vernachlässigung der Kapazitätskorrektion) $A(h_1 - h) = a(h'_1 - h')$, so daß das Wachstum der Flüssigkeitssäule durch den Ausdruck

$$h'_1 - h' = (h_1 - h)\frac{A}{a}$$

gegeben ist. Die gesamte Steigerung der Höhe der Flüssigkeitssäule ist somit

$$h'_1 - h' + h_1 - h = (h_1 - h)\frac{A + a}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

und der Höhenzuwachs des Quecksilbers ist im Verhältnis $(A + a)/a$ gesteigert.

Die in Fig. 251 (a. f. S.) abgebildete Form des Barometers heißt Heberbarometer. Die Röhre ist, statt in ein Gefäß zu tauchen, unten um- und wieder heraufgebogen; der untere Teil des langen Schenkels ist

zurückgebogen, um zu ermöglichen, daß die oben und unten notwendige Skala in einer Vertikalen liegen.

Für gewöhnlich aber verwendet man als Normalinstrument ein Barometer, in dem der Stand des Quecksilbers im Gefäß in eine in bezug auf das Instrument feste Lage gebracht wird. Eine häufig benutzte Form ist die unter dem Namen des Fortinschen Barometers bekannte. Das Gefäß wird mit nachgiebigem Boden versehen, der durch Vorwärts- oder Rückwärtsdrehen einer Schraube unter dem Instrumente gehoben

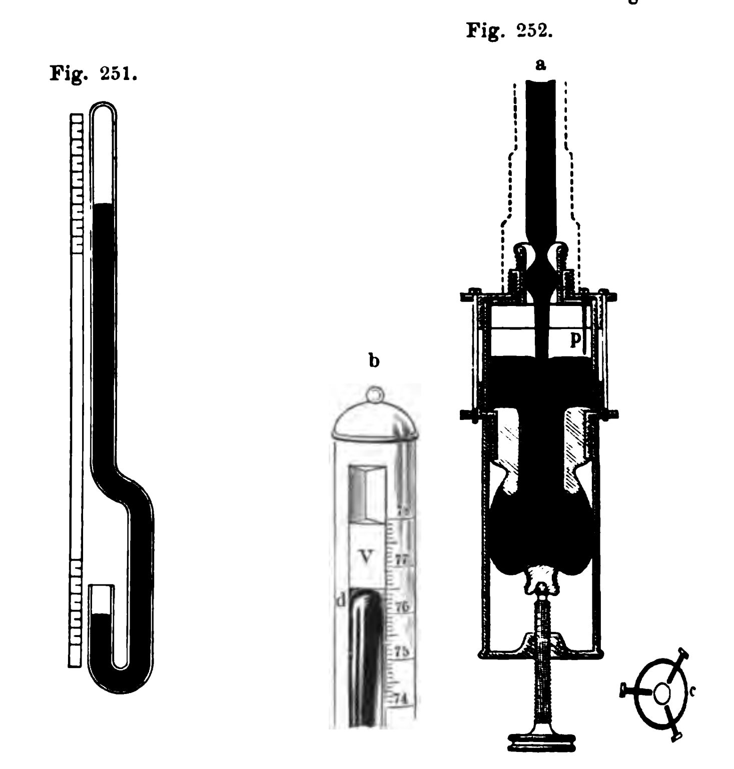


Fig. 251.

Fig. 252.

oder gesenkt werden kann, so daß das Volumen des Gefäßes verkleinert oder vergrößert wird. Ein Metallgehäuse umgibt das Rohr und erweitert sich unten zu einem das Gefäß umgebenden offenen Kasten mit Glaswänden, die die Quecksilberoberfläche sichtbar werden lassen. Die Anordnung des Gefäßes u. s. w. wird man sich nach Fig. 252 vorstellen können.

Aus einem horizontalen Deckel über dem Gefäße ragt eine Elfenbeinspitze p nach unten hervor, welche, wenn das Barometer sich in vertikaler Lage befindet, durch Auf- oder Abbewegen des biegsamen Bodens mit dem Quecksilber zur Berührung gebracht wird. Diese Berührung kann man sehr genau zuwege bringen, indem man das nach

oben gewandte Bild der Elfenbeinspitze in der Quecksilberoberfläche beobachtet und den scheinbaren Spalt zwischen den beiden entgegengesetzten Enden gerade zum Verschwinden bringt.

Die vertikale Lage des Barometers erreicht man durch Aufhängung an einem Ringe, der am besten gleich mit an der Spitze des Metallgehäuses angebracht wird unter gleichzeitiger Beachtung, daß die vertikale Schraube im Boden im Mittelpunkte eines festen horizontalen Ringes *c* unter dem Gefäße zu stehen kommt. Dann können drei horizontale Schrauben in dem Ringe benutzt werden, um das Instrument in seiner Lage festzuklammern. Ein Fenster vorn und eins hinten im Metallgehäuse läßt die Spitze der Quecksilbersäule sichtbar werden.

Der Stand des Quecksilbers wird von einer Skala abgelesen, deren Nullpunkt genau in der so eingestellten Quecksilberoberfläche liegt. Um gleich zahlenmäßig exakt ablesen zu können, wird ein Nonius benutzt, der es ermöglicht, die Teilstriche der Skala wiederum zu teilen; eine Beschreibung hiervon findet man in Kap. XVI. Dieser Nonius ist auf dem Stück *V* (Fig. 252 b) eingegraben, das von einem Rohr getragen wird, welches mittels einer Schraube auf- oder abbewegt werden kann bis in die Lage, worin die Spitze der Quecksilbersäule gerade in gleicher Höhe mit der Vorder- und Hinterecke des Bodens des gleitenden Noniusrohres zu sehen ist, wie bei *d* (Fig. 252 b).

439. Korrektionen des Barometers. Normaler Atmosphärendruck. Die so abgelesene Höhe der Säule erfordert eine Korrektion, um auf diejenige Höhe zurückgeführt zu werden, welche von einem idealen Barometer angezeigt werden würde, das, von Temperatur oder Kapillarität unbeeinflußt, unter einem bestimmten Normalwerte der Gravitation stünde.

Die wichtigsten Korrektionen sind die für die Temperatur. Mit steigender Temperatur dehnt sich das Quecksilber aus, und eine Säule von gegebener Höhe entspricht alsdann einem kleineren Druck; aber das Rohr dehnt sich gleichfalls aus, und folglich wird, da die Graduierung auf dem Rohre steht, die abgelesene Höhe geringer sein als die wirkliche, wenn die Temperatur höher ist als diejenige, für welche die Skala genau richtig ist. Darum ist, wenn die normale Temperatur für Quecksilber und Skala 0° C. und die tatsächliche Temperatur höher ist, eine subtraktive Korrektion für die Ausdehnungswirkung des Quecksilbers und eine additive für die Ausdehnung des Rohres notwendig. Gewöhnlich bezieht man sich auf eine Quecksilbersäule bei der Temperatur des schmelzenden Eises. Die abgelesene Säulenlänge muß auf diejenige umgerechnet werden, welche von einem genauen Maßstabe gewonnen werden würde; ein solcher ist die auf dem Metallgehäuse eingravierte Skala nicht, wenn die Temperatur höher oder niedriger ist als die, bei denen die Grade ihre genau richtigen Längen haben.

Es sei die Temperatur t° C. und die abgelesene Höhe b. Dann

dehnt sich das Quecksilber für 1° Temperaturerhöhung um 0,000181 seines Volumens aus. Die Dichte des Quecksilbers wird daher

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + 0{,}000181\,t}$$

werden, wenn ϱ_0 die Dichte bei 0° C. ist, und es wird

$$g\varrho b = g\varrho_0 \frac{b}{1 + 0{,}000181\,t}$$

werden. Die auf diese Weise für die Ausdehnung des Quecksilbers korrigierte Höhe ist demnach

$$\frac{b}{(1 + 0{,}000181\,t)}$$

oder sehr annähernd

$$b' = (1 - 0{,}000181\,t)\,b.$$

Ferner hat sich, wenn die Skala bei 0° C. genau stimmt, jede Einheit der Messingskala von 1 auf $1 + 0{,}000019\,t$ ausgedehnt, darum ist die abgelesene Höhe b in Wahrheit:

$$(1 + 0{,}000019\,t)\,b.$$

Daher ist die Höhe, wie sie ein Barometer mit Quecksilber von der Temperatur des Eises und mit einer genau graduierten, der Ausdehnung unfähigen Skala anzeigen würde, sehr annähernd $(1 - 0{,}000181\,t + 0{,}000019\,t)\,b$ oder:

$$(1 - 0{,}000162\,t)\,b.$$

Ist die Skala, wie dies meistens der Fall ist, für eine andere Temperatur als 0° C., etwa θ° C., genau, so wird die korrigierte Höhe den Wert

$$b'' = [1 - 0{,}000181\,t + 0{,}000019\,(t - \theta)]\,b$$

oder

$$b'' = (1 - 0{,}000162\,t - 0{,}000019\,\theta)\,b$$

haben. Die Korrektion wird in diesem Falle genau null betragen, wenn

$$t = -\frac{0{,}000019}{0{,}000162}\,\theta$$

ist.

Außer der Korrektion für die Temperatur gibt es eine für die Veränderung der Schwere. Sind die Beobachtungen am Meeresspiegel in der Breite λ gemacht worden, so können sie auf die Angaben eines Barometers am Meeresspiegel in irgend einer Normalbreite L umgerechnet werden.

Als Ergebnis der in der ganzen Welt gemachten Pendelbeobachtungen findet sich für das Verhältnis des Gravitationswertes g_λ in der Breite λ zu seinem Werte in der Breite L die Gleichung

$$\frac{g_\lambda}{g_L} = \frac{1 - 0{,}0026\cos 2\lambda}{1 - 0{,}0026\cos 2L} \quad \ldots\ldots\quad (39)$$

Nimmt man, was manchmal geschieht, als Normalbreite 45°, so lautet die Gleichung:

$$\frac{g_\lambda}{g_{45}} = 1 - 0{,}0026 \cos 2\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

In cm-sec-Einheiten ist der Wert von g in der Breite von 45° nahezu 980,6.

Werden die Beobachtungen in einer Höhe h cm über dem Meeresspiegel gemacht, so ist

$$\frac{g_\lambda}{g_{45}} = 1 - 0{,}0026 \cos 2\lambda - 0{,}0000000031\, h \quad . \quad . \quad (41)$$

Zur Reduktion muß man also mit dem Faktor auf der rechten Seite dieser Gleichung multiplizieren.

Wenn h und R in Zentimetern genommen sind, so stellt das Glied $0{,}0000000031\, h$ den Ausdruck $2h/R$ (R der Erdradius) vor, der, wie der Leser beweisen mag, die der Höhe h über der Erdoberfläche zugehörige Abnahme der Schwere ist.

Eine weitere Korrektion ist für die Kapillarität notwendig. Diese hängt vom inneren Rohrdurchmesser und der Höhe des gewölbten oberen Endes des Quecksilbers, des sogenannten Meniskus, ab. Je nachdem die Quecksilbersäule steigt oder fällt, ist ihre Kuppe stärker oder schwächer als im Mittel gewölbt, und dies hat einen merklichen Einfluß auf den Betrag der kapillaren Depression. In physikalischen Handbüchern wird eine Korrektionstabelle gegeben, doch erübrigt sie sich für eine Quecksilbersäule von über $^3/_4$ Zoll Durchmesser; als Normalbarometer sollte stets ein derartiges Barometer benutzt werden.

Schließlich ist eine kleine Korrektion für den Druck des Quecksilberdampfes in dem Raume über dem Quecksilber notwendig. Diese kann durch Hinzufügung (wenn die Höhe in Zentimetern ausgedrückt und die Temperatur t^0 C. ist) von $0{,}0001\, t$ zur Höhe gemacht werden.

Es sei hier bemerkt, daß für viele Zwecke in der Physik ein sogenannter normaler Atmosphärendruck benutzt wird; dieser wird auf verschiedene Weise definiert. Er kann als der Druck einer Quecksilbersäule von 76 cm Höhe und durchweg von der Temperatur des schmelzenden Eises an einem Orte von 45° Breite am Meeresspiegel gesetzt werden.

Manchmal setzt man in der Definition an Stelle von „an einem Orte unter 45° Breite" „in Paris".

Noch andere haben den Vorschlag gemacht, 75 cm statt 76 zu wählen. In Dynen ausgedrückt ist nämlich der 76 cm-Atmosphärendruck gleich 1013000, für 75 cm wird er also gerade 1000000 Dynen, d. h. eine Megadyne, was in manchen Fällen sehr bequem ist.

440. Änderung des Druckes mit der Höhe in der Atmosphäre. Höhe der homogenen Atmosphäre. Zunächst werde die Temperatur

als gleichförmig und der Wert von g als unabhängig von der Höhe angenommen. Wenn ϱ die Dichte und p der Luftdruck in einer Höhe x über dem Meeresspiegel ist, so ist der Druck in einem um dx höheren Punkte $p - g\varrho\, dx$. Folglich ist $dp = -g\varrho\, dx$. Nun ist aber nach dem Boyleschen Gesetz $p/\varrho = p_0/\varrho_0$ und mithin $\varrho = p\varrho_0/p_0$, wo mit p_0 und ϱ_0 Druck und Dichte am Meeresspiegel gemeint sein soll. Demnach ist

$$dp = -\frac{g\varrho_0 p}{p_0}\, dx.$$

Durch Integration erhält man, da $p = p_0$ ist, wenn $x = 0$ ist:

$$\log p - \log p_0 = -\frac{g\varrho_0}{p_0}\, x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

oder, was dasselbe ist:

$$p = p_0 e^{-\frac{g\varrho_0}{p_0} x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43)$$

Ganz ebenso wie der Druck verhält sich nach dem Boyleschen Gesetze (§ 432) die Dichte der Luft. Man hat also ebenso:

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{g\varrho_0}{p_0} x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43\text{a})$$

(s. auch § 394).

Die letzten Gleichungen zeigen, daß mit in arithmetischer Progression zunehmender Höhe sowohl der Druck, als auch die Dichte der Luft in geometrischer Progression abnimmt.

Die Größe $p_0/g\varrho_0$ heißt die Höhe der „homogenen Atmosphäre" für einen Ort, wo der Druck p_0 und die Dichte ϱ_0 ist. Bezeichnet man dies mit H_0, so ist:

$$p = p_0 e^{-x/H_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44)$$

Für praktische Logarithmen und Längen in Metern wird (b der Barometerstand):

$$\log b - \log b_0 = \frac{x}{18400}.$$

Wie man sich leicht ausrechnet, nimmt hiernach der Luftdruck nahe der Erdoberfläche für je 10 bis 11 m, je nach der Temperatur, um 1 mm ab; in größerer Höhe ist die Abnahme langsamer.

441. Barometrische Höhenmessung. Wie man aus Gl. (44) ersieht, ist die Höhe H der „homogenen Atmosphäre" für jeden beliebigen Punkt, in dem der Druck p und die Dichte ϱ ist, durch die Formel

$$H_0 = \frac{p}{g\varrho}$$

gegeben. Dies ist offenbar nach dem Boyleschen Gesetz dasselbe für alle Punkte in derselben Vertikalen und ist überdies unabhängig von Veränderungen des Luftdrucks, wie sie das Barometer anzeigt.

Bisher ist die Temperatur als nicht veränderlich angenommen worden; aber jede Temperaturänderung beeinflußt die Dichte ϱ, ohne den Druck zu berühren, wenn die Luft sich ungehindert ausdehnen kann. So nimmt, wenn die Temperatur von 0^0 C. auf t^0 C. erhöht wird, die Dichte ab (s. zweiten Teil) in dem Verhältnis $1/(1 + t/273)$, und so wird die Höhe der homogenen Atmosphäre H bei 0^0 C. zu $H(1 + t/273)$ bei t^0 C.

Es wird beim „Schall" gezeigt werden, daß, wenn V die Geschwindigkeit ist, die ein Körper beim Durchfallen einer Höhe $\frac{1}{2} H$ unter konstanter Schwere, derjenigen des Ortes, wo H bestimmt worden ist, erlangt, die Geschwindigkeit der Schallausbreitung annähernd $V\sqrt{\gamma}$ ist, wo γ das Verhältnis der spezifischen Wärme der Luft bei konstantem Druck zur spezifischen Wärme der Luft bei konstantem Volumen ist.

Es ist bemerkenswert, daß nach dieser Auffassung die Geschwindigkeit des Schalles in Luft vom Druck unabhängig ist. Dies scheint aber doch nicht der Fall zu sein, da von Witkowski[1]) nachgewiesen worden ist, daß eine Erhöhung des Drucks von 1 auf 100 Atmosphären die Schallgeschwindigkeit um etwa 7 Proz. vermehrt.

Die Höhen verschiedener Orte über dem Meeresspiegel können mit beträchtlicher Genauigkeit bestimmt werden, indem man ein Barometer nach den Orten hinbringt und den Druck daselbst bestimmt (wenn nötig mit Anbringung von Korrektionen für Temperaturunterschiede). Die Höhe x ist durch die Gl. (42) gegeben, die in der Form

$$x = \frac{p_0}{g\varrho_0}(\log p_0 - \log p) = H \log \frac{p_0}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

geschrieben werden kann, wo H die Höhe der homogenen Atmosphäre bei 0^0 C. ist. H ist annähernd 8000 m für Luft beim Gefrierpunkte des Wassers.

Die Größen p_0 und ϱ_0 können sich auf jede beliebige zur Grundlage gewählte Lage beziehen; x ist alsdann die Höhe der Schicht, worin der Druck p und die Dichte ϱ herrscht, über der betreffenden Bezugsschicht.

Wenn die Temperatur des tiefer gelegenen Ortes t_1^0 C., die des höher gelegenen t_2^0 C. ist, 0,004 als Ausdehnungskoeffizient gewöhnlicher Luft gilt, x_1 und x_2 die Höhen der Orte und die beobachteten Drucke p_1 und p_2 sind, so ist, bei $(t_1 + t_2)/2$ als Lufttemperatur, bei Reduktion auf die Breite von 45^0 und den Gefrierpunkt des Wassers wie in § 439, aber unter Vernachlässigung der Änderung von g mit der Höhe

$$x_2 - x_1 = 18400\,(1 + 0{,}0026 \cos 2\lambda)\,[1 + 0{,}002\,(t_1 + t_2)] \log \frac{p_2}{p_1} \quad (46)$$

in Metern mit praktischen Logarithmen; der Faktor $18400 \log(p_2/p_1)$ steht für

$$8000 \log nat\,(p_2/p_1).$$

[1]) Bull. Intern. de l'Académie des Sciences de Cracovie. Mars 1899.

442. Aneroidbarometer. Für die Höhenbestimmung nach dieser Methode und im allgemeinen für Luftdruckbeobachtung von Reisenden wird fast ausschließlich das Aneroidbarometer benutzt. Der Teil, der direkt auf Druckänderung reagiert, ist eine flache, zylindrische Metallbüchse, aus der die Luft ausgepumpt ist. Der Deckel der Büchse ist durch Wellung des Metalles verstärkt und steigt und fällt mit dem Luftdruck. Diese durch ein System von Hebeln vergrößerten Bewegungen werden auf einen Zeiger übertragen, der sich auf einer Scheibe dreht, auf der Drucke und entsprechende Höhen verzeichnet sind. Der Mechanismus ist am besten am wirklichen Instrumente zu erkennen.

Fig. 253.



443. Konvektives Gleichgewicht der Temperatur in der Atmosphäre. Tatsächlich ist die der obigen Rechnung zugrunde gelegte Bedingung — die Gleichförmigkeit der Temperatur — nicht erfüllt. Es findet sich, daß im allgemeinen mit zunehmender Höhe ein leichter Abfall der Temperatur verbunden ist. Nach Lord Kelvin (Mem. Manch. Phil. Soc. March 1865) kommt das Gleichgewicht der Temperatur durch rasche Bewegung der Luft zustande, die Wärmezufuhr ist von geringem Einfluß, so daß die Bedingung nahezu die adiabatische ist, die durch die Formel $pv^\gamma = c$ oder $p/\varrho^\gamma = p_0/\varrho_0{}^\gamma$ ausgedrückt ist, wo γ das Verhältnis der spezifischen Wärmen (s. zweiten Band) ist.

Dieser Bedingung entsprechend, ist mit Rücksicht auf $dp = -g\varrho dx$:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho^\gamma}{\varrho_0^\gamma}$$

Substituiert man aus dem zweiten dieser Ausdrücke in den ersten und integriert, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{\varrho^{\gamma-1}}{\varrho_0{}^{\gamma-1}} - 1\right) = -\frac{x}{H_0} \quad \ldots\ldots \quad (46\text{a})$$

wo H_0 die Höhe der homogenen Atmosphäre für den Boden ist (denn H ist nicht mehr dasselbe für Punkte in derselben Vertikalen). Für $\varrho = 0$ ergibt dies $x = H_0\gamma/(\gamma - 1)$, d. h. es gibt eine theoretische Grenze für die Höhe der Atmosphäre, nämlich (wenn $\gamma = 1{,}4$ ist) $3{,}44 \times H_0$. Nun ist aber für Luft von der Temperatur des Gefrier-

punktes in Paris sehr annähernd $H_0 = 8000$ m. Folglich ist die theoretische Höhe der Atmosphäre ungefähr 28000 m oder 28 km.

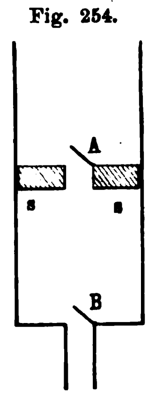
Man hat guten Grund anzunehmen, daß diese Höhengrenze nicht existiert, und ist sogar sicher, daß die adiabatische Bedingung nicht genau erfüllt ist. Die Frage vom Gleichgewicht und der Permanenz der Atmosphäre eines Planeten wird in der kinetischen Gastheorie im zweiten Teile behandelt werden.

Auch wird daselbst gezeigt werden, daß dieses sogenannte konvektive Gleichgewicht mit zunehmender Höhe einen langsamen gleichförmigen Temperaturabfall ergibt.

444. Anwendungen des Boyleschen Gesetzes. Luftpumpen. Theoretische Luftleere. Es bleibt kaum Platz, um die wichtigeren Anwendungen des Boyleschen Gesetzes zu erörtern, so daß wir uns auf kurze Beschreibungen der Wirkungen verschiedener Arten von Luftpumpen und der Theorie des Luftballons beschränken werden.

Man kann als sicher annehmen, daß die Luftpumpe von Otto v. Guericke erfunden und von Boyle für viele, für jene Zeit höchst erstaunliche Experimente benutzt worden ist. Aber Guericke füllte zuerst den zu leerenden Raum mit Wasser und pumpte das Wasser mit einer gewöhnlichen Saugpumpe aus, und möglicherweise verdankt man erst Hauksbee, Boyle und Hooke die Erfindung der jetzigen Form der Luftpumpe; denn in den Grundzügen der Konstruktion hat sich die gewöhnliche Zylinderluftpumpe seit Boyles Tagen nur wenig geändert. Ein Zylinder ist am einen Ende offen und hängt am anderen Ende durch ein Rohr mit dem leer zu pumpenden Gefäße zusammen. In diesem Zylinder wird ein gut passender Stempel *ss* mittels einer durch eine Kurbel bewegten Stange hin und her bewegt. In dem Stempel ist eine Klappe *A*, die sich nach außen öffnet, und an der Verbindungsstelle des Kommunikationsrohres mit dem Zylinder eine andere Klappe, die sich in den Zylinder hinein öffnet. Die Klappen sind in Fig. 254 schematisch gezeichnet und haben in der Wirklichkeit verschiedene Formen. Sie sind manchmal ölgetränkte Seidenlappen, die an zwei entgegengesetzten Seiten flach an einer Platte anliegen, so daß die Luft unter ihnen auf den beiden anderen Seiten ausströmt, wenn diese leicht gelüftet werden; manchmal sind sie konische Stopfen, genau eingepaßt in Öffnungen, von denen sie entfernt und in die sie zurückversetzt werden, sei es durch Luftdruck oder durch Stäbe, die im geeigneten Moment durch den die Pumpe treibenden Mechanismus in Bewegung gesetzt werden.

Fig. 254.



Um die Wirkung zu verstehen, braucht man sich nur den Stempel vom äußeren Zylinderende zum inneren getrieben zu denken. Dabei

wird die Luft vor dem Stempel hergetrieben und komprimiert, so daß sie die Klappe B fest zudrückt, dagegen durch A entweichen kann. So wird der Stempel bis zum Ende des Zylinders hingetrieben und beginnt nun zurückzukehren. Das Vordringen in der entgegengesetzten Richtung veranlaßt die Schließung der Klappe A, und dadurch läßt der Stempel einen fast luftleeren Raum hinter sich. Nun öffnet sich infolgedessen die Klappe B, und es strömt Luft aus dem Gefäße in den Zylinder; wenn der Stempel seine erste Lage wieder erreicht hat, so ist die Luft, die vorher das Gefäß erfüllte, über das Gefäß und den Zylinder verteilt, so daß, wenn V und v die Volumina dieser sind, die Dichte im Verhältnis $V/(V+v)$ vermindert worden ist.

Nun wird der eben beschriebene Stoß des Stempels wiederholt. Wenn er anfängt, öffnet sich A und schließt sich B, und die den Zylinder erfüllende Luft wird auf der ersten Hälfte des Stoßes der freien Atmosphäre zugeführt. Beim zweiten Halbstoß schließt sich A und öffnet sich B, und die Luft im Gefäße verteilt sich wiederum über Gefäß und Zylinder. Ihre Dichte nimmt auf $V/(V+v)$ ihres früheren Betrages ab, also auf $[V/(V+v)]^2$ ihres anfänglichen Betrages, ihr Druck natürlich ebenfalls.

Dieser Prozeß wird bis zu n Pumpenstößen wiederholt; und wenn man annimmt, daß die Leerung in immer gleicher Weise fortschreitet, und daß p_0, ϱ_0, p_n, ϱ_n den Druck und die Dichte im Anfang bzw. nach n Stößen darstellen, so hat man die Formeln:

$$p_n = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n p_0, \quad \varrho_n = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n \varrho_0 \quad . \; . \; . \; (47)$$

445. Wirkung des schädlichen Raumes. Grenzen der Pumpwirkung. Wenn es einen frei gebliebenen, vom Stempel nicht berührten Raum S am Ende des Zylinders gibt, so ist, wenn sich der Stempel aus dieser Lage im ersten Stoß entfernt, ein mit Luft unter Atmosphärendruck erfüllter Raum S vorhanden. Wenn der Stempel nach dem anderen Ende zurückgezogen worden ist, so hat die das Gefäß und den Zylinder erfüllende Luft — das ist das Volumen $V+v$ und hat am Ende des ersten Stoßes die Dichte ϱ_1 — die Masse $(V+v)\,\varrho_1$, welche der Masse $(V+S)\,\varrho$ gleich ist, wenn ϱ die atmosphärische Dichte ist. Am Ende des zweiten Stoßes ist die Dichte ϱ_2, und es ist $(V+v)\,\varrho_2 = V\varrho_1 + S\varrho$, so daß

$$\varrho_2 = \varrho\left[\frac{V^2+VS}{(V+v)^2} + \frac{S}{V+v}\right]$$

ist. Auf diese Weise ergibt sich schließlich

$$\varrho_n = \varrho\,\frac{V^{n-1}(V+S)}{(V+v)^n} + \left[\left(\frac{V}{V+v}\right)^{n-2} + \left(\frac{V}{V+v}\right)^{n-3} + \cdots + 1\right]\frac{S\varrho}{V+v}$$

$$= \left(\frac{V}{V+v}\right)^n\left(1 - \frac{S}{v}\right)\varrho + \frac{S}{v}\,\varrho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (48)$$

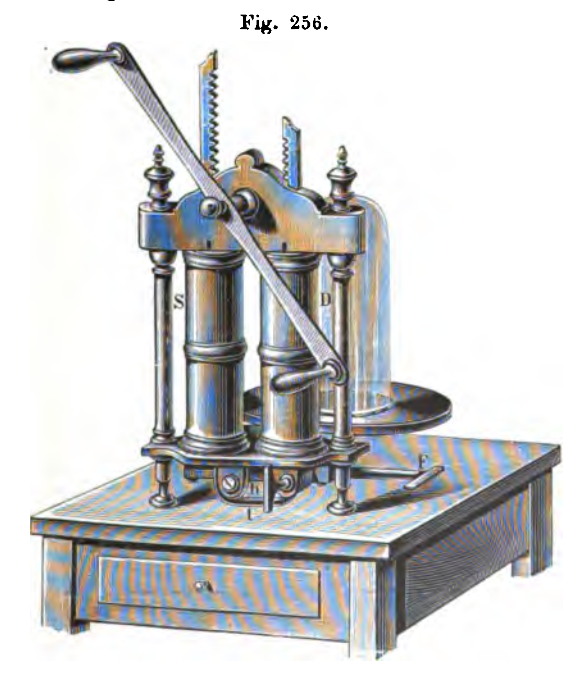
Der Raum S wird schädlicher Raum genannt. Er kann dadurch unschädlich gemacht werden, daß man ihn mit Quecksilber füllt, wie bei der Kravoglschen Pumpe, oder mit Öl, das man vorher von Luft gereinigt hat, wie bei neueren Formen der Luftpumpe. Zur Erzielung stärkster Vakua erweist sich allerdings immer noch eine oder die andere Form der Quecksilberluftpumpe am leistungsfähigsten.

Fig. 255.

Die Theorie ist von sehr geringem praktischen Nutzen, da schließlich der Druck der Luft nicht die Klappen in Bewegung setzen kann, und da alsdann die Pumpe aufhören wird, die Luftverdünnung zu steigern. Ein anderer Grund für die Wirkungsgrenze ist die von dem Öl der Klappen auf der einen Seite an die luftleere Kammer abgegebene, von der anderen eingesogene Luft.

Die Luftverdünnung wird durch ein Meßglas von der Art des in Fig. 255 dargestellten gemessen. Anfänglich, unter Atmosphärendruck, füllt das Quecksilber den geschlossenen Schenkel vollständig und steht im anderen tiefer. Ist der Raum so

Fig. 256.



weit ausgepumpt, daß der Druck die anfängliche Niveaudifferenz der Quecksilbersäulen ausmacht, so beginnt das Meßrohr zu arbeiten; das Quecksilber fällt in dem geschlossenen Schenkel und steigt im offenen, mehr und mehr sich der Niveaugleichheit nähernd.

Man baut die Luftpumpe auch häufig mit zwei Zylindern, in denen sich die Stempel gleichzeitig in entgegengesetzten Richtungen bewegen, so daß sich die Auspumpungsgeschwindigkeit verdoppelt. Es wird behauptet, daß dies den Zweck habe, ein Gleichgewicht des Luftdruckes über den Stempeln herzustellen. Indessen hat man davon bei gewöhnlichen Pumpen infolge der Reibung nur geringen Vorteil. Bei einer von Babinet erfundenen, im übrigen höchst sinnreichen Form der Pumpe sind die Zylinder von Glas, die Stempelkörper aus Messing; wenn die Pumpe einige Zeit gearbeitet hat, hat sich durch die von der Erwärmung erzeugte ungleiche Ausdehnung so viel Reibung entwickelt, daß es fast unmöglich ist, die Pumpe überhaupt im Betriebe zu erhalten. Fig. 256 (a. v. S.) stellt ein Schema der zweistiefeligen Pumpe vor.

446. Luftkompressionspumpen. Wird die Wirkung der Klappen in Fig. 254 umgekehrt, so daß die Stempelklappe und die Klappe am

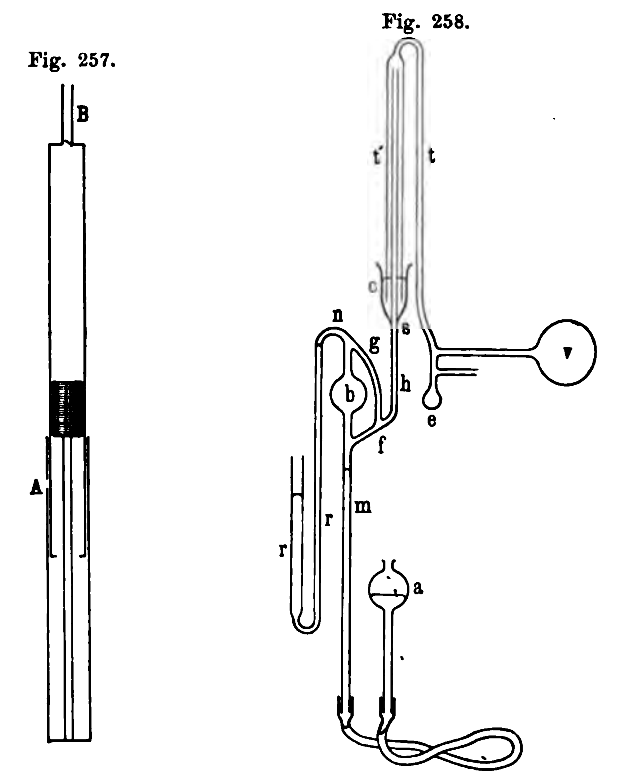


Fig. 257.

Fig. 258.

Boden sich beide nach unten öffnen, so wird durch die Abwärtsbewegung des Stempels Luft in den Empfänger hineingezwungen und durch Schließung der Klappe B am Wiederaustritt gehindert werden,

während der Stempel zum Anfang des Zylinders zurückkehrt und den Zylinder durch Öffnung der Klappe A in Vorbereitung des neuen Stoßes mit Luft füllt.

Eine einfachere Form der Kompressionspumpe ist in Fig. 257 dargestellt. Hier ist die Klappe im Stempel weggelassen und in der Seite des Zylinders ein Loch gelassen, wie bei A zu ersehen ist. Wird der Stempel zurückgezogen, so passiert er das Loch bei A, durch welches dann der Zylinder mit Luft unter Atmosphärendruck gefüllt wird. Diese Luft wird dann in den Empfänger gezwängt, wenn der Stempel den nächsten Halbstoß ausführt.

So ist die tatsächliche Wirkung bei einer gewöhnlichen Fahrradluftpumpe. Die Klappe B ist am Radreifen befestigt und besteht aus einem Stückchen Gummiröhre, das aus der Pneumatik herausragt und das bis auf ein Loch in einer Seite geschlossen ist. Dies ist von einem Metallröhrchen umgeben, an das die Pumpe angeschraubt wird und gegen das die Gummiröhre immer geschlossen ist, außer wenn durch die Pumpe Luft hineingedrängt wird. Diese Klappe schließt um so dichter, je höher der Luftdruck in der Pneumatik ist.

Der Verdichtungsgrad, der durch n Stöße erreicht wird, kann auf dieselbe Weise berechnet werden, die oben für die Luftverdünnungspumpe benutzt wurde. Die Formeln sind ebenfalls durch den schädlichen Raum modifiziert, und die Theorie ist infolge der in der Praxis unvermeidlichen Undichte nur grob anwendbar.

Kompressionspumpen sind in der Technik von großem Nutzen. Komprimierte Luft wird zum Bohren in Minen, zur Beförderung von Rohrpostbriefen, zum Füllen der Pfeilerkästen beim Brückenbau, wie der Taucherglocken benutzt; ferner beim Bau von Deichen und der Reparatur von Schiffen, um Maschinen zu treiben, und zu vielen anderen Zwecken. Wegen der Wirksamkeit von Kompressionspumpen und der Maschinen mit komprimierter Luft im allgemeinen muß auf die Lehrbücher der angewandten Mechanik verwiesen werden.

447. Quecksilberluftpumpen. Töplersche Pumpe. Quecksilberluftpumpen werden für die erforderlichen hochgradigen Luftverdünnungen für Glühlampen, Röhren für Röntgenstrahlen u. s. w. benutzt. Es mögen hier zwei Formen kurz beschrieben werden, die Geißlersche Pumpe in der Töplerschen Modifikation und die Sprengelsche Pumpe.

Die in Fig. 258 dargestellte Töplersche Luftpumpe hat keine Stopfhähne und ist in hohem Grade geeignet zum Gebrauch, obgleich sie einen ziemlich beträchtlichen Platz einnimmt. v ist das auszupumpende Gefäß; es ist (wenn es von Glas ist, mittelst des Lötrohres oder, wenn dies unmöglich ist, durch ein von Quecksilber umgebenes Gelenk) mit der Pumpe verbunden durch ein Glied $t\,t'$ von der Form eines umgekehrten U. Das linke Rohr t' ist weiter als das andere, es

ist über das Rohr *s* gestülpt und steht mit seiner Mündung in einem Napfe *c* mit Quecksilber, durch den *s* hindurchgeht. Der von *t'* umgebene Teil von *s* ist höher als die barometrische Höhe. Mit Quecksilber wird auch die Krümmung des Rohres *r* gefüllt, das, wenn die Verdickung *b* ausgepumpt ist, ein Heberbarometer bildet, da die Krümmung *n* genügend hoch ist, um Quecksilber am Überlaufen aus *r* zu hindern.

Das Quecksilberbassin *a* ist durch einen starken Gummischlauch mit dem senkrechten Hauptrohre *m* verbunden, das gegen die Schwankungen des quecksilbergefüllten Rohres dadurch geschützt ist, daß die Verbindungsstelle und ein Stück des Gummischlauches in ein Kästchen mit Gips eingebettet sind.

Die Wirkung der Pumpe findet folgendermaßen statt: Das Bassin *a* wird so weit gehoben, daß das Quecksilber gezwungen wird, bis zur oberen Grenze der Kugel *b* zu steigen, aus der die Luft in den langen Schenkel von *r* eingepreßt wird, so daß sie durch das Quecksilber in der Biegung hindurchbrodelt. Wenn das Quecksilber durch *b* aufsteigt, geht es auch in das Seitenrohr *f* über und schneidet die Verbindung mit dem Gefäß *v* ab und teilt sich dann, indem es einerseits im Rohre *h* aufsteigt, während der Rest um das Rohr *g* herum in das durch die Kugel aufsteigende Quecksilber einmündet.

Jetzt wird das Bassin gesenkt, und das Quecksilber fällt und leert dabei die Kugel *b*, in die, infolge des Steigens des Quecksilbers in *r* von der Biegung aus, die Luft nicht zurückkehren kann. Das Quecksilber fällt auch in *h* und *g*, und sobald die Verbindungsstelle dieser beiden Rohre passiert ist, stürzt die Luft aus *v* herein und verteilt sich auf *v* und *b*. Gleichzeitig steigt aus dem Näpfchen *c* zwischen *s* und *t'* Quecksilber auf und verhindert den Eintritt von Luft aus der umgebenden Atmosphäre in *v*.

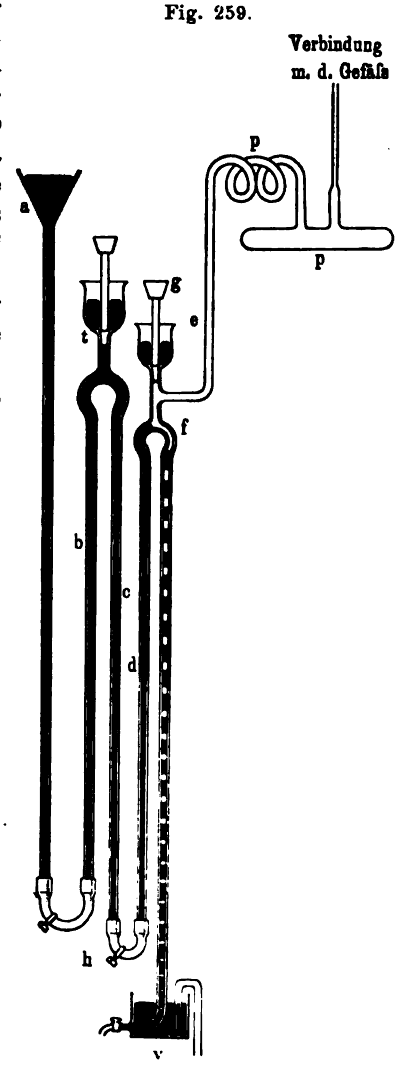
Von neuem wird das Bassin gehoben und die jetzt in *b* befindliche Luft herausgelassen und durch *r* herausgezwängt wie vorhin; dann wird wiederum das Bassin gesenkt, und die nach dem ersten Gange in *v* verbliebene Luft verteilt sich auf *v* und *b*.

Dieser Prozeß wird so oft wiederholt, bis die Luftverdünnung in *v* weit genug gediehen ist. Das Gefäß *v* kann von dem aus der Feuchtigkeit im Quecksilber aufsteigendem wässerigen Dampfe durch irgend einen austrocknenden Stoff, wie Phosphorsäure, in dem Kügelchen *e* geschützt werden. Auch kann der Quecksilberdampf abgefangen werden, indem man einen Teil des nach *t* führenden Rohres mit Blattgold stopft.

Der Grad der erreichten Luftverdünnung kann durch Beobachtung desjenigen Druckes (der aus der Höhe des Bassins *a* über dem Stande des Quecksilbers in *r* zu berechnen ist) geschätzt werden, welcher nötig ist, um die das Gefäß *b* erfüllende Luft in eine Blase in der Biegung *n* zusammenzupressen.

448. Sprengelsche Pumpe. Giminghamsche Modifikation. Eine andere bei der Herstellung von Vakuumröhren und Glühlampen viel verwandte Form der Luftpumpe ist die Sprengelsche in der ihr hauptsächlich von Gimingham verliehenen Modifikation, wie sie in Fig. 259 dargestellt ist. Aus einem hochgestellten Bassin fließt Quecksilber im Rohre *a* herab und in *b* herauf, an dessen oberem Ende etwa in ihm enthaltene Luftblasen in eine Falle *t* übergehen; dann fließt es im Rohre *c* herab und in *d* herauf und fällt an der Biegung tropfenweise in das „Fallrohr“ *f*, das nur etwa 2 mm Durchmesser hat. Diese Tropfen nehmen beim Herabgleiten im Fallrohre die Luftblasen mit, die durch das Rohr *e* oben von dem auszupumpenden Gefäße herausgetrieben werden. Die Höhe des oberen Fallrohrendes über dem Quecksilber im Abgabegefäße *v* ist mehr als Barometerhöhe.

Fig. 259.



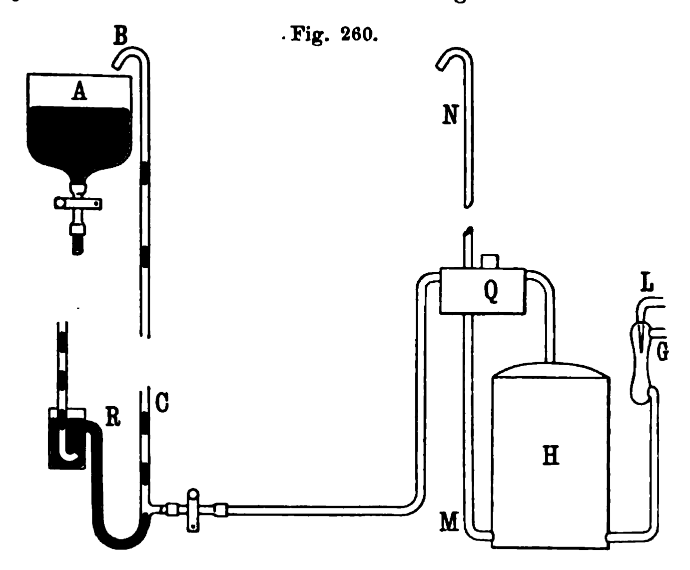
Die Zuflußrohre sind unten durch starke schwarze Gummischlauchstücke, die noch durch Leinwand verstärkt sind, verbunden. Diese sind mit Quetschhähnen versehen, um den Zufluß des Quecksilbers zu regeln.

Ist die Pumpe zweckmäßig gearbeitet, so führt der Fall des Quecksilbers stetig die Luft in immer kleiner werdenden Blasen heraus, bis das höchste mögliche Vakuum erzielt ist. Die Annäherung an diesen Zustand gibt sich durch den metallischen Hammerklang der ins Vakuum fallenden Quecksilbertropfen, durch die Bildung einer ununterbrochenen Quecksilbersäule im Fallrohre und durch das Auftropfen des Quecksilbers oben auf die Säule, ohne sichtbare Luftblasen einzuschließen, kund.

Der Trichter über dem Fallrohre hat einen sorgfältig geschliffenen Hals, in den ein Stöpsel *g* eingeschliffen ist. Um den Stöpsel herum

in den Trichter eingegossenes Quecksilber gibt einen völlig dichten Abschluß gegen den Eintritt von Luft ab. Der Zweck des Trichters ist, eine hinreichende Methode zur Reinigung des Fallrohres zu gewähren, was dadurch geschieht, daß man den Zufluß des Quecksilbers durch den Quetschhahn abschneidet, wobei man das Zuflußrohr bis zur Fallbiegung gefüllt läßt, und dann von dem Trichter aus etwas konzentrierte Schwefelsäure, die zur Beseitigung fliegender Staubteilchen vorher mit Ammoniumsulfat gekocht worden ist, einlaufen läßt. Man läßt das Fallrohr etwa eine Stunde mit der Säure gefüllt stehen, die dann herausgelassen wird. Um zu vermeiden, daß etwas von der auf diesem Wege nach *v* beförderten Säure in die Pumpe gelangt, sollte das Quecksilber aus *v* mittels eines nicht ganz bis auf den Boden

Fig. 260.



reichenden Hebers abgezogen werden, so daß nur reines Quecksilber abgezogen und in *a* überführt wird.

Man stellt auch Pumpen mit zwei oder drei Fallrohren her. Manchmal macht man dies so, daß man das durch ein Rohr (wie in Fig. 259) zufließende Quecksilber sich bei der Biegung des Fallrohres teilen läßt in so viel Ströme, als Rohre da sind; da aber die Tauglichkeit der Pumpe von der genauen Regulierung des Abfalls durch jedes Rohr abhängt, tut man gut, die Anordnung von Zuflußrohr und Biegung mit Klärtrichter und Fallrohr ebenfalls zu verdoppeln oder zu verdreifachen. Sämtliche Zuflußrohre sind mit einem einzigen Zufluß von *a* bei *h* verbunden. Verzweigungen von *e* aus gehen nach den verschiedenen Fallrohrbiegungen.

Das Rohr *p* enthält Phosphorsäureanhydrid zum Zwecke der Austrocknung, wie schon bei der Töplerschen Pumpe vorkam, und in

derselben Weise wie dort ist auch eine Falle für Quecksilberdampf vorgesehen.

Durch eine von Smith angegebene Anordnung (Fig. 260) kann das Quecksilber von v wieder nach a zurückbefördert werden. Durch einen Wasserstrahl L wird Luft in H konzentriert (während das Wasser durch MN entweicht). Von H gelangt die Druckluft durch die Trockenkammer Q zum Elevatorrohre CB, in welchem es das Quecksilber von R nach B mitführt, von wo es schließlich nach A zurückfließt.

449. Gemeine Saugpumpe. Die Zylinderluftpumpe von Hauksbee ist weiter nichts als die zur Luftübertragung verwendete gemeine Saugpumpe. Tatsächlich wirkt die gewöhnliche Pumpe im ersten Moment als Luftpumpe. Die durch die Klappe B in Fig. 254 mit dem Zylinder kommunizierende Röhre sei ein langes senkrechtes Rohr, das mit seinem unteren offenen Ende in eine Flüssigkeit eintaucht, deren Oberfläche unter Atmosphärendruck steht; dies nennen wir eine Saugpumpe. Wenn der Stempel einen Stoß ausführt, wird aus dem Raume über der Flüssigkeit im Rohre Luft abgezogen, und die daraus folgende Druckverminderung veranlaßt die Flüssigkeit, auf ein höheres Niveau zu steigen, um die Bedingung zu erfüllen, daß die Drucke in der Flüssigkeit außerhalb und innerhalb des Rohres bei gleichem Stande die gleichen sein müssen. Wiederholte Stöße werden, wenn das Saugrohr nicht zu lang ist, die Flüssigkeit in das Saugrohr hinauf, durch die Klappe B und schließlich durch die Klappe A bringen, bis eine Flüssigkeitssäule über dem Stempel steht. Dann schließt sich bei jedem Stoß aufwärts die Klappe A, und es wird eine Flüssigkeitsmenge bis zur Höhe eines unter dem oberen Zylinderende befestigten Abflusses gehoben und ausgegossen.

Beim ersten Stoße möge die Flüssigkeit um eine Höhe x_1 über das Zuflußniveau steigen. Wenn H hier den Stand eines Barometers bedeutet, das mit der Flüssigkeit aus der betrachteten Pumpe hergestellt ist, so wird der Druck im Saugrohre nach dem ersten Hube im Verhältnis von $H - x_1$ zu H abnehmen. Somit ergibt sich nach dem Boyleschen Gesetze, wenn ϱ_0 die ursprüngliche Luftdichte im Rohre und ϱ_1 die Dichte nach dem ersten Hube ist:

$$\varrho_1 H = \varrho_0 (H - x_1).$$

Durch den Hub wird die Luft, die im Saugrohre und im schädlichen Raume des Zylinders war, auf diesen schädlichen Raum, auf den ganzen benutzten Raum im Zylinder und eine verkürzte Länge des Saugrohres verteilt. Wenn wir den Querschnitt der Saugpumpe s, den des Zylinders S, die Höhe der Spitze des Saugrohres über dem Zuflußniveau a und die Höhen der höchsten und tiefsten Lage der niederen Seite des Gefäßes über den Saugrohrklappen b und c nennen, so ist

$$\varrho_1 [Sb + s(a - x_1)] = \varrho_0 (Sc + sa).$$

Eliminiert man also den Bruch ϱ_1/ϱ_0 zwischen den beiden gefundenen Gleichungen, so erhält man

$$x_1 = H \frac{S(b-c) - s x_1}{Sb + s(a - x_1)} \quad \ldots \ldots \quad (49)$$

Die Flüssigkeit wird daher beim ersten Hube bis zur Spitze des Saugrohres aufsteigen, wenn $x_1 = a$ ist, d. h.

$$\frac{a}{H} = S \frac{b-c}{sH + Sb}.$$

Im allgemeinen lauten, nachdem n Stöße ausgeführt worden sind, die die Luftdichten ϱ_{n-1} und ϱ_n und die Flüssigkeitshöhen im Saugrohre vor und nach dem $n$ten Stoße x_n und x_{n-1} verbindenden Gleichungen:

$$\varrho_n (H - x_{n-1}) = \varrho_{n-1} (H - x_n)$$

$$\varrho_n [s(a - x_n) + Sb] = \varrho_{n-1} s (a - x_{n-1}) + \varrho_0 Sc$$

$$= \varrho_{n-1} s (a - x_{n-1}) + \varrho_n \frac{H}{H - x_n} Sc \quad \ldots \quad (50)$$

da $\varrho_n H = \varrho_0 (H - x_n)$ ist.

Dies ergibt eine quadratische Gleichung für x_n in Gliedern von x_{n-1}, deren positive Wurzel der Wert von x_n ist.

Wenn $x_n = x_{n-1}$ ist, so hat die Flüssigkeit aufgehört, höher im Saugrohre zu steigen, und es ist nach Gl. (50), da jetzt $\varrho_n = \varrho_{n-1}$ ist

$$x_n = H\left(1 - \frac{c}{b}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (51)$$

Daher wird die Flüssigkeit nicht bis zur Spitze des Saugrohres aufsteigen, wenn $a > x_n$ ist, also in dem Falle der Ungleichung

$$a > H\left(1 - \frac{c}{b}\right) \quad \text{oder} \quad H < \frac{a}{1 - \frac{c}{b}} \quad \ldots \quad (52)$$

Wenn es keinen schädlichen Raum c gibt, so wird die Pumpe das Wasser, falls $a = H$ ist, gerade bis zur Spitze des Saugrohres heben; gibt es einen schädlichen Raum, so ist die Grenzgleichung:

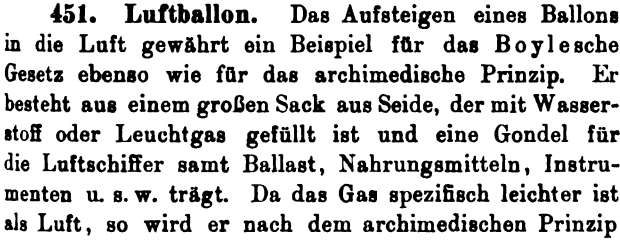
$$a = H\left(1 - \frac{c}{b}\right).$$

Eine gewöhnliche Saugpumpe versagt manchmal gänzlich infolge des nicht genügend gut dem Zylinder angepaßten Eimers. Jede Undichte am Zusammenschluß macht natürlich die Theorie unanwendbar. Man kann aber den Eimer luftdicht machen und so die Pumpe, die sonst unbenutzbar wäre, doch noch in Aktion setzen, indem man Wasser in den Zylinder über dem Eimer eingießt.

450. Druckpumpe. Bei der in Fig. 261 abgebildeten Druckpumpe ist der Stempel ein einfacher Taucher; eine Klappe, die sich

nach außen öffnet, ist aber an der Verbindungsstelle des Seitenrohres angebracht, durch welches die Flüssigkeit auf das gewünschte Niveau gehoben wird, und eine andere, nach oben sich öffnende an der Mündung des untersten Rohres. Die Flüssigkeit wird also durch den Stoß nach unten in das Seitenrohr getrieben und im Stoß nach oben vom Zuflußniveau aus gehoben. Darum müssen Bergwerkspumpen Druckpumpen sein, die nahe am Grunde des Schachtes aufgestellt sind, wodurch die Verwendung langer kommunizierendes Stempel notwendig wird, um sie zu treiben, was durch eine an der Einfahrt aufgestellte Maschine geschieht.

Fig. 261.



451. Luftballon. Das Aufsteigen eines Ballons in die Luft gewährt ein Beispiel für das Boylesche Gesetz ebenso wie für das archimedische Prinzip. Er besteht aus einem großen Sack aus Seide, der mit Wasserstoff oder Leuchtgas gefüllt ist und eine Gondel für die Luftschiffer samt Ballast, Nahrungsmitteln, Instrumenten u. s. w. trägt. Da das Gas spezifisch leichter ist als Luft, so wird er nach dem archimedischen Prinzip eine aufwärts treibende Kraft gleich dem Gewicht der durch das Gas und das Material des Ballons und seiner Anhängsel (einschließlich der Luftschiffer und Mitfahrenden) verdrängten Luft erfahren. Ist dies größer als das Gesamtgewicht des Ballons mit allem, was dazu gehört, so erfährt der Ballon eine Beschleunigung vom Betrage der Differenz, dividiert durch die Masse des Ballons und seiner Anhängsel.

Es sei W das Gesamtgewicht der Seide, Gondel, darin befindlichen Menschen u. s. w., W' das Gewicht der durch sie verdrängten Luft, P das Gewicht des Gases, ϱ die Luftdichte und ϱ/n die Dichte des Gases, dann ist das Gewicht der durch das Gas verdrängten Luft nP, und das Gasvolumen U ist nP/ϱ. Daher gilt für Gleichgewicht der Ausdruck

$$W + P = W' + nP$$

und

$$U = \frac{nP}{\varrho} = \frac{n}{n-1}\,\frac{W - W'}{\varrho} \quad \text{oder} \quad P = \frac{W - W'}{n-1} \quad . \; . \quad (53)$$

Wenn $W - W' = 1$ und das Gas Wasserstoff ist, so daß $n = 14$ ist, so ist also $P = 1/13$, d. h. ein Gewicht $(W - W')$ von einer Tonne würde durch $^1/_{13}$ Tonne Wasserstoff gehoben werden, was bei Atmosphärendruck und 0^0 C. ungefähr 1000 cbm einnehmen würde.

Für Leuchtgas pflegt man $n = 2$, neuerdings auch $n = 3$ zu setzen, die Steigkraft ist dann entsprechend kleiner.

Wenn auch nur ein geringer Überschuß der Auftriebkraft $(n-1)\,P$ über das Gesamtgewicht $W - W'$ vorhanden ist, d. h. wenn es eine

positive Steigkraft vom Betrage $(n-1)P-(W-W')$ gibt, wird der Ballon aufsteigen; das ist der Zug an den Ankerseilen eines Fesselballons. Wenn der Ballon im Anfang nicht ganz gefüllt ist, so wird er sich beim Aufstieg ausdehnen, bis der Druck im Innern dem verringerten äußeren Druck gleichkommt, und die einzige Größe, die sich ändert, wird W' sein, das indessen verhältnismäßig klein ist. Das Volumen des Gases wird V werden, und die Dichte der Luft wird $U\varrho/V$ werden, während n unverändert bleibt. Also wird aus W' die Größe $W'U/V$ werden. Die Steigkraft wird alsdann $(n-1)P-(W-W')U/V$, was praktisch dasselbe ist wie vorher.

Um ein Sicherheitsventil gegen unvorhergesehene Ausdehnung des Gases, plötzlichen Übergang in die Strahlen der Sonne und darauf folgende Zunahme des inneren Druckes über den äußeren und mögliches Platzen der Seidenhülle zu beschaffen, bleibt ein Stückchen des Ballonhalses offen, so daß beim Aufsteigen des Ballons Gas ausströmt.

Wieviel Gas auch immer dem Ballon entströmt sein möge, die Steigkraft in einer Höhe z, in der die Dichte der Luft ϱ_z und das Volumen des Gases V ist, ist

$$V\varrho_z\frac{n-1}{n}-\left(W-\frac{W'\cdot\varrho_z}{\varrho}\right).$$

Dies ist null für den Fall

$$\varrho_z=\frac{W\varrho}{(n-1)\,Q+W'} \quad \ldots\ldots\ (54)$$

wo $Q=V\varrho/n$ ist, d. h. die Gasmasse, die den Ballon vom Volumen V auf dem Erdboden füllen würde.

Die Masse des Gases im Ballon ist jetzt $V\varrho_z/n=Q\varrho_z/\varrho$, d. h.

$$\frac{Q\,W}{(n-1)\,Q+W'},$$

so daß, wenn der Ballon bei der Abfahrt auf das Volumen V gefüllt war, der Verlust vom Betrage

$$P-\frac{Q\,W}{(n-1)\,Q+W'}$$

oder, wenn bei der Abfahrt $P=Q$ war, vom Betrage

$$Q\left[1-\frac{W}{(n-1)\,Q+W'}\right]$$

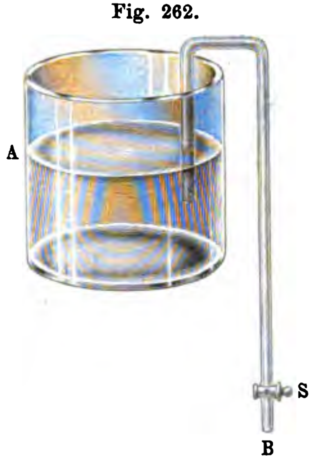
gewesen ist.

Ein freier Ballon kann durch Auswerfen von Ballast zum Steigen oder durch Ausströmen von Gas infolge Öffnens eines Ventils an der Spitze zum Sinken gebracht werden. Er ist aber immer entweder in steigender, oder in fallender Bewegung, und um diese steigende oder fallende Bewegung ruhiger zu machen, wird, wenn der Ballon tief genug ist, ein langes Seil ausgeworfen, das auf dem Boden hinter ihm

herschleppt. Wenn nun der Ballon steigt, wird ein Teil des Seiles vom Boden gehoben und erteilt auf diese Weise einen Zug nach unten, während beim Sinken des Ballons der in der Luft befindliche Teil des Seiles verkürzt und der Zug nach unten dadurch verringert wird.

452. Heber. Das mit dem Namen Heber bezeichnete Instrument zur Übertragung von Flüssigkeiten aus einem Gefäße ins andere mag hier beschrieben werden. Es besteht in seiner gebräuchlichsten Form aus einem wie in Fig. 262 gebogenen Rohre, das wie in der Abbildung mit dem einen Schenkel in die zu übertragende Flüssigkeit eintaucht. Nehmen wir an, es befinde sich ein Stopfhahn S an dem Schenkel außerhalb des Gefäßes unter dem Niveau A; S werde geschlossen, wenn der Heber voll Flüssigkeit ist. Wenn S nicht zu hoch über der Mündung des Rohres liegt (die barometrische Höhe für die betreffende Flüssigkeit ist die Grenze), so wird die Flüssigkeit unter dem Stopfhahne durch den Luftdruck in ihrer Lage erhalten werden; dann herrscht in A und B Atmosphärendruck, während der Druck unter dem Stopfhahne kleiner als Atmosphärendruck ist. Wird dann der Stopfhahn geöffnet, so wird die Flüssigkeit durch ihn hindurchströmen und ohne Unterbrechung weiter strömen, bis das Niveau im Gefäße auf B gefallen ist oder alle Flüssigkeit ausgelaufen ist.

Fig. 262.



Es muß bemerkt werden, daß die Flüssigkeit im Gefäße und im Heberrohre (sowie Gefäß, Heberrohr u. s. w. selbst) rings von Atmosphäre umgeben sind.

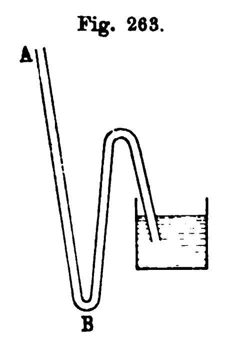
Betrachten wir einen Heber, der eine Flüssigkeit von der Dichte ϱ von einem Gefäße in ein anderes überträgt, während der ganze Apparat in eine andere Flüssigkeit von der Dichte ϱ' eingetaucht ist und beide Heberschenkel in die Flüssigkeit eintauchen. Es sei h die Höhe des oberen Spiegels über dem unteren und z die Entfernung des Hahnes vom unteren Spiegel; der Hahn sei geschlossen. Wenn p_1 der Druck im umgebenden Medium am unteren und p am oberen Niveau ist, so ist $p_1 - p = g\varrho' h$. Der Druck gerade unter dem Hahne ist $p_1 - g\varrho z$ und gerade über ihm $p + g\varrho(h - z)$. Der Überschuß des Druckes über dem Hahne über den Druck unter ihm ist daher $p - p_1 + g\varrho h = g(\varrho - \varrho')h$.

Wenn also der Hahn geöffnet wird, tritt Strömung durch ihn hindurch in der Richtung von oben nach unten ein, wenn $\varrho > \varrho'$ ist. Ist dagegen $\varrho < \varrho'$, so tritt die Strömung in der entgegengesetzten

Richtung ein, und die Flüssigkeit wird aus dem unteren in das obere Gefäß geführt. So kann in Luft Wasserstoff mit dem Heber aus einem Gefäße in ein anderes höher gelegenes übertragen werden. Natürlich wird die Strömung gleich null, wenn $h = 0$ ist, d. h. wenn beide Spiegel auf gleicher Höhe sind.

Um einen Heber in Tätigkeit zu setzen, muß man ihn mit der zu übertragenden Flüssigkeit füllen, die offenen Schenkelenden verschließen, ihn in die richtige Lage bringen und dann die Enden öffnen. Die Strömung wird sofort beginnen und mit einer allmählich abnehmenden Geschwindigkeit fortdauern bis auf null, wenn das Niveau bis zur Mündung des Schenkels in dem Gefäße, aus dem die Flüssigkeit abgezogen wird, gefallen ist oder bis der Niveauunterschied bis auf null zurückgegangen ist.

Fig. 263.



Gewöhnlich benutzt man die Finger, um die Enden des Hebers zu schließen; für die Überleitung vieler Flüssigkeiten (z. B. Säuren) aber wird ein Heber von der in Fig. 263 abgebildeten Gestalt benutzt. Der Heber wird leer in seine Lage gebracht und wird durch Ansaugen bei A in Tätigkeit versetzt, während das Ende B durch einen Wattebausch verschlossen ist. Sobald die Flüssigkeit den Bausch erreicht, wird die Öffnung frei und die Strömung nimmt ihren Fortgang.

Elftes Kapitel.

Allgemeine Gravitation. Potentialtheorie.

453. Potential einer homogenen Kugelschale. Die zwischen verschiedenen Teilchen wirksamen Gravitationskräfte sind schon im vierten Kapitel, aus Anlaß der Betrachtung von Arbeit und Energie, gestreift worden. Wir wollen sie jetzt ausführlicher behandeln. Die Resultate unserer Untersuchung finden zunächst Anwendung auf die Erscheinungen gravitierender Natur auf unserer Erde sowie auf die Mechanik der Himmelskörper, sodann aber auch auf die wichtigsten Grundfragen der Elektrizität und des Magnetismus, und es ist gut, wenn wir uns jetzt schon darauf vorbereiten, um nicht später die spezifisch elektrischen und magnetischen Betrachtungen zu oft störend unterbrechen zu müssen.

In § 198 wurde gezeigt, daß eine homogene Kugelschale auf einen äußeren Punkt P ein Potential ausübt gleich kM/r, wo k die sogenannte Gravitationskonstante, M die Masse der Schale und r die Entfernung des Punktes P von ihrem Mittelpunkte ist. Die von der Schale auf ein Teilchen von der Masse 1 ausgeübte Anziehungskraft ist daher kM/r^2. Denn die Arbeit beim Verschieben des Teilchens um dr, der Anziehungskraft entgegen, ist

$$kM\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r+dr}\right],$$

also $kM\,dr/r^2$; läßt man hierin den Faktor dr, mit dem die Arbeit proportional ist, fort, so erhält man als Kraft den Wert kM/r^2. Als positive Kraftrichtung pflegt diejenige gewählt zu werden, welche die Entfernung vergrößert, also vom Zentrum nach außen. Wir wollen die Kraft auf ein Teilchen von der Masse 1 im Punkte P die Feldstärke in P nennen und mit F bezeichnen; dann gelten also die Gleichungen:

$$V = k\frac{M}{r}, \qquad F = -k\frac{M}{r^2} = \frac{\partial V}{\partial r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

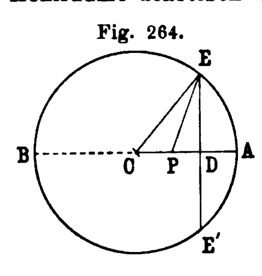
Wenn man in dieser Weise definiert, wird also die Kraft der positive Änderungsgrad des Potentials, während sie, wie wir im Abschnitt

Arbeit und Energie sahen, das Gefälle, also der negative Änderungsgrad der potentiellen Energie ist. Man muß sich in jedem Falle über diese Zeichenfestsetzung klar werden, da sonst leicht Widersprüche auftreten.

Es ist ein wichtiges Ergebnis der Erfahrung, daß die Kräfte, mit denen die verschiedenen Teile eines Körpers ein Teilchen anziehen, voneinander unabhängig sind, so daß die Gesamtanziehung einfach die Resultante der einzelnen ist — eine Tatsache, welche man als das Prinzip der Superposition der Anziehungen bezeichnet. Es wird allgemein als richtig angenommen, und die Übereinstimmung der aus ihm abgeleiteten Resultate mit der Erfahrung rechtfertigt jene Annahme glänzend.

Bis jetzt haben wir nur die Wirkung der Schale auf einen äußeren Punkt betrachtet; nunmehr wollen wir annehmen, daß der Punkt P im Inneren, d. h. in dem von der Schale umschlossenen Hohlraume liegt. Es läßt sich zeigen, daß das Potential für alle Punkte in diesem Hohlraume denselben Wert hat. Die Schale sei unendlich dünn, vom Radius a und von der Masse σ pro Flächeneinheit. Wir betrachten eine unendlich schmale Zone EE' senkrecht zum Radius CPA, Fig. 264. CP werden mit b, PE mit f, der Winkel ECP mit θ bezeichnet. Die Breite der Zone ist $a d\theta$, ihr Radius DE ist $a \sin\theta$, ihre Masse also $2\pi\sigma a^2 \sin\theta d\theta$ und ihr Potential auf den Punkt P gleich $2\pi k\sigma a^2 \sin\theta d\theta / f$. Für die ganze Schale ergibt sich somit:

Fig. 264.



$$V = 2\pi k\sigma a^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{f},$$

oder, da

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta,$$

und folglich

$$f df = ab \sin\theta d\theta,$$

oder endlich

$$\sin\theta d\theta = \frac{1}{ab} f df$$

ist, was man oben einsetzen kann:

$$V = 2\pi k\sigma \frac{a}{b} \int_{a-b}^{a+b} df = 4\pi k\sigma a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Hierin kommt die Lage des Punktes gar nicht vor, das Potential ist also für alle Punkte im Hohlraume dasselbe.

Ist die Schale nicht unendlich dünn, sondern von endlicher Dicke, so muß man, wenn ϱ die Volumendichte im Abstande x vom Zentrum

ist, über x vom inneren Radius a_0 bis zum äußeren a integrieren und erhält:

$$V = 4\pi k \int_{a_0}^{a} \varrho x \, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

was sich nur ausführen läßt, wenn man die Art und Weise kennt, in der ϱ von innen nach außen sich ändert; ist ϱ konstant, also die Kugelschale homogen, so wird

$$V = 2\pi k \varrho (a^2 - a_0^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

also wieder für alle Punkte im Hohlraume gleich groß.

Aus der Konstanz des Potentials folgt aber weiter, daß in dem Hohlraume die Feldstärke null ist; es gleichen sich, wie auch der Punkt liegen möge, die von den einzelnen Teilen der Kugelschale auf ihn ausgeübten Anziehungen gerade aus; er schwebt, wo er sich auch befinde, im Gleichgewicht.

454. Potential einer Vollkugel. Wir wollen jetzt die Anziehung einer Vollkugel betrachten, deren Dichte symmetrisch um den Mittelpunkt verteilt ist, d. h. die aus homogenen Kugelschalen aufgebaut gedacht werden kann, deren jede eine andere Dichte hat; die Dichte soll also nur von dem Abstande vom Mittelpunkte, nicht aber von dem, was man in Entlehnung eines Bildes von der Erde die geographische Breite und Länge nennen kann, abhängig sein.

Wir müssen jetzt die Fälle unterscheiden, in denen der Punkt, auf welchen die Kugel wirkt, im äußeren Raume oder in ihrem Inneren liegt, also einer ihrer eigenen Punkte ist.

Im ersteren Falle, also für einen äußeren Punkt, superponieren sich einfach die Wirkungen aller Schalen, aus denen die Kugel zusammengesetzt ist, und es ergibt sich, wenn M die Masse der ganzen Kugel ist, wieder

$$V = k\frac{M}{r}, \qquad F = -k\frac{M}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

d. h. die Wirkung einer Vollkugel auf einen äußeren Punkt ist so groß, als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre.

Im zweiten Falle, d. h. wenn der Punkt P in der Kugelmasse liegt, muß man die Kugel in zwei Teile zerlegen, nämlich in eine Kugel, auf deren Oberfläche, und in die übrigbleibende Hohlkugel, auf deren innerer Oberfläche der Punkt liegt. Ist der Abstand des betrachteten Punktes vom Mittelpunkte, also der Radius der kleineren Kugel b, ihre Masse m, so ist also das Gesamtpotential in P:

$$V = k\left(4\pi \int_{b}^{a} \varrho x \, dx + \frac{m}{b}\right).$$

Im einfachsten Falle, wenn die Kugel homogen, d. h. $\varrho = const.$ ist, hat man also:

$$V = 2\pi k\varrho\left(a^2 - \frac{1}{3}b^2\right),$$

und

$$F = -\frac{4\pi}{3}k\varrho b;$$

die Kraft ist also vom Kugelradius unabhängig, dagegen mit dem Abstande des Punktes vom Mittelpunkte proportional; sie ist also in der Oberfläche am größten, nimmt nach innen ab und wird im Mittelpunkte null.

Wenn dagegen die Kugel, statt homogen zu sein, eine von außen nach innen sich ändernde Dichte hat, liegt die Sache wesentlich anders. Es sei nämlich ϱ_m die mittlere Dichte der Kugel vom Radius b und ϱ die oberflächliche Dichte der Kugel. Dann ist

$$F = -\frac{4\pi}{3}k\varrho_m b.$$

Läßt man nun den Radius um db wachsen, so wird die mittlere Dichte:

$$\frac{\frac{4\pi}{3}\varrho_m b^3 + 4\pi\varrho b^2 db}{\frac{4\pi}{3}(b+db)^3},$$

also:

$$\varrho_m + 3(\varrho - \varrho_m)\frac{db}{b}\cdot$$

Alsdann ist:

$$F + dF = -\frac{4\pi}{3}k\left[\varrho_m + 3(\varrho - \varrho_m)\frac{db}{b}\right](b + db),$$

also:

$$dF = -4\pi k\left(\varrho - \frac{2}{3}\varrho_m\right)db.$$

Es ist also dF negativ, falls $\varrho > \frac{2}{3}\varrho_m$, d. h. die Feldstärke nimmt nach innen ab. Ist also die Massenverteilung derart, daß durchweg $\varrho_m < \frac{3}{2}\varrho$ ist, so nimmt die Kraft nach innen fortwährend ab; dagegen nimmt sie zu, wenn $\varrho_m > \frac{3}{2}\varrho$ ist.

Für die Erde, deren oberflächliche Dichte 2,6, deren mittlere Dichte 5,5 ist (vergl. 13. Kapitel), ist, wie man sieht, beim Hinabsteigen in die Tiefe zunächst der zweite Fall verwirklicht, d. h. die Kraft nimmt zu; da aber ϱ viel rascher wächst als ϱ_m, wird sehr bald der erste Fall eintreten, und von dieser Tiefe ab nimmt die Kraft wieder ab.

Endlich kann man die obigen Formeln für einen Punkt in der Masse einer Kugelschale verallgemeinern und erhält (a, a_0 Radien der Schale, b Abstand vom Mittelpunkte):

$$V = \frac{4\pi k}{b}\int_{a_0}^{b}\varrho x^2 dx + 4\pi k\int_{b}^{a}\varrho x dx,$$

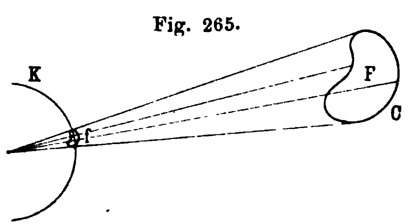
und, wenn die Schale homogen ist:

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{2\pi k \varrho}{b}\left(a^2 b - \frac{2}{3}a_0^3 - \frac{1}{3}b^3\right) \\ F &= -\frac{4\pi k\varrho}{3}\,\frac{b^3 - a_0^3}{b^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

In allen Fällen, wo es sich um das Potential im Inneren eines massiven Körpers handelt, entsteht eine Schwierigkeit infolge des Umstandes, daß man, um die Wirkung experimentell zu ermitteln, an den betreffenden Ort ein Teilchen bringen und zu diesem Zwecke den Körper daselbst aushöhlen muß, und es fragt sich, ob dadurch nicht der Fall wesentlich verändert wird, ob nicht die Wirkung des entfernten Teiles des Körpers in Betracht kommt. Denn wenn dieser Teil auch unendlich klein ist, so ist doch auch seine Entfernung von dem betrachteten Punkte unendlich klein. Gibt man nun dem Hohlraum die Gestalt einer kleinen Kugel um den Punkt als Mittelpunkt und bedenkt man, daß man innerhalb dieser kleinen Kugel die Dichte (wenn sie sich nicht gerade sprungweise ändert) als konstant betrachten kann, so hat man nach Gl. (4) $V = 2\pi k\varrho a^2$, und dieser Ausdruck verschwindet, wenn die Kugel kleiner und kleiner wird; die Herstellung eines kleinen kugelförmigen Loches in einem Körper von stetiger Dichte hat also auf das Potential des Körpers an der betreffenden Stelle keinen Einfluß.

455. Raumwinkel. Eine Größe, welche bei der Berechnung von Potentialen und Anziehungskräften eine wichtige Rolle spielt, ist der Raumwinkel oder körperliche Winkel, auch Kegelecke genannt. Man versteht darunter, wenn ein Punkt P und eine geschlossene Kurve C gegeben ist, das Flächenstück, welches der Inbegriff der sämtlichen von P nach den Punkten von C gezogenen Strahlen aus der Kugelfläche ausschneidet, welche um den Punkt P mit dem Radius 1 geschlagen wird. Es ist einleuchtend, daß durch den Raumwinkel dasjenige gemessen wird, was man die scheinbare Größe einer von der Kurve C eingeschlossenen Fläche, vom Punkte P aus gesehen, nennt. In Fig. 265 ist P der Punkt, C die Kurve, F eine von ihr eingeschlossene Fläche, K die Einheitskugel und f das von den Kegelstrahlen aus ihr ausgeschnittene Flächenstück.

Fig. 265.



Als Einheit des Raumwinkels dient bei dieser Definition offenbar das Quadrat des Kugelradius, gerade wie als Einheit von Linienwinkeln der Kreisradius dient. Für letzteren gibt es, wie wir wissen, noch eine andere Einheit, den Grad, und man kann aus ihm eine entsprechende

Einheit für Raumwinkel, den **Quadratgrad**, ableiten, indem man von dem Punkte P eine vierseitige Pyramide ausgehen läßt, deren vier Winkel daselbst je einen Grad messen. Nur besteht dabei ein wichtiger Unterschied: Der ganze Kreis enthält genau 360 Grade, die Kugelfläche hingegen enthält keine ganze Anzahl, sondern 41 252,96.. Quadratgrade.

Kehren wir von diesem Maße zu dem ursprünglichen zurück, so können wir in einigen einfachen Fällen den Raumwinkel ohne weiteres angeben. So ist, von jedem Punkte im Inneren einer beliebigen geschlossenen Fläche aus gesehen, deren scheinbare Größe gleich 4π, nämlich gleich der ganzen Oberfläche der Einheitskugel. Umgekehrt ist die scheinbare Größe irgend einer ebenen Fläche, von einem äußeren, in dieser Ebene gelegenen Punkte gesehen, gleich null. Der Raumwinkel von einem Punkte nach dem scharfen Rande einer beliebig großen um ihn geschlagenen Halbkugel ist 2π; rückt man dagegen

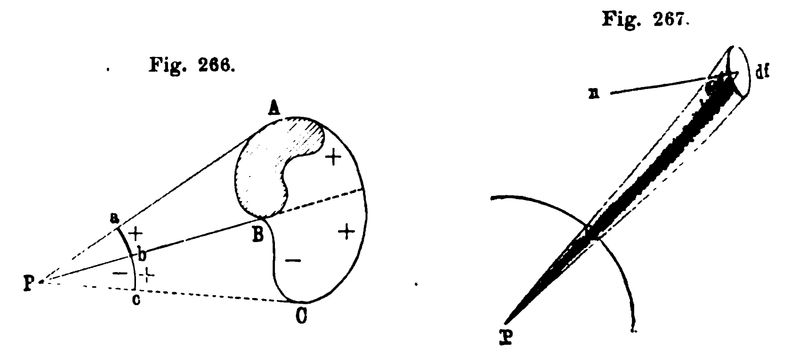


Fig. 266. Fig. 267.

mit dem Punkte weiter ab, so wird der Raumwinkel kleiner und kleiner. Ebenso ist der Raumwinkel eines Kugelquadranten vom Mittelpunkte aus gleich π, eines Kugeloktanten gleich $\pi/2$ (gleichviel ob dieser Oktant eine 45 gradige Zone von Pol zu Pol oder die Hälfte einer 90 gradigen Zone von Pol zu Äquator, also ein gleichseitig rechtwinkeliges Kugeldreieck ist) u. s. w.

Es sei beiläufig bemerkt, daß der Raumwinkel einer Kurve und die scheinbare Größe einer von ihr begrenzten Fläche doch nicht immer identisch ist; nämlich dann nicht, wenn die Fläche, von dem Punkte aus gesehen, über die Kurve sozusagen überhängt, wie in Fig. 266 angedeutet ist; man denke etwa an eine phrygische Mütze oder ein Schmetterlingsnetz. Dann ist nämlich der Raumwinkel der Kurve durch APB, die scheinbare Größe der Fläche aber, wenigstens wenn man nicht näher auf die Sache eingeht, durch APC dargestellt. Indessen muß man beachten, daß man innerhalb des Kegels APB die Fläche nur einmal, und zwar ihre Innenseite, in Kegel BPC hingegen doppelt hintereinander sieht, und zwar einmal von der Vorder-, das andere Mal von der Innenseite. Um diesen Gegensatz auszudrücken, kann man

die beiden Seiten der Fläche mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen, z. B. die Innenseite positiv, die Außenseite negativ rechnen; die beiden in bc zusammenfallenden Flächenprojektionen heben sich dann auf, und es bleibt nur ab übrig. In dieser Weise muß man z. B. in der Lehre vom Magnetismus und Elektromagnetismus verfahren, wo der Begriff der scheinbaren Größe eine wichtige Rolle spielt.

456. Allgemeiner Ausdruck für den Raumwinkel. Um nun ganz allgemein den Raumwinkel zu finden, betrachten wir eine ganz kleine und somit als eben anzusehende Fläche df und ziehen von allen ihren Randpunkten Strahlen nach dem Punkte P (Fig. 267); alle diese Strahlen werden mit der auf df errichteten Normalen n ungefähr denselben Winkel θ bilden. Die Projektion von df auf die zur Sehrichtung senkrechte Ebene ist alsdann $df\cos\theta$; dies ist der Ausschnitt, den der Kegel aus einer mit dem Radius r um P geschlagenen Kugel macht, wenn r die Entfernung zwischen P und df bedeutet; folglich wird der Ausschnitt, den derselbe Kegel aus der Kugel mit dem Radius 1 macht, gleich $df\cos\theta/r^2$ sein. Von diesem Werte, den man mit dS bezeichnen kann, kommt man nun durch Integration zum Raumwinkel für eine endliche Kurve bezw. zur scheinbaren Größe S einer endlichen, ebenen oder gekrümmten Fläche:

$$S = \int \frac{df\cos\theta}{r^2}.$$

Es bleibe dem Leser überlassen, sich Beispiele für diese Formel durchzurechnen. Nur sei noch bemerkt, daß sich die entgegengesetzten Vorzeichen in Fällen wie Fig. 266 aus dieser Formel dadurch ergeben, daß θ, wenn die Normale n immer nach außen gerichtet wird, das eine Mal stumpf, das andere Mal spitz, der $\cos$ also dort $-$, hier $+$ ist.

457. Kraftströmung oder Oberflächenintegral der Normalkraft. Kehren wir jetzt zur anziehenden Kugel zurück und schlagen wir um ihren Mittelpunkt eine Kugel, welche durch den äußeren Punkt P geht. Die Feldstärke F in P ist nach § 453 gleich $-kM/r^2$, also ist das Produkt aus Feldstärke und Kugelfläche durch P gleich $-4\pi kM$. Es läßt sich ein allgemeiner Satz ableiten, von dem diese Formel ein spezieller Fall ist.

Es sei in dem Kraftfelde eine geschlossene Fläche gegeben, in ihrem Elemente df sei die Feldstärke F, und θ sei der Winkel zwischen F und der nach außen gezogenen Normale von df. Dann ist

$$F.df\cos\theta \text{ oder } \frac{\partial V}{\partial n}\,df$$

das Kraftintegral über df oder, wie man es nennt, die Kraftströmung durch df. Durch Integration über irgend einen endlichen Teil der Fläche oder schließlich über die ganze Fläche erhält man die entsprechende Kraftströmung.

458. Gaußscher Satz. Unser Satz lautet nun folgendermaßen: Die Kraftströmung durch eine geschlossene Fläche im Felde einer mit dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportionalen Massenanziehung ist gleich der mit -4π und der Gravitationskonstanten multiplizierten Masse innerhalb der Fläche.

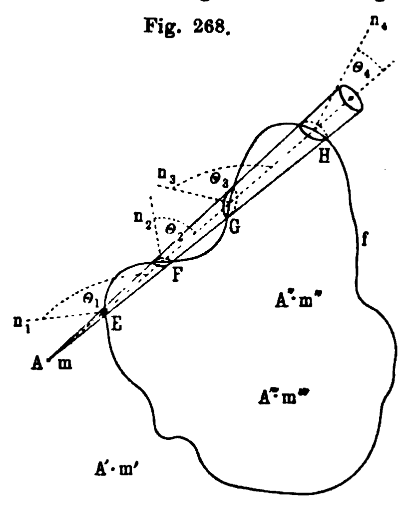


Fig. 268.

In Fig. 268 sei f die geschlossene Fläche, die Masse bestehe aus einzelnen Massenpunkten A, A', A'' ... mit den Massen m, m', m'' ..., von denen einige innerhalb, einige außerhalb der Fläche liegen mögen. Von A als Scheitel ziehe man einen schmalen Kegel, welcher A mit den Punkten einer kleinen geschlossenen Kurve c durch gerade Linien verbindet. Dieser Kegel wird in E, F, G, H kleine Flächenstücke aus der gegebenen Fläche herausschneiden, etwa die Flächen df_1, df_2, df_3, df_4, in den Abständen r_1, r_2, r_3, r_4 von A, also mit den Feldstärken $-km/r_1^2$, $-km/r_2^2$ u. s. w. Auf allen vier Schnittflächen errichte man die Normalen n_1, n_2 u. s. w., nach außen, die mit r die Winkel $\theta_1, \theta_2 \ldots$ bilden. Dann sind die betreffenden normalen Kraftströmungen:

$$\frac{-km\,df_1 \cos\theta_1}{r_1^2}, \quad \frac{-km\,df_2 \cos\theta_2}{r_2^2} \ldots, \quad \ldots$$

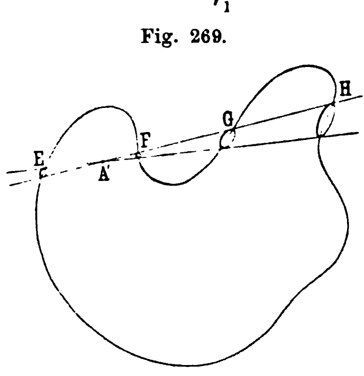


Fig. 269.

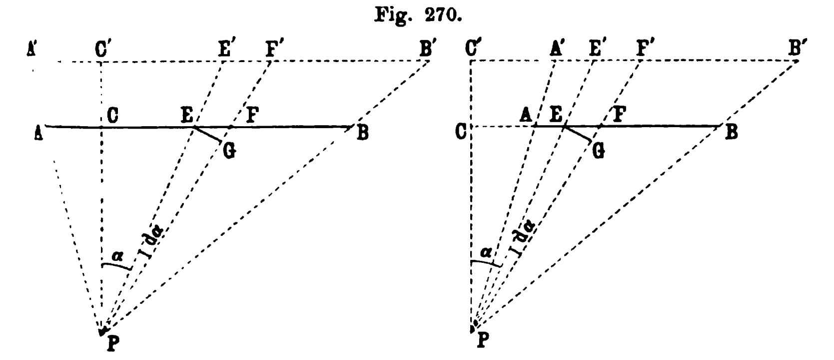
Das sind aber nach § 455 die mit $-km$ multiplizierten scheinbaren Größen der vier Schnittflächen. Diese scheinbaren Größen sind aber wegen des gemeinsamen Kegels alle vier dieselben, nur daß die Werte für die von der Außenseite gesehenen Flächen 1 und 3 wegen der Stumpfheit der Winkel θ_1 und θ_3 negativ, die beiden anderen positiv zu nehmen sind. Es heben sich also immer je zwei Werte auf; und da der Kegel von dem Außenpunkte A aus die gegebene Oberfläche jedenfalls eine gerade Anzahl von Malen schneidet, nämlich entweder gar nicht oder zweimal oder viermal u. s. w., so kommt null heraus. Äußere Massen tragen also zur Kraftströmung nichts bei.

Anders ein Kegel von dem Innenpunkte A' aus, Fig. 269; er hat stets zwei Austrittstellen mehr als Eintrittstellen, z. B. in der Figur die drei Austrittstellen E, F, H und nur die eine Eintrittstelle G; es bleiben also, wenn sich auch G und H gegeneinander fortheben, noch E und F übrig. Zieht man nun alle Kegel von A' aus, so erhält man auf diese Weise die scheinbare Größe einer geschlossenen Fläche von einem inneren Punkte aus, also nach § 455 den Wert 4π. Die Kraftströmung erhält also von dem Innenpunkte A' mit der Masse m' den Beitrag $-4\pi k m'$. Dasselbe gilt für alle Innenpunkte; ist also die Gesamtmasse im Inneren M, so ist die Kraftströmung, d. h. das Oberflächenintegral der Normalkraft gleich $-4\pi k M$, wie oben angegeben.

Dieser wichtige Satz ist von **Gauß** entdeckt worden; er läßt außerordentlich viele Anwendungen zu, und zwar in den verschiedensten Gebieten der Physik. Die in § 454 enthaltenen Formeln für die Feldstärken bezw. Potentiale von Kugeln oder Kugelschalen für äußere oder innere Punkte folgen aus ihm z. B. ganz unmittelbar, so daß die Ableitung dem Leser überlassen bleiben kann.

459. Potential von Linien und Streifen. Wir wollen nun eine Reihe von Fällen, die von praktischer Wichtigkeit sind, betrachten und

Fig. 270.



beginnen mit dem Potential einer längs einer geraden Linie AB (Fig. 270) gleichförmig verteilten Masse.

Von dem Punkte P, in dem das von der Linie herrührende Potential ermittelt werden soll, fälle man ein Lot auf AB, der Fußpunkt sei C. Ferner werde das Streckenelement EF der Linie mit ds, die lineare Dichte, d. h. die auf die Längeneinheit entfallende Masse mit σ, also die Masse von ds mit $\sigma\, ds$ bezeichnet; endlich sei r die Entfernung zwischen P und ds.

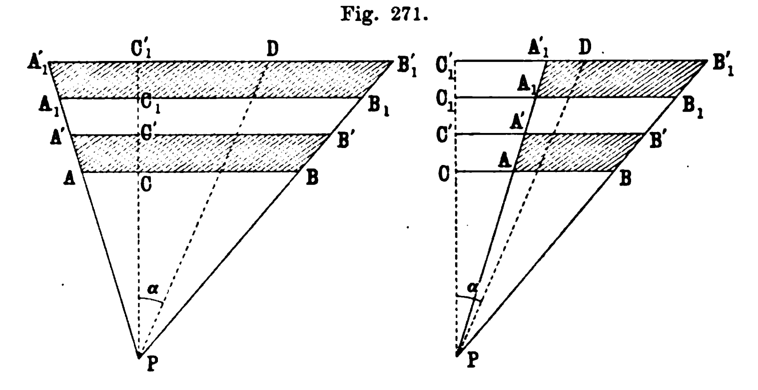
Das Potential in P hat alsdann, soweit es von dem Element ds herrührt, den Wert

$$V = k\sigma \frac{ds}{r}.$$

Um diesen Ausdruck in eine für gewisse Schlüsse geeignetere Form zu bringen, fälle man von E auf PF das Lot EG und bezeichne den Winkel CPE mit α, also den kleinen Zuwachs dieses Winkels beim Fortschreiten von E nach F, d. h. den Winkel EPF mit $d\alpha$; dann ist $r d\alpha/ds = \cos\alpha$, oder $ds/r = d\alpha/\cos\alpha$. Der Wert von V hängt also nur von den Werten von α und $d\alpha$ ab, er bleibt also ungeändert, wenn die Wirkung nicht von EF, sondern, bei gleicher linearer Dichte, von irgend einem anderen, mit EF parallelen, von den Strahlen PE und PF bezw. von ihren Verlängerungen eingeschlossenen Linienelemente, z. B. von $E'F'$ herrührt. Das gleiche gilt nun für sämtliche Elemente, die Wirkung bleibt ungeändert, wenn man AB durch $A'B'$ ersetzt, und man erhält den Satz: Das Potential auf einen Punkt P hat denselben Wert für alle mit P in einer Ebene liegenden, untereinander parallelen und gleicht dicht mit Masse belegten Linien, deren Endpunkte auf denselben beiden, von P ausgehenden Strahlen liegen.

460. Potential von Dreiecksstreifen auf dem Scheitel. Aus dem Gefundenen folgt ohne weiteres, daß die Potentiale zweier paralleler

Fig. 271.



Dreiecksstreifen, wie $ABB'A'$ und $A_1B_1B_1'A_1'$ in Fig. 271, auf die Spitze P des Dreiecks mit ihren Breiten proportional, also bei gleichen Breiten gleich sind. Hieraus kann man mit Leichtigkeit Schlüsse ziehen in Bezug auf das Potential homogener Dreiecke auf ihre Ecken. Übrigens gelten die Resultate offenbar auch dann, wenn die Dichte längs einer Linie oder eines Streifens variiert; sie muß es nur für alle in derselben Weise tun, d. h. es darf σ lediglich eine Funktion des Winkels α sein.

461. Potential eines homogenen Stabes. Kehren wir jetzt zum Potential der gleichförmigen Linie AB zurück, so haben wir:

$$V = k\sigma \int \frac{ds}{r}.$$

Nun ist aber, wenn s die variable Strecke CE (Fig. 270) und x die senkrechte Entfernung PC des Punktes von der Linie ist:

$$r = \sqrt{s^2 + x^2};$$

folglich erhält man:

$$V = k\sigma \int \frac{ds}{\sqrt{s^2 + x^2}}.$$

Unbestimmt integriert gibt dies:

$$log\left(s + \sqrt{s^2 + x^2}\right),$$

bestimmt integriert wird also:

$$V = k\sigma \, log \frac{CB + \sqrt{CB^2 + PC^2}}{\pm CA + \sqrt{CA^2 + PC^2}} = k\sigma \, log \frac{CB + PB}{\pm CA + PA} \quad \cdot \cdot \; (7)$$

wo das —Zeichen gilt, wenn A und B auf verschiedenen Seiten von C liegen (Fig. 270 links), das +Zeichen, wenn sie auf derselben Seite liegen.

Hieraus ergibt sich ohne weiteres die Wirkung einer homogenen rechteckigen Platte in der Ebene des Punktes.

Führt man die Winkel $CPA = \alpha_1$ und $CPB = \alpha_2$ ein, so nimmt V die Form an

$$V = k\sigma \, log \frac{cos\,\alpha_1\,(1 + sin\,\alpha_2)}{cos\,\alpha_2\,(1 + sin\,\alpha_1)} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; (8)$$

Gelegentlich sei bemerkt, daß hieraus eine wichtige Integralformel folgt; da nämlich, wie wir sahen, $ds/r = d\alpha/cos\,\alpha$ ist, so hat man (wenn nicht $cos\,\alpha$ zwischen α_1 und α_2 null wird):

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{cos\,\alpha} = log \frac{cos\,\alpha_1\,(1 + sin\,\alpha_2)}{cos\,\alpha_2\,(1 + sin\,\alpha_1)} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; (9)$$

Nun erstrecke sich die Linie von C aus nach beiden Seiten (Fig. 270 links), und es sei $CA = a$, $CB = b$, dann ist:

$$V = k\sigma \, log \frac{\sqrt{b^2 + x^2} + b}{\sqrt{a^2 + x^2} - a} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; (10)$$

Wenn a und b groß sind im Vergleich mit x, so erhält man:

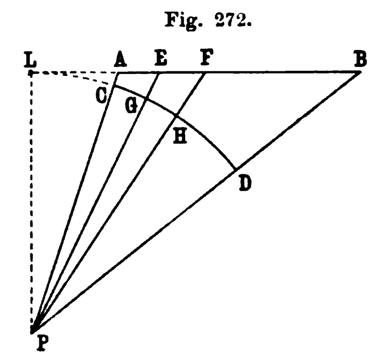
$$V = k\sigma \, log \frac{b + \frac{x^2}{2b} + b}{a + \frac{x^2}{2a} - a} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; (11)$$

also entwickelt:

$$V = 2\,k\sigma \, log \frac{2\sqrt{ab}}{x} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; (12)$$

462. Feldstärke eines gleichförmigen Stabes. In dem eben betrachteten Falle eines langen, von C aus nach beiden Seiten sich erstreckenden Stabes ist die Komponente der Kraft in der Richtung von P nach C gleich $-\partial V/\partial x$ oder $2k\sigma/x$, sie ist also mit dem Abstand PC, d. h. mit x umgekehrt proportional. Die Anziehung des Stabes auf ein Einheitsteilchen in P ist also dieselbe, wie sie stattfinden würde, wenn in C sich ein Teilchen von der Masse $2\,\sigma$ befände, und wenn die Anziehung mit der ersten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional wäre.

Fig. 272.



Die Anziehung der endlichen, geradlinigen und gleichförmigen Massenverteilung AB (Fig. 272) auf ein Teilchen in P ist ferner dieselbe wie die eines Kreisbogens CD, mit dem Mittelpunkte in P, von derselben Liniendichte σ, durch dieselben Strahlen PA und PB begrenzt wie AB und so gelegen, daß er die Verlängerung von BA in dem Fußpunkte L des von P gefällten Lotes berührt. Denn die Anziehung des Linienelementes EF auf ein Einheitsteilchen in P ist $k\sigma ds/r^2$; nun ist aber

$$ds = \frac{r\,d\alpha}{\cos\alpha} = \frac{r^2 d\alpha}{x},$$

und folglich:

$$\frac{k\sigma ds}{r^2} = \frac{k\sigma x\,d\alpha}{x^2};$$

$\sigma x d\alpha$ ist aber die Masse des entsprechenden Kreisbogenelementes GH und x ist seine Entfernung von P; die Anziehungen, die EF und GH ausüben, sind also gleich groß, und dasselbe gilt somit von den ganzen Linien.

463. Kraftlinien und Niveauflächen eines homogenen Stabes. Unmittelbar ergibt sich jetzt, daß die Feldstärke in P die Richtung der Linie von P nach dem Mittelpunkte des Kreisbogens CD, also die Richtung der den Winkel APB halbierenden Linie hat. Beschreibt man also eine Ellipse in der Papierebene mit A und B als Brennpunkten, so ist in jedem Punkte dieser Ellipse die Feldstärke nach der in ihm auf der Ellipse errichteten Normalen gerichtet. Es ist nicht schwer zu beweisen, daß der geometrische Ort von P eine Ellipse ist, wenn

$$\frac{LB + PB}{LA + PA} = const$$

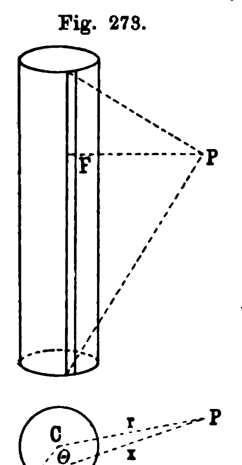
ist [vergl. Gl. (7)].

Ferner ist die Richtung der Feldstärke in P, da sie den Winkel APB halbiert, diejenige der in P an eine Hyperbel, die A und B zu Brennpunkten hat, gelegten Tangente. Ein Teilchen von der Masseneinheit würde sich also unter der anziehenden Wirkung von AB längs der Hyperbel, die durch es hindurchgeht, mit einer der Anziehung gleichen Beschleunigung fortbewegen. Die Hyperbel ist hiernach in diesem Falle eine Kraftlinie, d. h. eine Linie, die derart durch das Feld gezogen ist, daß die Kraft oder die Feldstärke in jedem ihrer Punkte die Richtung der daselbst an sie gelegten Tangente hat. Wir werden solche Kurven später ausführlicher behandeln.

Ebenso ergibt sich aus dem Gesagten, daß die Flächen gleichen Potentials, Äquipotentialflächen oder Niveauflächen, d. h. die Orte von Punkten, für welche das Potential V denselben Wert hat, in unserem Falle um AB als Axe mit AB als Brennpunkten beschriebene verlängerte Rotationsellipsoide sind. Auch hierauf wird später ausführlich eingegangen und es wird dann auch gezeigt werden, daß die Kraftlinien auf den Niveauflächen überall senkrecht stehen — eine Tatsache, die sich im vorliegenden Beispiele darin zeigt, daß die Feldrichtung in P den Winkel zwischen den Linien AP und BP halbiert.

464. Potential und Feldstärke einer langen zylindrischen Röhre. Das in Gl. (12) enthaltene Resultat kann nun benutzt werden, um das Potential einer langen, geraden, zylindrischen Röhre oder Schale von überall gleicher, unendlich kleiner Dicke und gleichförmiger Flächendichte zu bestimmen.

Fig. 273.



Wir betrachten einen unendlich langen geraden Streifen F des Zylinders, Fig. 273; sein senkrechter Abstand von dem Punkte P, auf den sich das Potential beziehen soll, sei x, der Radius sei c, die Entfernung des Punktes P von der Axe sei r, der Winkel zwischen dem von P nach F gezogenen Strahl und dem Radius CF sei θ (vergl. die untere Zeichnung). Endlich sei $cd\theta$ die Breite, τ die Dicke des Streifens und ϱ die Raumdichte des Materials; die Masse des Streifens für die Längeneinheit ist alsdann $\sigma = \varrho\tau c d\theta$. Nach Gl. (12) ist nun das Potential des Streifens, wenn angenommen wird, daß er sich nach den beiden Seiten bis in die beiden Entfernungen a, b von F erstrecke, gleich

$$2 k\varrho\tau c d\theta \log 2 \frac{\sqrt{ab}}{x}.$$

Nun ist aber

$$x^2 = r^2 + c^2 - 2rc\cos\theta,$$

und folglich wird obiger Ausdruck

$$2k\varrho\tau c d\theta \log 2\sqrt{\frac{ab}{r^2 + c^2 - 2rc\cos\theta}}.$$

Somit ist das Potential der ganzen Röhre

$$\left.\begin{aligned} V &= 2k\varrho\tau c\left[\log(2\sqrt{ab})\int_0^{2\pi} d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\log(r^2 + c^2 - 2rc\cos\theta)\,d\theta\right] \\ &= k\varrho\tau c\left[4\pi\log(2\sqrt{ab}) - \int_0^{2\pi}\log\left(1 + \frac{r^2}{c^2} - 2\frac{r}{c}\cos\theta\right)d\theta - 2\log c\int_0^{2\pi} d\theta\right] \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Das erste Integral ist $4\pi\log(r/c)$ oder null, je nachdem $r > c$ oder $r < c$. Hier handelt es sich um den ersteren Fall, es ist also:

$$V = k\varrho\tau c\left[4\pi\log(2\sqrt{ab}) - 4\pi\log\frac{r}{c} - 4\pi\log c\right]$$

oder vereinfacht

$$V = 4\pi k\varrho\tau c\log\frac{2\sqrt{ab}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Das Potential ist hiernach so groß, als wenn die ganze Masse des Zylinders in der Axe vereinigt wäre, woselbst sie alsdann die Liniendichte $2\pi\varrho\tau c$ hätte.

Für die Feldstärke in P erhält man:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{4\pi k\varrho\tau c}{r}.$$

Liegt der Punkt P im Innern der Röhre, so tritt der zweite der obigen Fälle, $r < c$, ein. Das erste Integral in (13) ist dann null, und es wird

$$V = 4\pi k\varrho\tau c\log\frac{2\sqrt{ab}}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Da dieser Ausdruck von r unabhängig ist, erhält man das Resultat, daß das Potential in jedem Querschnitte des Hohlraumes der Röhre konstant, die Kraft innerhalb jedes Querschnittes also null ist.

465. Potential einer zylindrischen Röhre von endlicher Dicke. Wir können nun zu einer Röhre von endlicher Dicke übergehen und ihr Potential für einen äußeren Punkt bestimmen; die Radien sollen c_1 (innen) und c_2 (außen) sein. Es ist einleuchtend, daß man diese Röhre in dünne koaxiale Schichten teilen kann, von deren jeder das obige Resultat gilt. Für die ganze Röhre hat man daher nur $2\pi c\tau$ in Gl. (14) durch $2\pi \cdot {}^1/_2(c_1 + c_2)(c_2 - c_1)$, d. h.

$$V = 2\pi k(c_2^2 - c_1^2)\varrho\log\frac{2\sqrt{ab}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Liegt anderseits der Punkt P innerhalb der Röhrenmasse, ist also $r > c_1$, aber $r < c_2$, so muß man das Potential V_1, das von der Masse bis zum Radius r herrührt, und das Potential V_2 der übrigen Masse getrennt betrachten und erhält:

$$V_1 = 2\pi k \varrho (r^2 - c_1^2) \log \frac{2\sqrt{ab}}{r} \quad \dots \dots \quad (17)$$

$$V_2 = 4\pi k \varrho \int_r^{c_2} c\,dc \log \frac{2\sqrt{ab}}{c} \quad \dots \dots \quad (18)$$

also durch Ausführung der Integration und Addition:

$$V = V_1 + V_2 = 2\pi k \varrho \left[c_2^2 \log \frac{2\sqrt{ab}}{c_2} - c_1^2 \log \frac{2\sqrt{ab}}{r} + \frac{1}{2}(c_2^2 - r^2) \right]. \quad (19)$$

Ist der Zylinder massiv, also $c_1 = 0$, so tritt an Stelle von (16)

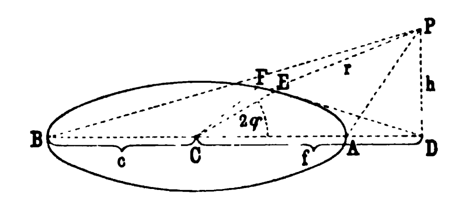
$$V = 2\pi k \varrho c_2^2 \log \frac{2\sqrt{ab}}{r} \quad \dots \dots \quad (20)$$

an die Stelle von (19):

$$V = 2\pi k \varrho \left[c_2^2 \log \frac{2\sqrt{ab}}{c_2} + \frac{1}{2}(c_2^2 - r^2) \right] \quad \dots \quad (21)$$

466. Potential einer gleichförmigen Kreislinie. Von Wichtigkeit ist auch das Potential einer homogenen Kreislinie. Die Liniendichte sei σ, der Radius c, AB die Schnittlinie des Kreises mit derjenigen auf seiner Ebene senkrechten Ebene, welche durch P und C geht; ferner sei h die senkrechte Entfernung des Punktes P von der Ebene und 2φ der Winkel zwischen CA und dem Radius CE nach irgend einem Punkte E des Kreises, also $2d\varphi$ der Winkel ECF zwischen den Radien nach den Endpunkten eines Elementes EF der Kreislinie; endlich sei $EP = r$. Verbindet man E mit D, so hat man $r^2 = h^2 + ED^2$ oder, wenn CD mit f bezeichnet wird,

Fig. 274.



$$r^2 = f^2 + c^2 + h^2 - 2cf \cos 2\varphi.$$

Ferner ist, wenn PA mit a, PB mit b bezeichnet wird,

$$a^2 = f^2 + c^2 + h^2 - 2cf$$
$$b^2 = f^2 + c^2 + h^2 + 2cf,$$

und

$$r^2 = (f^2 + c^2 + h^2)(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - 2cf(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$
$$= a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi.$$

Somit erhält man

$$V = 2 k \sigma c \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Es ist zu beachten, daß der Wert dieses Integrals durch Vertauschung von a und b nicht verändert wird; denn wenn man φ durch $\psi + \pi/2$ ersetzt, wird das Integral

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{b^2 \cos^2 \psi + a^2 \sin^2 \psi}} = \int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{b^2 \cos^2 \psi + a^2 \sin^2 \psi}},$$

also das ursprüngliche mit vertauschtem a und b. Folglich kann man schreiben:

$$\left.\begin{aligned} V &= 2 \frac{k\sigma c}{a} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= 2 \frac{k\sigma c}{b} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

sodaß also das Integral als $F(b/a)$ oder auch als $F(a/b)$ aufgefaßt werden kann, wo F eine bestimmte Funktion ist; im ersten Falle enthält aber V vor dem Integral noch den Faktor $1/a$, im zweiten den Faktor $1/b$.

Nun beschreibe man durch P einen auf der Kreisebene senkrechten Kreis, Fig. 275, der die Linie AB in zwei Punkten G, H schneidet,

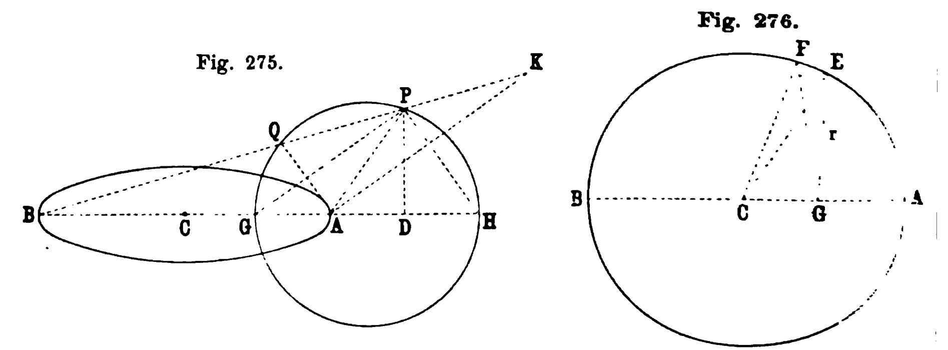


Fig. 275. Fig. 276.

welche dieselbe innerlich bezw. äußerlich im Verhältnis $a:b$ teilen; dann stehen bekanntlich auch die von irgend einem Punkte Q des neuen Kreises nach A und B gezogenen Strahlen im Verhältnisse $a:b$. Daraus folgt, daß man den Wert von V für P findet, wenn man das

Integral für G oder H auswertet; mit anderen Worten: Das Problem ist auf die Ermittelung des Potentials einer Kreislinie auf Punkte ihrer eigenen Ebene zurückgeführt.

Wir wollen für die Berechnung den Punkt G wählen, setzen $EG = r$, $CG = s$, Fig. 276; letzteres ist eine aus dem Radius c und den Abständen a, b sich ergebende, also bekannte Konstante; der Winkel ECG sei wieder 2φ. Dann ist das Potential V_g in G:

$$V_g = 2\frac{k\sigma c}{c-s}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \left(\frac{c+s}{c-s}\right)^2 \sin^2\varphi}} \quad . \; . \; (24)$$

Nun ist aber, wenn θ den Winkel AGE bezeichnet,

$$\frac{EF}{r} = \frac{d\theta}{\sin EFG} = \frac{d\theta}{\cos CFG},$$

und ferner:

$$\frac{\sin CFG}{\sin\theta} = \frac{s}{c}, \cos CFG = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 - s^2\sin^2\theta}.$$

Folglich ist:

$$\left.\begin{aligned} V_g &= 2k\sigma c\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{c^2 - s^2\sin^2\theta}} \\ &= 2k\sigma c\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{c^2\cos^2\theta + (c^2 - s^2)\sin^2\theta}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (25)$$

Stellt man jetzt (24) und (25) zusammen und bezeichnet mit F eine gewisse Funktion, so hat man:

$$V_g = \frac{2k\sigma c}{c-s}F\left(\frac{c+s}{c-s}\right) = 2k\sigma F\left(\frac{\sqrt{c^2-s^2}}{c}\right) \quad . \; . \; (26)$$

dabei ist zu beachten, daß, wenn $b > a$ angenommen wird,

$$\frac{c+s}{c-s} = \frac{b}{a}$$

ist.

Nun bezeichnen wir $c - s$ mit a_1, $c + s$ mit b_1 und bilden eine Folge von Größen a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4 in der folgenden Weise:

$$a_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad a_3 = \sqrt{a_2 b_2}, \quad b_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} \ldots$$

Dann ist

$$(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2) = \frac{1}{2}b_1 + \sqrt{a_1 b_1} - \frac{3}{2}a_1 > 0,$$

weil $b_1 > a_1$ ist; folglich ist

$$b_1 - a_1 > b_2 - a_2;$$

und da man dies fortsetzen kann, erhält man die Folge von Ungleichungen

$$b_1 - a_1 > b_2 - a_2 > b_3 - a_3 > b_4 - a_4 > \ldots$$

Wie man sieht, nehmen die Differenzen mehr und mehr ab, und für unendlich großes n wird $b_n = a_n$. Nun lautet (26), wenn man $c - s$ und $c + s$ durch a_1 und b_1 ersetzt:

$$V_g = \frac{2k\sigma c}{a_1} F\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = 2k\sigma F\left(\frac{\sqrt{a_1 b_1}}{c}\right);$$

es ergibt sich somit

$$\frac{1}{a_1} F\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = \frac{1}{a_2} F\left(\frac{b_2}{a_2}\right) = \cdots = \frac{1}{a_n} F\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{1}{a_n} F.$$

Damit wird das Integral ohne weiteres ausführbar, gibt π, und man erhält:

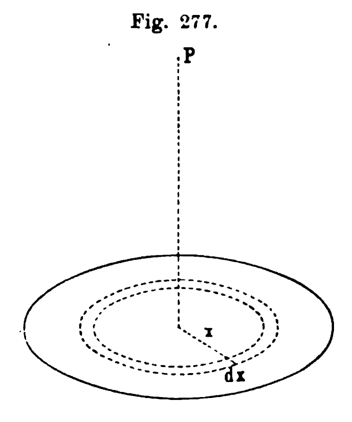
$$V_g = \frac{2\pi k\sigma c}{a_n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

worin man statt a_n im Nenner natürlich auch b_n schreiben könnte.

Der hier durchgeführte Rechnungsprozeß rührt von Gauß (Werke, Band III, S. 357) her; die Größe a_n oder b_n heißt nach ihm das arithmetisch-geometrische Mittel aus den Größen a und b. Tatsächlich ist die Methode eine Anwendung der bekannten Landenschen Transformation, durch welche ein elliptisches Integral der ersten Art, bezogen auf einen gegebenen Modul, in ein anderes derselben Art, bezogen auf einen anderen Modul umgewandelt wird. Wir hätten V_g direkt aus der bekannten Reihe für das vollständige elliptische Integral erster Art, wie es in den obigen Formeln vorkommt, finden können; die Ermittelung durch successive Annäherung, wie geschehen, ist aber interessanter.

467. Potential einer homogenen, dünnen, kreisförmigen Scheibe auf einen Punkt der Axe. Unter Axe ist die im Mittelpunkte der Kreisscheibe errichtete Normale zu verstehen, der Punkt auf ihr, auf den sich das Potential beziehen soll, sei P, Fig. 277.

Fig. 277.



Der Radius der Scheibe sei a, der Radius eines schmalen konzentrischen Ringstreifens x, also seine Breite dx, die gleichförmige Flächendichte σ, also die in dem Ringstreifen enthaltene Masse $2\pi\sigma x dx$ und, wenn h der Abstand des Punktes P von der Scheibe ist, das Potential des Streifens

$$V_x = 2\pi k\sigma \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{h^2 + x^2}};$$

dann wird durch Integration das Potential der ganzen Scheibe

$$V = 2\pi k\sigma \int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{h^2 + x^2}}.$$

Die unbestimmte Integration liefert $\sqrt{h^2 + x^2}$, und folglich die bestimmte

$$V = 2\pi k\sigma\left(\sqrt{h^2 + a^2} - h\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Speziell wird, wenn h klein gegen a ist:

$$V = 2\pi k\sigma a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

also nicht unendlich groß, sondern endlich, auch wenn P in den Mittelpunkt der Scheibe rückt; und zwar so groß, als ob statt der Scheibe eine Halbkugel um P vorhanden wäre mit der Flächendichte σ $\left(\text{nämlich } V = \frac{1}{2}\cdot 4\pi a^2 . k\sigma/a\right)$; oder auch so groß, als ob eine Masse mit der Liniendichte σa gleichförmig auf der Randlinie verbreitet wäre $\left(V = 2\pi a \cdot \frac{k\sigma a}{a}\right)$.

Die Anziehung der Scheibe auf ein Einheitsteilchen in einem beliebigen Axenpunkte P ist die Arbeit, welche, der Anziehung entgegen, geleistet wird, indem P um die Strecke δh entfernt wird, dividiert durch diese Strecke, d. h. es ist die Feldstärke

$$F = \frac{dV}{dh} = -2\pi k\sigma\left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

für sehr kleines h wird also

$$F = -2\pi k\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

also von dem Radius der Scheibe ganz unabhängig. Es ist zu beachten, daß, wenn man zwei Punkte betrachtet, deren einer dicht über, deren anderer dicht unter der Scheibe liegt, beide mit dieser Kraft nach der Scheibe hingezogen werden. Rechnet man also F in beiden Fällen in gleichem Raumsinne, so hat man für den einen Punkt $-2\pi k\sigma$, für den anderen $+2\pi k\sigma$, die Kraft erfährt also beim Durchgange des Punktes durch die Scheibe von unten nach oben einen Sprung von $-4\pi k\sigma$. Das Potential hingegen, welches keine Richtungsgröße ist, bleibt dabei stetig.

Diese Resultate sind von großer Bedeutung und werden weiterhin vielfache Anwendung finden.

468. Feldstärke in einem Punkte der Axe einer Kreisscheibe von endlicher Dicke. Hat die Scheibe endliche Dicke und die gleich-

förmige Raumdichte ϱ, so daß unter dm die Masse, unter f die Fläche einer Schicht von der Dicke dh verstanden,

$$m = \varrho f dh = \sigma . f,$$

Fig. 278.

also $\sigma = \varrho dh$ ist, so hat man für die von dieser Schicht herrührende Feldstärke:

$$F = -2\pi k \varrho dh\left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right);$$

und wenn man dies über alle Schichten der Scheibe, die von $PA = h_1$ bis $PB = h_2$ reichen möge (Fig. 278), integriert, so hat man für die ganze Feldstärke:

$$\left.\begin{aligned} F &= -2\pi k \varrho \int_{h_1}^{h_2} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}}\right) dh \\ &= -2\pi k \varrho \left[\left(h_2 - \sqrt{h_2^2 + a^2}\right) - \left(h_1 - \sqrt{h_1^2 + a^2}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Es lassen sich nun folgende Spezialfälle unterscheiden:

1. Sind h_1 und h_2 sehr klein gegen a, was nur der Fall sein kann, wenn die Scheibe sehr flach im Vergleich zu ihrer Fläche ist, so ergibt sich, wie zu erwarten war,

$$F = -2\pi k \varrho (h_2 - h_1) \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

2. Ist h_1 klein gegen h_2 und a, liegt P also sehr nahe über der Oberseite der dicken Scheibe, so ist

$$F = -2\pi k \varrho \left[h_2 + a - \sqrt{h_2^2 + a^2}\right] \quad \ldots \quad (33a)$$

3. Ist h_1 klein gegen h_2 und h_2 klein gegen a, so wird (durch Spezialisierung entweder von Fall 2 oder von Fall 3):

$$F = -2\pi k \varrho h_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

4. Ist h_2 groß gegen a und ist h_1 endlich, so ist:

$$F = -2\pi k \varrho \left(\sqrt{h_1^2 + a^2} - h_1\right) \quad \ldots \quad (34a)$$

5. Ist h_2 groß gegen a und h_1 klein gegen a, so ist:

$$F = -2\pi k \varrho a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

6. Sind h_1 und h_2 groß gegen a, so muß man beide Wurzeln in (32) binomisch entwickeln und erhält:

$$F = -2\pi k \varrho \cdot \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) \quad \ldots \quad (35a)$$

Einige dieser Fälle sind in Fig. 279 und 280 dargestellt.

Fig. 279.

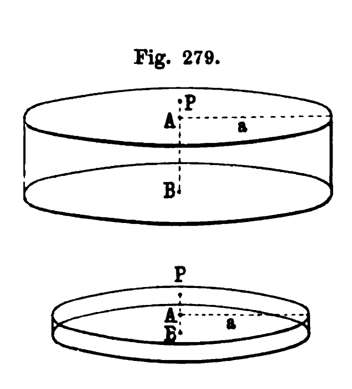
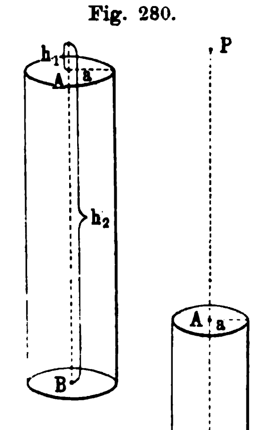


Fig. 280.



469. Gleichheit der axialen Feldstärke für einen langen Zylinder und des Potentials einer dünnen Scheibe. Die Formeln (34a) und (28) sind bis auf den Ersatz von σ durch ϱ identisch; daraus folgt, daß die durch einen langen Zylinder in einem Punkte der Axe erzeugte Feldstärke ebenso groß ist wie das Potential der das Ende des Zylinders bildenden dünnen Schicht, falls diese die Raumdichte des Zylinders zur Flächendichte hat. Dasselbe gilt von den speziellen Gleichungen (35) und (29). Der Satz ist natürlich auch ohne Rechnung einleuchtend. Er bildet ein Beispiel für die häufig vorhandene Möglichkeit, das Potential eines Gebildes durch Differentiation des Potentials eines anderen Gebildes zu erhalten; wir werden solche Fälle später näher kennen lernen.

470. Potential und Feldstärke einer linearen Massenverteilung. Wir finden den in § 469 aufgestellten allgemeinen Satz gleich noch einmal wieder bei der Betrachtung des Potentials eines dünnen Stabes auf einen in seiner Verlängerung gelegenen Punkt. Die Liniendichte (Masse für die Längeneinheit) sei μ, dann ist das Potential eines Stabelementes dx im Abstande x von P gleich $k\mu\, dx/x$; und folglich das der ganzen Linie:

$$V = k\mu \int_{h_1}^{h_2} \frac{dx}{x} = k\mu \log \frac{h_2}{h_1} \qquad (36)$$

wo h_1 und h_2 die Abstände des Punktes vom nahen und entfernten Ende der Linie sind. Für $h_1 = 0$, d. h. wenn sich der Punkt der Linie unendlich nähert, wird V logarithmisch unendlich.

Wenn ein Einheitsteilchen in P um dh_1 von dem Stabe entfernt

wird, ist die Arbeit — $F dh_1$, und um den gleichen Betrag dV wird sich dabei V herabmindern. Nun ist aber, da $dh_2 = dh_1$ ist:

$$- dV = k\mu dh_1 \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right).$$

Die Größe rechter Hand ist positiv und stellt den Überschuß des Potentials der Masse $k\mu dh_1$ im Punkte P am Stabende A über das Potential derselben Masse im anderen Ende B dar. Mit anderen Worten: Die Arbeit bei der Bewegung des Teilchens um dh_1 von A aus, oder die Arbeit bei der Bewegung des Stabes von dem Teilchen fort um dh_1 ist gleich der Arbeit bei der Bewegung der Masse μdh_1 durch die ganze Strecke AB.

Für die Feldstärke in P ergibt sich

$$F = - k\mu \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

d. h. die Feldstärke in P ist gleich der Differenz der Potentiale, die durch zwei Massenteilchen μ an den beiden Stabenden in P hervorgerufen werden.

Ist $h_2 = \infty$, so wird die Arbeit bei der Vergrößerung von h_1 um dh_1 gleich $k\mu dh_1/h_1$, also die Feldstärke, herrührend von einer unendlich langen gleichförmigen Linienmasse

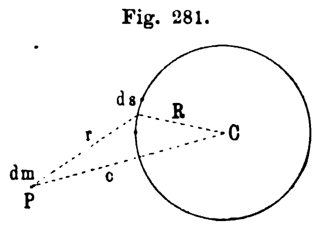
$$F = - k \frac{\mu}{h_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

d. h. gleich dem Potential der im endlichen Ende A sitzenden Masse μ. Rückt der Punkt dicht an die Linie heran, so wird die Feldstärke unendlich von der ersten Ordnung.

Einige der hier gegebenen Formeln sind vielfach im Gebrauch, z. B. in der mathematischen Theorie der Kapillarität.

471. Gaußscher Satz vom mittleren Kugelflächenpotential. Wir wollen nun einen sehr wichtigen Satz beweisen, den man Gauß verdankt, und von dem wir im folgenden zahlreiche Anwendungen machen werden. Man kann ihn folgendermaßen aussprechen:

Fig. 281.



Der Mittelwert der Potentialwerte in allen Punkten einer Kugelfläche ist, falls die wirkenden Massen lediglich außerhalb der Kugel liegen, gleich dem Werte des Potentials im Mittelpunkte der Kugel.

Es sei (Fig. 281) ds ein Flächenelement, r sein Abstand von einem der wirkenden Massenpunkte P mit der Masse dm und R der Kugelradius; dann erzeugt P in ds das Potential $k\,dm/r$, und der Mittelwert dieser Größe für alle Flächenelemente der Kugel wird

$$\frac{k\,dm \int \frac{ds}{r}}{4\,\pi\,R^2}.$$

Anderseits ist aber offenbar $k\,ds/r$ das Potential von Materie, die über ds mit der Flächendichte 1 verbreitet ist, auf P; und wenn man dies über die ganze Kugel summiert, erhält man, wie wir wissen, das Potential, welches in P stattfände, wenn die ganze Flächenmasse im Mittelpunkte der Kugel konzentriert wäre, also die Größe $4\,\pi k R^2/c$, wo c die Entfernung zwischen Kugelmittelpunkt und P ist; d. h. es ist

$$k \int \frac{ds}{r} = \frac{4\,\pi\,k\,R^2}{c}$$

oder anders geschrieben und mit dm multipliziert:

$$\frac{k\,dm \int \frac{ds}{r}}{4\,\pi\,R^2} = \frac{k\,dm}{c},$$

womit der Gaußsche Satz ausgesprochen ist, zunächst allerdings nur für das wirkende Masssenteilchen dm, nach dem Prinzip der Superposition aber für die Gesamtheit der äußeren Massen.

472. Allgemeinerer Satz vom Potential auf Kugelflächen. Der eben bewiesene Satz ist ein Spezialfall eines allgemeineren Theorems, das ebenfalls von Gauß herrührt. Es soll jetzt eine beliebige Kugel im Felde betrachtet werden, so daß die wirkenden Massen teils außerhalb, teils innerhalb derselben liegen. Das von dm in ds erzeugte Potential ist $k\,dm/r$; das Produkt hiervon mit ds, also $k\,ds\,dm/r$, kann anderseits auch aufgefaßt werden als Produkt von dm in das Potential $k\,ds/r$, welches von einer Masse von der Einheitsdichte auf ds am Orte von dm erzeugt wird.

Nun können wir die Summe dieser Produkte für die ganze Kugel und die ganze Massenverteilung auf zwei verschiedenen Wegen gewinnen, nämlich erstens indem wir $k\int dm/r$ bilden und alsdann die Summe der Produkte hiervon mit allen Kugelflächenelementen nehmen, oder zweitens indem wir zuerst $k\int ds/r$ bilden und dann die Summe der Produkte hiervon mit allen wirkenden Massenteilchen nehmen; dort erhalten wir $k\int ds \int dm/r$, hier $k\int dm \int ds/r$, also beide Male offenbar dasselbe. Wir wollen zunächst $\int ds/r$ berechnen. Für alle Punkte außerhalb der Kugel ist $k\int ds/r = 4\,\pi k R^2/c$, für innere Punkte ist es gleich $4\,\pi\,k\,R^2/R$, also $4\,\pi\,k\,R$, was nach dem früheren ohne weiteres einleuchtet. Teilt man also die ganze wirksame Materie in zwei Teile, eine äußere und eine innere, nennt ein Element der äußeren dm_e, die gesamte innere M_i und bezeichnet das Potential der gesamten Masse auf ds mit V, so erhält man

$$\int V\,ds = 4\,\pi\,k\,R^2 \int \frac{d\,m_e}{c} + 4\,\pi\,k\,R\,M_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Für $M_i = 0$ erhält man

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int V ds = k\int \frac{d m_e}{c} \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

also wieder den Gaußschen Spezialsatz. Es sei bemerkt, daß dieser Fall auf zweierlei Weise eintreten kann: erstens — und das ist bei gravitierender Materie der einzig mögliche Fall —, wenn überhaupt keine Massen im Kugelinnern vorhanden sind, und zweitens, wenn im Innern ebensoviel positive wie negative Masse enthalten ist; dieser Fall ist wichtig in der Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, und es wird später davon mehr die Rede sein.

Ist anderseits $dm_e = 0$, also keine äußere Masse vorhanden, so erhält man:

$$\int V ds = 4\pi k R M_i$$

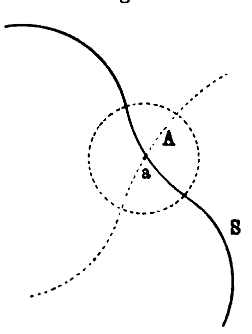
oder

$$\frac{1}{R}\int V ds = 4\pi k M_i \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

Hierin ist der Satz enthalten, daß das über die Kugel genommene Oberflächenintegral des Potentials, dividiert durch den Radius, gleich dem Oberflächenintegral der nach der inneren Normale wirkenden Kraft ist.

473. Folgerungen aus dem Gaußschen Theorem. Zunächst folgt aus dem Mittelwertsatze, Gl. (40), daß das von einer Verteilung gravitierender Materie herrührende Potential in keinem von wirksamen Massen freien Punkte des Feldes ein Maximum oder Minimum haben kann; denn wenn solch ein Punkt existierte, so könnte man um ihn als Mittelpunkt eine Kugel beschreiben, die so klein wäre, daß das Potential in jedem Punkte ihrer Oberfläche im Falle des Maximums kleiner, im Falle des Minimums größer wäre als das Potential im Mittelpunkte; damit würde dann aber auch das Mittel aller Oberflächenwerte dort kleiner, hier größer sein als der Zentrumswert, was dem Gaußschen Satze widersprechen würde.

Fig. 282.



Eine andere wichtige Folgerung aus dem Gaußschen Theorem ist diese: Wenn das Potential in einer Gegend des Feldes konstante Werte hat, dann muß es denselben Wert auch in jedem Punkte des Feldes haben, den man von jener Gegend aus erreichen kann, ohne den Weg durch wirksame Masse nehmen zu müssen. Denn es sei a ein Punkt hart innerhalb der Grenze S des Gebietes, durch welchen der Weg führt (Fig. 282); man kann dann um a eine Kugel schlagen, die so klein ist, daß sie keine wirksame Masse einschließt. Diese Kugel

wird annähernd zur Hälfte innerhalb, zur Hälfte außerhalb des Gebietes liegen. Das Potential im Mittelpunkte ist das konstante Potential der Gegend, dasselbe gilt von den innerhalb der Gegend liegenden Kugelteilen. Wäre nun das Potential der äußeren Teile ein anderes, so müßte es, da man die Kugel beliebig klein machen kann, in allen diesen äußeren Teilen entweder größer oder kleiner sein, und dies würde auch das Mittel aller Oberflächenwerte größer oder kleiner als den Zentrumswert machen, wodurch wiederum der Gaußsche Satz verletzt wäre. Die kleine Kugel gehört also noch vollständig mit zu unserem Gebiete konstanten Potentials. Auf diese Weise kann man, indem man Kugel auf Kugel hinzufügt, den in Rede stehenden Satz erhärten.

474. Indirekte Konsequenzen des Gaußschen Satzes. Etwas weniger direkt läßt sich folgender Schluß ziehen: Das von äußeren Massen herrührende Potential in irgend einem Punkte innerhalb einer geschlossenen Fläche kann nicht größer als das Maximum und nicht kleiner als das Minimum der Potentiale in den Oberflächen sein.

Der wichtigste Spezialfall ist der, wo das Potential auf der ganzen Oberfläche konstant ist: es muß dann auch im ganzen Innern denselben konstanten Wert haben.

Ein weiterer Satz setzt dem Potential im Raume außerhalb einer geschlossenen Fläche Grenzen, wenn es von inneren Massen herrührt, deren Summe null ist. Sind überhaupt keine wirksamen Massen vorhanden, so ist das Potential natürlich in jedem Punkte null; wir wollen aber den Fall betrachten, daß von der Fläche ebensoviel positive wie negative Materie eingeschlossen wird. Dann wird das Potential, da sein Oberflächenintegral über eine die Massen einschließende Kugel nach Gl. (39) null ist, in einigen Punkten des inneren Raumes positiv, in anderen negativ sein. Schlägt man nun nach und nach immer größere konzentrische Kugeln, so ist klar, daß sowohl die positiven wie die negativen Oberflächenwerte ihrem numerischen Werte nach immer kleiner werden. Man gelangt so zu dem Schlusse, daß die extremen Oberflächenwerte des Potentials äußerste Grenzen für die Werte sind, die es im äußeren Raume annehmen kann. Auch dieser Satz gewinnt nicht selten eine wichtige Bedeutung.

475. Berechnung der Feldstärke aus dem Potential. Das Potential in einem Punkte P mit den Koordinaten x, y, z, infolge der Wirkung von Teilchen, deren Koordinaten a, b, c sind, ist durch die Gleichungen

$$V = k \Sigma \frac{m}{r},$$

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (41\,\text{a})$$

bestimmt.

Nun ist

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - a}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y - b}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z - c}{r},$$

und folglich

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x - a}{r^3}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{y - b}{r^3}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = -\frac{z - c}{r^3}.$$

Für die Komponenten der Feldstärke in P, also für die Größen

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

(gemäß der Definition in § 453) erhält man daher

$$\left.\begin{aligned} X &= -k\Sigma m \frac{x - a}{r^3} \\ Y &= -k\Sigma m \frac{x - b}{r^3} \\ Z &= -k\Sigma m \frac{z - c}{r^3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (42)$$

476. Laplacesche Gleichung für das Potential. Nun sei P ein Punkt außerhalb der wirksamen Massen. Wir differenzieren noch einmal nach x, y, z, beachten, daß

$$\frac{\partial\left(\frac{x - a}{r^3}\right)}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - (x - a)\frac{x - a}{r} \cdot \frac{3}{r^4} = \frac{r^2 - 3(x - a)^2}{r^5}$$

ist, und erhalten

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -k\Sigma m \frac{r^2 - 3(x - a)^2}{r^5} \\ \frac{\partial Y}{\partial y} &= \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -k\Sigma m \frac{r^2 - 3(y - b)^2}{r^5} \\ \frac{\partial Z}{\partial z} &= \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -k\Sigma m \frac{r^2 - 3(z - c)^2}{r^5} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (43)$$

Addiert man diese Gleichungen mit Rücksicht auf Gl. (41a), so findet man, daß die rechte Seite verschwindet. Es ist also:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (44)$$

oder in V geschrieben

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (45)$$

Diese Gleichung, die zu den berühmtesten und wichtigsten der Physik gehört, heißt die Laplacesche Gleichung. Sie wird gewöhn-

lich, indem für die Summe der zweiten Differentialquotienten einer Größe nach den Koordinatenaxen das Zeichen $\triangle$ benutzt wird, in der Form

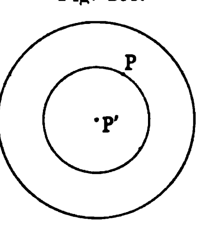
$$\triangle V = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (45\,\mathrm{a})$$

geschrieben. Bei allen Potentialproblemen handelt es sich darum, Lösungen dieser Gleichung zu finden, die außerdem gewissen Grenzbedingungen für den Rand des Feldes genügen.

Es sei daran erinnert, daß wir die Laplacesche Gleichung, wenn auch nicht unter diesem Namen, schon einmal erhalten haben, nämlich als Kontinuitätsgleichung einer inkompressiblen, nicht wirbelnden Flüssigkeit (§ 356), wo sie von dem Geschwindigkeitspotential erfüllt wird. Es ergibt sich daraus eine gewisse formale Verwandtschaft der beiden Klassen von Problemen.

477. Poissonsche Gleichung. Die Laplacesche Gleichung ist nur ein spezieller Fall einer allgemeineren Gleichung, welche als Poissonsche Gleichung bezeichnet wird und auch für Orte gilt, in denen sich wirksame Masse befindet.

Fig. 283.



Es sei ϱ die Raumdichte der Materie in P, $\varrho + \delta\varrho$ dieselbe im Abstande δs von P; wenn alsdann, so klein und in welcher Richtung δs auch genommen werden möge, das Verhältnis $\delta\varrho\ \delta s$ endlich bleibt, so sagt man, die Dichte ändere sich um P herum stetig. Dies ist im folgenden vorausgesetzt.

Man nehme nun einen Punkt P' sehr nahe bei P und schlage um ihn als Mittelpunkt eine Kugel mit $PP' = r$ als Radius, so daß P auf ihrer Oberfläche liegt und von der in ihr enthaltenen Masse die Einwirkung $\frac{4\pi}{3} k\varrho\, r^3/r^2 = \frac{4\pi}{3} k\varrho\, r$ erfährt; die Anziehungskomponente in der x-Richtung ist daher, wenn die Koordinaten von P mit $x - \xi$, $y - \eta$, $z - \zeta$, die von P aber mit x, y, z bezeichnet werden und Anziehung wieder negativ gerechnet wird, gleich $-\frac{4\pi}{3} k\varrho\, r \,.\, \xi/r$ $= -\frac{4\pi}{3} k\varrho\,\xi$; und da für die anderen Komponenten Entsprechendes gilt, hat man:

$$X = -\frac{4\pi}{3} k\varrho\,\xi, \quad Y = -\frac{4\pi}{3} k\varrho\,\eta, \quad Z = -\frac{4\pi}{3} k\varrho\,\zeta.$$

Nimmt man statt P einen um $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ mehr nach außen gelegenen Punkt, so hat man als Unterschiede gegen vorhin:

$$dX = -\frac{4\pi}{3} k\varrho\, d\xi, \quad dY = -\frac{4\pi}{3} k\varrho\, d\eta, \quad dZ = -\frac{4\pi}{3} k\varrho\, d\zeta.$$

Identifiziert man jetzt $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ mit dx, dy, dz, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=-4\pi k\varrho \\ \text{oder, in } V \text{ ausgedrückt:} \\ \triangle V=-4\pi k\varrho\end{array}\right\} \quad \dots \quad (46)$$

In Worten besagt die Poissonsche Gleichung: Die Summe der zweiten Differentialquotienten des Potentials nach den Koordinatenaxen ist gleich dem $(-4\pi k)$ fachen der Massendichte an der betreffenden Stelle, also gleich null im freien Raume (Laplacescher Spezialfall).

Der Leser vergleiche diesen Satz mit dem in § 456 aufgestellten, welcher von dem Oberflächenintegral der Normalkraft handelt und es gleich dem $4\pi k$ fachen der eingeschlossenen Masse (hier Dichte) setzt; integriert man also die Poissonsche Gleichung über den ganzen von jener Oberfläche begrenzten Raum, so erhält man

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, ds = \int \triangle V . d\tau \quad \dots \dots \quad (46\,a)$$

wo $d\tau$ ein Element des Raumes ist. Diese Gleichung hätte man auch rein analytisch-geometrisch ableiten können. Die Laplacesche bzw. die Poissonsche Gleichung ist also mit den Gleichungen

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, ds = 0 \ \text{ bzw. } \int \frac{\partial V}{\partial n}\, ds = -4\pi k M_i \quad \dots \quad \begin{cases}(46\,b)\\(46\,c)\end{cases}$$

völlig äquivalent.

Eine sehr anschauliche Deutung der Größe $\triangle V$ sowie der beiden für sie geltenden Gleichungen $\triangle V = 0$ bzw. $\triangle V = -4\pi k\varrho$ hat Mach gegeben. Es ist nämlich $\triangle V$, wie aus seiner Zusammensetzung aus zweiten Differentialquotienten unmittelbar folgt, die Abweichung des Wertes, den V in dem betreffenden Punkte hat, von dem Mittelwerte aller Werte, die es in der Umgebung des Punktes hat. Es ist das derselbe Gedanke, der in dem schon oben § 355 eingeführten Begriff „Divergenz" zum Ausdruck gelangt. Die Laplacesche Gleichung sagt also aus, daß im freien Raume diese Abweichung null, das Potential also in jedem Punkte gleich dem Mittel aller Werte in der Umgebung ist, d. h. sie ist ein anderer Ausdruck des Gaußschen Mittelwertsatzes; im masseerfüllten Raume weicht dagegen der Wert in einem Punkte vom Mittelwerte der Umgebung ab, und dies drückt die Poissonsche Gleichung aus.

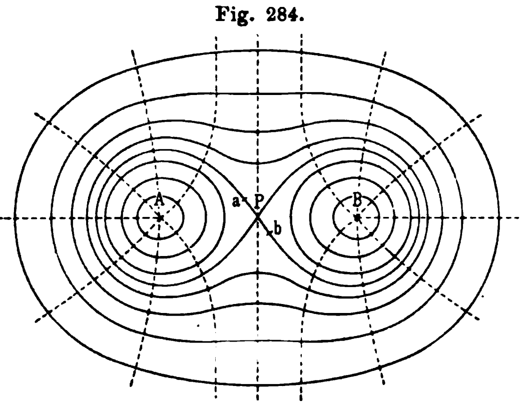
Man kann sogar hierauf eine Definition der Dichte gründen gemäß der Formel

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\triangle V = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) \quad \dots \quad (46\,d)$$

eine Definition, die z. B. für die elektrische Dichte von Wichtigkeit geworden ist.

478. Äquipotentialflächen. Gleichgewichtspunkte. Zeichnung von Kraftfeldern. Eine in einem Gravitationsfelde gezogene Fläche, in deren sämtlichen Punkten das Potential denselben Wert hat, heißt Äquipotentialfläche oder Niveaufläche. Da das Potential in jedem Punkte des Feldes nur einen Wert hat, können sich zwei verschiedene Niveauflächen nicht schneiden. Indessen kann es vorkommen, daß eine Niveaufläche sich selbst schneidet, auch kann sie aus zwei getrennten Teilen bestehen. So zeigt z. B. Fig. 284 im Durchschnitt durch die Papierebene die Niveauflächen, welche von zwei in den Punkten A und B konzentrierten gleichen Massen herrühren. Die inneren Niveaulinien (Schnitte der Niveauflächen mit dem Papier) sind zweiteilig, dann kommt eine in Form einer liegenden Acht, die äußeren sind dann zusammenhängend.

Fig. 284.



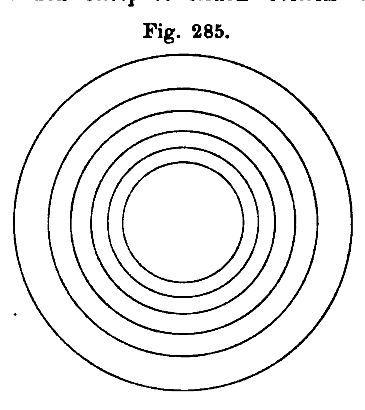
Der Doppelpunkt P der achtförmigen Linie ist nun ein solcher Punkt, in welchem sich eine Niveaufläche selbst schneidet. Er heißt Gleichgewichtspunkt, weil in ihm die Kraft null ist. Man sieht dies schon deshalb ein, weil hier die beiden wirkenden Massen gleich stark nach links und rechts und gar nicht nach oben und unten wirken; es folgt aber auch daraus, daß in den Nachbarpunkten a und b die Kraft nach der Außenseite der betreffenden geschlossenen Fläche, also in b entgegengesetzt wie in a gerichtet ist, in P also ihr Zeichen wechseln und somit null sein muß. Solche Punkte treten auf, wo zwei Niveauflächen, deren jede von einer anderen Massenverteilung herrührt, sich berühren und die Gefälle $\partial V / \partial n$ für beide gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Unter Umständen kann es sogar ganze Gleichgewichtslinien geben, wie bei zwei unendlich langen, geraden und parallelen homogenen Stäben, deren Niveauflächen (einzeln genommen) Kreiszylinder sind, und von denen zwei sich der ganzen Länge nach berühren. Eine eingehende Diskussion der Gleichgewichtspunkte in elektrischen Feldern hat Maxwell in seinem großen Lehrbuche der Elektrizität und des Magnetismus, Bd. I, Kap. 6 gegeben; auf den beigefügten Tafeln sind einige Fälle veranschaulicht.

Die Niveauflächen schließen sich natürlich, da der Wert des Poten-

tials sich stetig ändert, unmittelbar aneinander, und es ist deshalb beim Zeichnen eines Feldes notwendig, eine gewisse Auswahl zu treffen; man tut dies zweckmäßig in der Weise, daß das Potential auf zwei benachbarten Flächen immer um gleichviel verschieden ist. So sind z. B. in Fig. 285 die Niveauflächen um eine homogene Massenkugel herum dargestellt, und zwar für $V = n$, $V = n - 1$, $V = n - 2$ u. s. w.; da in diesem Falle $V = m/r$ ist, wo r den Abstand vom Zentrum bedeutet, so verhalten sich die Radien der Niveaukugelflächen wie $1/n : 1/(n-1) : 1/(n-2)$ u. s. w., die Kugeln rücken also nach außen hin immer weiter auseinander.

Die Verschiedenheit in dem Abstande benachbarter Niveauflächen veranschaulicht dabei unmittelbar die Verschiedenheit der Feldstärke an den entsprechenden Stellen des Feldes. Denn wo jener Abstand klein ist, ändert sich das Potential schon auf einer kleinen Strecke um einen bestimmten Wert, um den es sich an einer Stelle, wo der Abstand groß ist, erst auf dieser großen Strecke ändert; die Zunahme auf der Streckeneinheit ist also dort groß, hier klein; dies ist aber die Feldstärke. Genauer gesagt: Die Differenz der V-Werte zwischen zwei Nachbarflächen ist nach unserer Übereinkunft überall dieselbe, etwa δV, oder wie man auch sagen kann, wenn δn der Abstand der Niveauflächen ist, gleich $\delta V/\delta n . \delta n$; der erste Faktor $\delta V/\delta n$ dieses Produktes ist aber die Feldstärke F. Man hat also die Beziehung

Fig. 285.



$$F . \delta n = const.,$$

es ist also die Feldstärke mit dem Abstande der Niveauflächen umgekehrt proportional; und zwar gilt dies sowohl, wenn man in der die Niveauflächen durchschneidenden Richtung, als auch, wenn man in dem Raume zwischen zwei Niveauflächen fortgeht; in dem Falle der Fig. 285 nimmt also in radialer Richtung die Feldstärke ab, in den Ringen aber ist sie konstant.

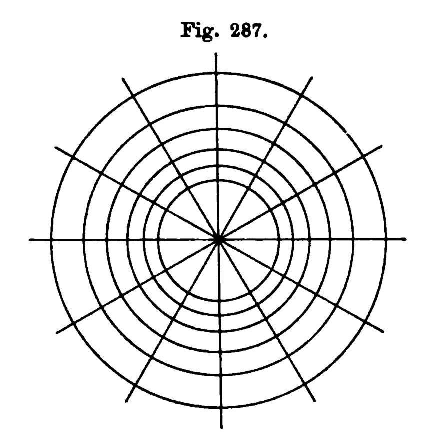
Kurz gesagt: In dem Maße, wie die Niveauflächen dichter beieinander oder weiter auseinander liegen, ist die Feldstärke größer oder kleiner. In Fig. 286 ist sie z. B. bei a am größten, bei b kleiner, bei c noch kleiner, bei d am kleinsten.

479. Kraftlinien. Wie wir bereits wissen, ist die Komponente der Feldstärke in irgend einer Richtung gleich dem Zuwachsgrade des Potentials in dieser Richtung. Da nun in einer Niveaufläche das

Potential konstant ist, gibt es keine in sie fallende Kraftkomponente, die resultierende Kraft steht somit senkrecht auf ihr. Zeichnen wir also in dem Kraftfelde außer dem System der Niveauflächen auch das System der sie überall senkrecht schneidenden Linien, so erhalten wir

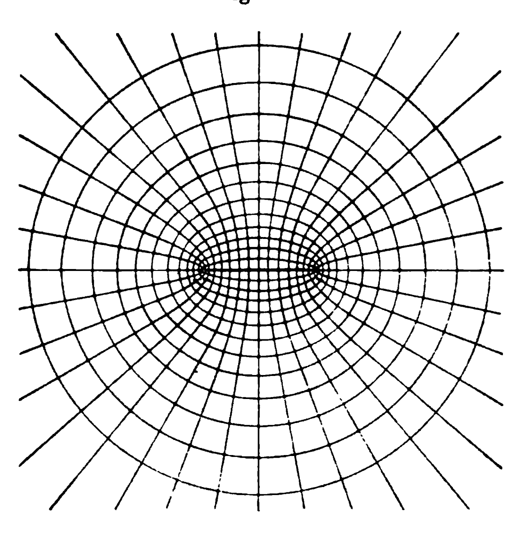
Fig. 286.

Fig. 287.



das System der sogenannten Kraftlinien. Wenn ein freies Teilchen von der Masse 1 sich lediglich unter der Wirkung einer anziehenden Massenverteilung bewegt, so bewegt es sich in einer Kraftlinie, und zwar mit einer der Feldstärke gleichen Beschleunigung.

Fig. 288.



Die Kraftlinien lassen sich mit den früher behandelten Stromlinien in Parallele stellen und verhalten sich zu den Flächen gleichen Potentials wie die Stromlinien zu den Flächen gleichen Geschwindigkeitspotentials. Man kann sich auf Grund dieses Vergleichs die Kraft als etwas Strömendes vorstellen und in diesem Sinne zunächst ganz allgemein von Kraftströmung sprechen.

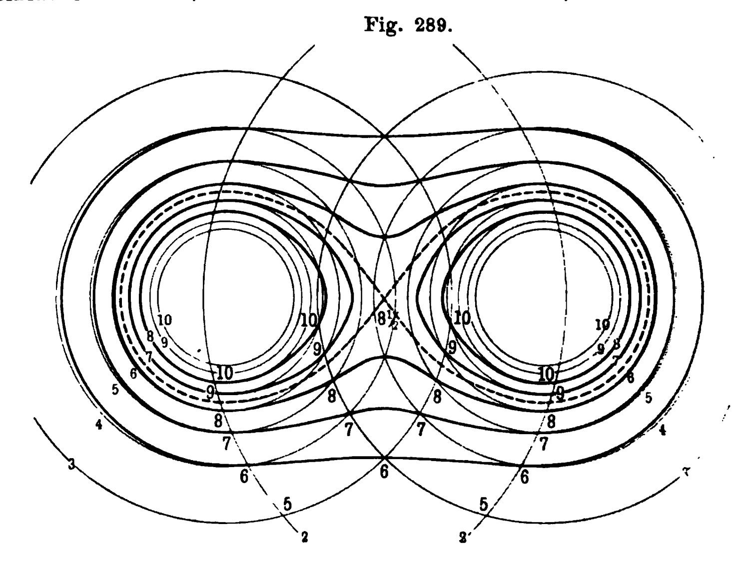
Beim Zeichnen einer Kraftlinie kann man irgendwo beginnen, senkrecht zu den Niveauflächen fortschreiten und dies nach beiden Seiten entweder bis in die Unendlichkeit oder bis zu einer Stelle fort-

setzen, wo die Linie mit anderen Kraftlinien zusammenstößt; solche Punkte werden Kraftpole oder, um obiges Bild fortzuführen, Quellen oder Senken von Kraft (wie früher Quellen und Senken von Flüssigkeit) sein; eine Kraftquelle wird dabei durch positive, eine Senke durch negative Materie dargestellt.

In Fig. 287 (a. v. S.) sind, in Vervollständigung der Fig. 285, die Kraftlinien einer homogenen Kugel, in Fig. 284 (gestrichelte Linien) diejenigen zweier gleicher Massenpunkte dargestellt; Fig. 288 bezieht sich auf eine homogene Massenlinie, wie sie durch die starke Linie in der Mitte dargestellt ist. Wie gezeigt wurde, halbiert die Kraftlinie in jedem Punkte den Winkel zwischen den von ihm nach den Stabenden gezogenen Linien, die Niveaukurven sind daher konfokale Ellipsen, die Kraftlinien konfokale Hyperbeln mit den Stabenden als Brennpunkten; die Niveauflächen selbst, von denen die Niveaukurven die Schnitte mit der Papierebene sind, sind daher konfokale Rotationsellipsoide mit der Polaraxe in der Stabrichtung.

480. Graphische Konstruktion von Niveaukurven. Eine sehr einfache Methode, um Niveaukurven zu zeichnen, wenn zwei Kraft-

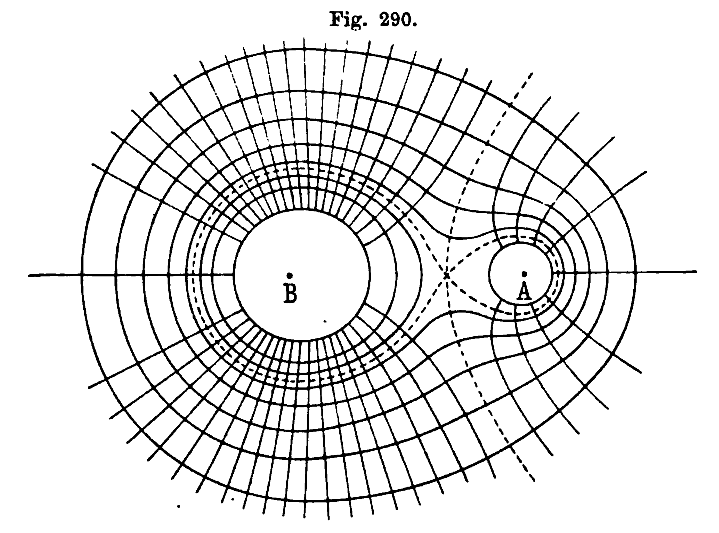
Fig. 289.



quellen (oder eine Quelle und eine Senke) vorhanden ist, besteht in der Superposition der von den beiden Zentren einzeln herrührenden Niveaulinien; sie ist durch Maxwell, wenn nicht erfunden, so doch zuerst in weiteren Kreisen bekannt geworden. In der Fig. 289 ist diese Methode an dem im Ergebnis schon durch Fig. 284 repräsentierten Beispiele zweier gleich starker Quellen veranschaulicht; die jeder Quelle für sich entsprechenden Niveaulinien sind durch schwache Kurven

(Kreise) und kleine Zahlen, die durch Superposition gewonnenen Niveaulinien des ganzen Systems durch die starken Kurven und größeren Zahlen dargestellt; die Kurve 6 z. B. ist durch die sämtlichen Punkte gelegt, in denen die Summe der Einzelpotentialwerte beider Quellen gleich 6 ist (3 + 3, 2 + 4,4 + 2 u. s. w.), entsprechend die anderen Kurven. Die Kurve $8^1/_2$ ist die mit dem Doppelpunkt (sie ist gestrichelt, weil eigentlich nur die ganzzahligen Kurven in die Zeichnung gehören), die Kurven 9 u. s. w. bestehen aus zwei getrennten Stücken. Hätte man eine Quelle und eine Senke, so müßte man die geometrischen Orte nicht der Summen, sondern der Differenzen der Einzelpotentialwerte aufsuchen. Während die Kurven der Fig. 289 Symmetrie besitzen, ist es bei zwei Quellen von verschiedener Stärke ($m_1 = 5$, $m_2 = 20$)

Fig. 290.



nicht mehr der Fall, wie Fig. 290 zeigt (in der außer den Niveaulinien auch die Kraftlinien gezogen sind). Die Einzelkurven sind hier nämlich zwar auch Kreise, aber die ihnen zugehörigen Zahlen sind bei gleichen Radien nicht gleich, sondern stehen im Verhältnis von 1 : 4.

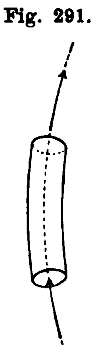
Augenscheinlich läßt sich die Methode auch auf drei (und mehr) Zentren anwenden; man braucht nur das erste und das zweite und dann mit dem Resultate das dritte zu superponieren.

481. Reziprozität zwischen Niveaulinien und Kraftlinien. Wie wir gesehen haben, bilden die Niveaulinien und Kraftlinien in einer ebenen Zeichnung zwei aufeinander in allen Schnittpunkten senkrechte Kurvenscharen. Man kann daher jede von beiden Scharen als die der Niveaulinien bezw. die der Kraftlinien betrachten, wenn man nur die jedem der beiden Fälle entsprechenden Kraftzentra anzugeben vermag. Dieses konjugierte Verhältnis ist zuweilen von großer Wichtig-

keit. In Fig. 284 oder 290 sind z. B., wenn A und B gravitierende Massen oder magnetische Pole sind, die geschlossenen Kurven die Niveaulinien, die anderen, nach außen hin abgebrochenen, die Kraftlinien; sind dagegen A und B die Durchschnitte der Papierebene mit auf ihr senkrechten elektrischen Strömen, so ist es gerade umgekehrt, die Rollen sind vertauscht. In der Lehre von der Elektrizität und dem Magnetismus wird hierauf näher eingegangen werden.

482. Kraftröhren oder Kraftfäden. Auf einer im Kraftfelde befindlichen Niveaufläche wollen wir irgend eine geschlossene Kurve von kleinen Dimensionen zeichnen und durch jeden ihrer Punkte die Kraftlinie legen; das röhrenförmige Gebilde (Fig. 291), das wir dann erhalten, wird Kraftröhre oder Kraftfaden genannt. Betrachten wir ein bestimmtes Stück desselben, so gelegen, daß in den Endquerschnitten dq_1 und dq_2 die Feldstärke F_1 bezw. F_2 ist. Das gesamte Oberflächenintegral der zur Oberfläche nach außen normalen Kraftkomponente, d. h. die Kraftströmung (s. § 457), ist dann, da die Mantelfläche offenbar keinen Beitrag liefert (weil sie selbst aus Kraftlinien besteht), gleich $-F_1 dq_1 + F_2 dq_2$. Dieses Integral muß, falls im Inneren keine Quelle noch Senke, also keine gravitierende Masse sich befindet, null sein, und man hat daher die Gleichung

Fig. 291.



$$F_1 dq_1 = F_2 dq_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

oder die Proportion

$$F_1 : F_2 = dq_2 : dq_1,$$

d. h. die Feldstärken verhalten sich umgekehrt wie die Kraftröhrenquerschnitte; wo die Kraftröhre sich erweitert, sinkt die Kraft; wo sie sich zusammenschnürt, steigt die Kraft. Das Produkt aus Feldstärke und Querschnitt ist längs der ganzen Röhre konstant.

Wird der Querschnitt dq so gewählt, daß $F dq = 1$ ist, so heißt die Röhre eine Einheitsröhre; mit ihrer Hilfe kann man zu einer sehr anschaulichen Vorstellung des Feldes gelangen. Denn offenbar ist das Oberflächenintegral der Normalkraft über eine geschlossene Fläche, also die Kraftströmung, gleich dem Überschuß der austretenden über die eintretenden Einheitsröhren, also nach § 456 gleich $-4\pi k M_i$, wo M_i die ganze im Innern enthaltene Masse bedeutet.

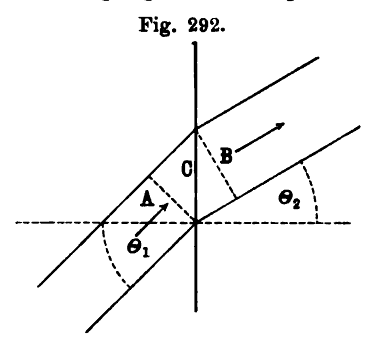
Es sei bemerkt, daß man, besonders in der Technik, oft von der Zahl der eine Fläche schneidenden Kraftlinien spricht; es ist das ein bequemer Ausdruck, der aber einen bestimmten Sinn nur hat, wenn man darunter die Zahl der Einheitsröhren versteht. Denn nur dies ist eine bestimmte endliche Zahl, die Zahl der Kraftlinien, die ja keine Fäden, sondern nur mathematische Linien sind, ist auch für den kleinsten wirklichen Querschnitt unendlich groß — es sei denn, daß man

eine bestimmte Auswahl aus ihnen trifft, und dann kommt man eben wieder zum Begriff der Einheitsröhren.

483. Unstetigkeit der Normalkraft an einer mit Masse belegten Fläche. Wir wollen nun den Fall betrachten, daß eine Kraftröhre auf eine materielle Fläche von der Flächendichte σ stößt. Die Richtung der Röhre braucht dann auf beiden Seiten der Fläche nicht notwendig dieselbe zu sein; trifft sie auf der einen Seite schief auf, so wird sie infolge des Einflusses der auf der Materie verbreiteten Fläche gewissermaßen gebrochen und geht in veränderter Richtung weiter.

In Fig. 292 seien A und B zwei Stücke der Kraftröhre, das eine ganz vor, das andere ganz hinter der Fläche gelegen; die entsprechenden Feldstärken seien F_1 und F_2, die entsprechenden Querschnitte dq_1 und dq_2; endlich sei dq das von der Röhre eingeschlossene Stück C der Fläche. Es ist dann nach früherem die Kraftströmung

Fig. 292.



$$F_2 dq_2 - F_1 dq_1 = -4\pi k \sigma dq \quad (48)$$

Bilden nun die beiden Seiten der Röhre mit der auf der Fläche nach beiden Seiten errichteten Normalen die Winkel θ_1 bezw. θ_2, so ist

$$dq_2 = dq \cos\theta_2, \quad dq_1 = dq \cos\theta_1,$$

und folglich

$$F_2 \cos\theta_2 - F_1 \cos\theta_1 = -4\pi k \sigma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

oder, da links die Normalkomponenten der beiderseitigen Kräfte stehen wobei letztere, gemäß den Definitionen

$$N_1 = -F_1 \cos\theta_1, \quad N_2 = +F_2 \cos\theta_2$$

im Sinne von der Fläche weg aufgefaßt werden sollen:

$$N_1 + N_2 + 4\pi k \sigma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Wie man sieht, ist die Normalkomponente der Kraft an einer materiellen Fläche unstetig, ihre Differenz (gleichsinnig gerechnet) bezw. ihre Summe (beiderseits von der Fläche weg gerechnet) ist nicht null, sondern endlich, und zwar proportional mit der Dichte, mit der die Masse auf der Fläche verbreitet ist.

Dagegen ist die Tangentialkomponente der Kraft, wie man ohne weiteres einsieht, stetig, d. h. es ist:

$$\left.\begin{aligned} F_1 \sin\theta_1 &= F_2 \sin\theta_2 \\ \text{oder} \quad T_1 &= T_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Da nun das Verhältnis $T : N$ die Richtung der Kraftlinien bestimmt, so folgt, daß die Kraftröhre gebrochen wird, und es ergibt sich

der Brechungswinkel θ_2 aus dem Einfallswinkel θ_1 nach der aus (51) und (49) abzuleitenden Gleichung:

$$tg\,\theta_2 = \frac{F_1 \sin\theta_1}{F_1 \cos\theta_1 - 4\pi k \sigma} \quad \ldots\ldots \quad (51\,a)$$

oder

$$tg\,\theta_2 = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1 - 4\pi k \dfrac{\sigma}{F_1}} \quad \ldots\ldots \quad (51\,b)$$

θ_1 hängt also, außer von θ_1, auch noch von dem Verhältnisse $\sigma : F_1$ der Flächendichte zur Feldstärke ab. Spezielle Fälle dieser Formel kommen häufig vor und stellen die verschiedenen Brechungsgesetze dar.

484. Graphische Darstellung des Potentials und der Kraft für eine dicke Kugelschale. Es ist von großem anschaulichen Wert, die in einfachen Fällen von Massenverteilung stattfindenden Werte des Potentials und der Kraft graphisch darzustellen, wie dies unter anderen Thomson und Tait getan haben; ihrer „Theoretischen Physik" ist die Fig. 293 entnommen, die sich auf den Fall einer dicken, homogenen Kugelschale von der Dichte ϱ und den Radien a_1 (außen) und a (innen) bezieht.

Da in diesem Falle das Feld zum Zentrum der Schale ringsum symmetrisch ist, ist die Kraft überall radial gerichtet. Für irgend eine mit der Schale konzentrische Kugelfläche vom Radius r ist daher, wenn die Gesamtheit der innerhalb der Kugelfläche liegenden Masse M ist, nach § 453

$$-\frac{dV}{dr} = k\frac{M}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

Anderseits nimmt für diesen Fall die Poissonsche Gleichung $\triangle V = -4\pi k \varrho$ eine viel einfachere Form an, weil V von x, y, z nur insofern abhängt, als diese mit r durch die Formel

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \ldots\ldots \quad (52\,a)$$

verknüpft sind, aus der sich

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

und weiter

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}$$

ergibt. Es ist folglich:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr}\frac{x}{r}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dV}{dr}\frac{y}{r}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dV}{dr}\frac{z}{r}$$

und weiter

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{d^2 V}{d r^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{d V}{d r}\frac{1}{r} - \frac{d V}{d r}\frac{x^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{d^2 V}{d r^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{d V}{d r}\frac{1}{r} - \frac{d V}{d r}\frac{y^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{d^2 V}{d r^2}\frac{z^2}{r^2} + \frac{d V}{d r}\frac{1}{r} - \frac{d V}{d r}\frac{z^2}{r^3},$$

also durch Summation, mit Rücksicht auf Gl. (52 a):

$$\triangle V = \frac{d^2 V}{d r^2} + \frac{2}{r}\frac{d V}{d r}.$$

Die Poissonsche Gleichung lautet mithin:

$$\frac{d^2 V}{d r^2} + \frac{2}{r}\frac{d V}{d r} = -4\pi k \varrho \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (53)$$

oder auch, um zu zeigen, wie sich $d^2 V/d r^2$ aus $d V/d r$ berechnen läßt:

$$\frac{d^2 V}{d r^2} = -4\pi k \varrho - \frac{2}{r}\frac{d V}{d r}.$$

Nun sind drei Fälle möglich, nämlich:

1. $0 < r < a$ (d. h. der Punkt, für den V gelten soll, liegt im inneren Hohlraume).
2. $a < r < a_1$ (d. h. der Punkt liegt in der Schalenmasse).
3. $a_1 < r < \infty$ (d. h. der Punkt liegt im äußeren Raume).

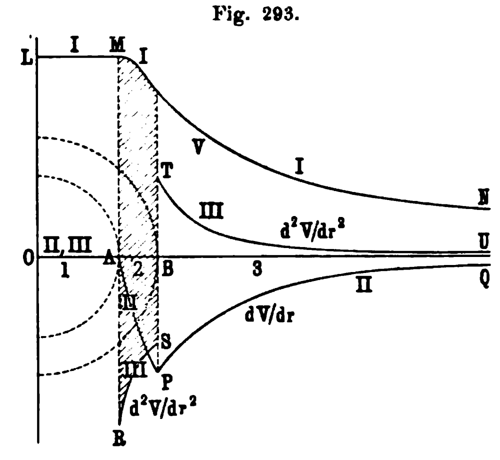
Für diese drei Fälle gilt folgendes Tableau der Werte von M, V, $-dV/dr$ und d^2V/dr^2:

	$0 < r < a$	$a < r < a_1$	$a_1 < r < \infty$
M	0	$\frac{4\pi\varrho}{3}(r^3 - a^3)$	$\frac{4\pi\varrho}{3}(a_1^3 - a^3)$
V	$2\pi k\varrho(a_1^2 - a^2)$	$\frac{4\pi k\varrho}{6r}(3a_1^2 r - r^3 - 2a^3)$	$\frac{4\pi k\varrho}{3r}(a_1^3 - a^3)$
$-\frac{dV}{dr}$	0	$\frac{4\pi k\varrho}{3r^2}(r^3 - a^3)$	$\frac{4\pi k\varrho}{3r^2}(a_1^3 - a^3)$
$\frac{d^2V}{dr^2}$	0	$-\frac{4\pi k\varrho}{3r^3}(r^3 + 2a^3)$	$\frac{8\pi k\varrho}{3r^3}(a_1^3 - a^3)$

In Fig. 293 (s. f. S.) ist der Verlauf der Größen V, dV/dr und d^2V/dr^2 dargestellt, und zwar durch drei Kurven I (LMN), II ($OAPQ$), III ($OARSTU$); als Abscissen sind dabei die r aufgetragen, und zwar entspricht das Stück 1 der Abscissenaxe (OA) dem inneren Hohlraume, das Stück 2 (AB) der Schalenmasse (der entsprechende Streifen ist schraffiert), das Stück 3 ($B\infty$) dem äußeren Raume. Wie man sieht, ist V (I) auf der Strecke 1 (LM) konstant und nimmt dann immer mehr ab; dV/dr (II) ist in 1 null, sinkt dann von null (A) bis P, und

steigt schließlich wieder bis auf null; d^2V/dr^2 (III) endlich ist in 1 ebenfalls null, springt dann plötzlich von null (A) bis R herunter, steigt

Fig. 293.



im Gebiete 2 von R bis S, springt jetzt plötzlich auf T und sinkt schließlich allmählich wieder auf null herab.

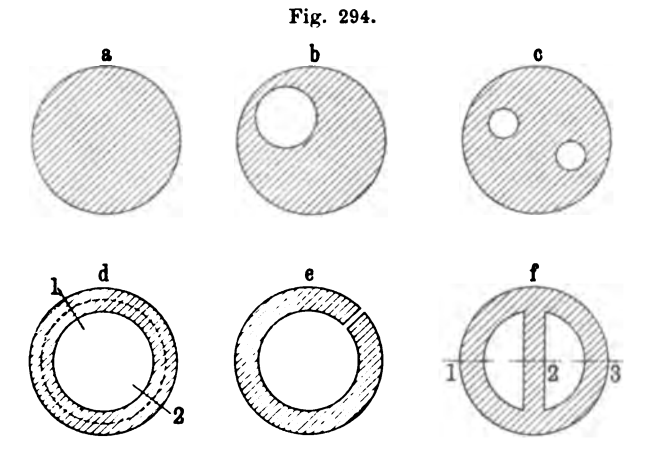
485. Allgemeines Potentialproblem. Es ist hier kein Raum für eine Behandlung des allgemeinen Potentialproblems, d. h. des sogenannten Dirichletschen Problems. Es handelt sich dabei vor allen Dingen um die Frage, wie man aus gewissen Daten eine Funktion finden kann, die den für das Potential gültigen Bedingungen genügt. Betrachten wir eine geschlossene Fläche F, die übrigens unter Umständen auch aus mehreren getrennten, für sich geschlossenen Flächen bestehen kann. Es soll alsdann eine Funktion V gefunden werden, die samt ihren ersten und zweiten räumlichen Differentialquotienten im ganzen außerhalb von F belegenen Raume eindeutig und stetig ist, in diesem Raume die Laplacesche Gleichung befriedigt, in unendlicher Entfernung von der gravitierenden Materie überall null ist und überdies noch eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt: 1. in der Fläche (bezw. den Flächen) F gegebene Werte anzunehmen, oder 2. daselbst gegebene Werte von dV/dn zu liefern, worunter der Änderungsgrad von V in der Richtung der Flächennormale verstanden ist, oder 3. für einige Oberflächenteile die erste, für die übrigen die andere Bedingung zu erfüllen. Von einer in einem gewissen Raumgebiete eindeutigen und stetigen, die Laplacesche Gleichung erfüllenden Funktion sagt man, sie sei in diesem Gebiete harmonisch.

Betreffs weiteren Verfolges dieses und verwandter Probleme muß auf die grundlegenden Untersuchungen von Dirichlet, Green, Gauß, Lord Kelvin, C. Neumann, Poincaré, Korn u. a. verwiesen werden.

486. Zusammenhang von Räumen. Die Frage, ob stets ein Potential existiere und, wenn das nicht der Fall sein sollte, wann es existiere und wann nicht, wollen wir hier nicht erörtern. In den Fällen, mit denen wir es zu tun haben werden, wird die Frage durch die Aufstellung des Wertes der Potentialfunktion ihre positive Erledigung finden. Weit wichtiger ist die andere Frage, ob, wenn eine Lösung gefunden ist, diese Lösung die einzig mögliche sei. Es läßt sich leicht zeigen, daß dies dann der Fall ist, wenn der Raum, in welchem der Wert von V gelten soll, einfach zusammenhängend ist; die Bedeutung dieses Ausdrucks und des Begriffs „Zusammenhang" überhaupt ist also zunächst zu erörtern.

Ein Raum (oder, wie man auch sagen kann, ein Körper) kann zunächst entweder zusammenhängend oder unzusammenhängend sein; Beispiele für das letztere sind das System Erde — Mond, das aus zwei

Fig. 294.



getrennten Stücken, und ein in Tropfen aufgelöster Wasserstrahl, der aus vielen Stücken besteht. Was nun die zusammenhängenden Räume betrifft, so ist ein Raum einfach zusammenhängend, wenn er durch einen beliebigen vollständigen, d. h. von einer geschlossenen, in der Raumoberfläche gelegenen Kurve begrenzten Schnitt in zwei Stücke zerlegt wird. Ein solcher Raum hat zugleich die Eigenschaft, daß jede beliebige in ihm gezogene Kurve, ohne ihn zu verlassen, allmählich auf einen Punkt zusammengeschnürt werden kann, und man kann, statt der ersten, auch diese zweite Eigenschaft als Definition des einfachen Zusammenhanges ansehen; der Name ist aber natürlich der ersten entnommen. Einfach zusammenhängend ist z. B. der Raum innerhalb (Fig. 294 a) oder außerhalb einer Kugelfläche oder außerhalb mehrerer getrennter Kugelflächen oder zwischen zwei einander beliebig umschließenden Kugelflächen (Fig. 294 b) oder zwischen mehreren inneren und einer äußeren Kugelfläche (Fig. 294 c) u. s. w. An Stelle der

Kugelflächen dürfen auch andere (z. B. Ellipsoide, Würfel u. s. w.) treten, wenn sie nur aus der Kugel durch Deformation, ohne daß ein Teil derselben mit einem anderen zur Deckung kommt, entstehen können.

Dagegen ist ein mehrfach zusammenhängender Raum ein solcher, der selbst nach einem vollständigen Schnitt noch zusammenhängend bleibt; sind zwei Schnitte erforderlich, damit er zerfalle, so ist er zweifach zusammenhängend, sind drei nötig, dreifach u. s. w. Das typische Beispiel eines zweifach zusammenhängenden Raumes ist der Hohlraum eines Ringes (z. B. eines Schwimmgürtels); nach dem Schnitt 1 (Fig. 294 d) bleibt er noch zusammenhängend, erst nach dem zweiten Schnitt 2 fällt er auseinander. In diesem Raume kann man nicht jede geschlossene Linie zu einem Punkte zusammenschnüren; bei der Kreisaxe z. B. oder überhaupt jeder ringsum laufenden Linie ist das nicht möglich; man muß, um solche Linien auszuschließen, an irgend einer Stelle einen Querschnitt durch den Ring legen und bestimmen, daß dieser Querschnitt nicht passiert werden darf; der Ring verwandelt sich dann gewissermaßen in den Körper Fig. 294 e, den „geschlitzten Ring“, und dieser ist jetzt einfach zusammenhängend. Endlich ist der durch Fig. 294 f dargestellte Raum offenbar dreifach zusammenhängend, und so geht das fort.

487. Eindeutigkeit bezw. Mehrdeutigkeit des Potentials. Nun sei also V der gefundene Wert des Potentials, d. h. diejenige Funktion der Koordinaten, welche in dem ganzen, einfach zusammenhängenden Raume die Laplacesche Gleichung und außerdem die genannte Oberflächenbedingung erfüllt; und es sei V' eine zweite solche Funktion, so soll bewiesen werden, daß

$$V = V'$$

sein muß, oder daß, wenn $V - V'$ mit U bezeichnet wird, $U = 0$ sein muß. U ist nämlich unter diesen Umständen offenbar auch eine Potentialfunktion, und zwar eine, welche an der oder den Oberflächen Nullwerte liefert, da doch die Werte von V und V' hier gegeben sind, also gleich sein müssen. Nun betrachten wir das Integral

$$\int\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

wo $d\tau$ ein Raumelement ist. Durch partielle Integration wird hieraus

$$\int U \frac{\partial U}{\partial n} df - \int U \triangle U d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54\text{a})$$

wo das erste Integral über die ganze Oberfläche zu nehmen, df ein Element derselben und n seine Normale nach außen ist. Nun ist aber überall da, wo V selbst für die Oberfläche gegeben ist, $U = 0$, und da, wo $\partial V/\partial n$ gegeben ist, $\partial U/\partial n = 0$, also ist das ganze erste In-

tegral null; das zweite ist es ebenfalls, weil $\triangle V = 0$ und $\triangle V' = 0$, also auch $\triangle U = 0$ ist; somit ist der Ausdruck (54 a), und folglich auch (54) null; letzterer kann aber, da er aus lauter positiven Gliedern besteht, nur null sein, wenn jedes Glied null ist, es ist also überall

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

d. h. $U = const$; und da es in der Oberfläche null ist, muß es überall null sein. Es ist hiernach V' mit V identisch, es gibt nur eine einzige Lösung V.

Daß das Ergebnis für mehrfach zusammenhängende Räume nicht gilt, liegt daran, daß für solche der Ausdruck (54 a) mit (54) nicht identisch ist, wenigstens nicht, wenn man das Flächenintegral nur über die wirkliche Oberfläche ausdehnt; man muß es vielmehr auch noch über beide Seiten der Schnitte erstrecken, durch die der Raum einfach zusammenhängend wird; und dadurch wird der Potentialwert mehrdeutig.

488. Greensche Funktion. Die Lösung des direkten Potentialproblems kann in einer Anzahl wichtiger Fälle nach einer Methode bewirkt werden, die von Green herrührt, und bei welcher gewisse von diesem mathematischen Physiker eingeführte Funktionen eine wichtige Rolle spielen.

Betrachten wir den Raum außerhalb einer geschlossenen Fläche f, einen beliebigen Punkt P im Innern und einen festen äußeren Punkt Q in der Entfernung r von dem Flächenelemente df, dann ist das in df erzeugte Potential der Masseneinheit in Q gleich k/r. Ferner denken wir uns eine Funktion G der Koordinaten, welche im Innern die Laplacesche Gleichung erfüllt, im unendlichen null, und in der Oberfläche dem Einheitspotential in Q entgegengesetzt gleich, also gleich $-k/r$ ist. Setzen wir dann

$$U = G + \frac{k}{r},$$

so ist U eine Funktion, welche in der Oberfläche überall null, im äußeren Raume harmonisch ist (§ 485) und nur im Punkte Q unendlich wird. Zuweilen wird U, gewöhnlich aber G als „Greensche Funktion" bezeichnet. In der Elektrostatik spielt die Funktion G als Potential der elektrostatischen Induktion eine wichtige Rolle. Sie hat eine bemerkenswerte Reziprozitätseigenschaft, die sich leicht beweisen läßt: Ist nämlich G ihr Wert in P, wenn die Einheitsmasse in Q liegt, und G' ihr Wert in Q, wenn jene in P liegt, so ist $G' = G$.

Die Einführung der Funktion G involviert, da sie in der Oberfläche den Wert $-k/r$ haben soll, die Vorstellung negativer Materie. Dieser Vorstellung, welche in der Lehre von der Gravitation keine direkte Bedeutung hat, werden wir in der Lehre von der Elektrizität

und dem Magnetismus später eine speziellere Ausgestaltung zu teil werden lassen.

489. Geschlossene Oberflächenverteilung. Da die Greensche Funktion G harmonisch im äußeren Raume ist, kann man sie als das Potential entweder einer inneren Massenverteilung oder einer solchen auf der Oberfläche f ansehen; im letzteren Falle läßt sie sich für die Oberfläche selbst in der Form

$$G_0 = k \int \frac{\sigma\, d f'}{(df, df')} = -\frac{k}{r}$$

schreiben, wo σ die Flächendichte der Verteilung und (df, df') der Abstand zweier Oberflächenelemente ist. Diese Verteilung hebt die Wirkung der äußeren Masse in Q oder allgemeiner äußerer Massen überhaupt gerade auf, so daß das Potential infolge des Zusammenwirkens beider in der Oberfläche gerade null wird. Wird es aber in der Oberfläche null, so wird es nach früherem auch im Innern null. Man hat also, wenn man jetzt der Oberflächenverteilung das entgegengesetzte Vorzeichen gibt, einen vollen Ersatz der äußeren Massen. Das ist, entsprechend erweitert, der wichtige Satz von Gauß: Für die Wirkung im Innern (Äußern) einer geschlossenen Fläche lassen sich äußere (innere) Massen stets durch eine Oberflächenverteilung von Masse ersetzen.

Es bleibt nur noch übrig anzugeben, welche Dichte man dieser Oberflächenverteilung zu geben habe, damit sie die räumliche gerade ersetze. Das ergibt sich aber aus § 483 unmittelbar; denn da, infolge Zusammenwirkens der äußeren und der (noch nicht umgekehrten) Flächenverteilung, im Innern keine Feldstärke vorhanden ist, wird in Gl. (50) N_1 (innen) $= 0$, also N_2 oder, was dasselbe ist, wenn n_a die Normale nach außen bedeutet:

$$\frac{\partial V}{\partial n_a} = -4\pi k \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Kennt man also $\partial V / \partial n_a$, so kann man σ bestimmen.

490. Sphärische, einer äußeren Masse äquivalente Verteilung. Die Betrachtungen der letzten Paragraphen werden durch Beispiele klarer werden; eines der wichtigsten und interessantesten ist das folgende. Es soll eine Massenverteilung über eine Kugelfläche gefunden werden, welche auf und innerhalb der Fläche dasselbe Potential hervorruft, wie ein einzelnes im äußeren Punkte F (Fig. 295) konzentriertes Massenteilchen. Wir wählen einen Punkt G auf der Linie $A'OAF$ derart, daß die Proportion

$$OG : OA = OA : OF$$

oder, wenn $OF = f$, $OG = f'$ und der Kugelradius gleich a gesetzt wird, die Proportion

$$f' : a = a : f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

besteht, d. h., daß der Kugelradius das geometrische Mittel aus den Vektoren nach F und G ist. Ferner sei E irgend ein Punkt der Kugelfläche, und $EF = r$, $EG = r'$. Die Dreiecke OGE und OEF sind einander ähnlich, weil ein Winkel gemeinsam und $f'/a = a/f$ ist; folglich ist $f'/r' = a/r$, oder

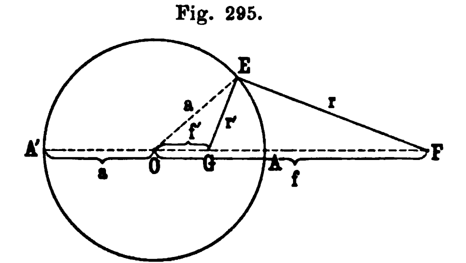
$$\frac{1}{r} = \frac{f'}{ar'} = \frac{a}{f} \cdot \frac{1}{r'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (57)$$

Eine Masse $m \,.\, a/f$ in G wird also in E dasselbe Potential hervorrufen, wie eine in F gelegene Masse m, nämlich das Potential km/r.

Stellt man nun eine Oberflächenverteilung vom Betrage ma/f derart her, daß das Potential in jedem Oberflächenpunkte gleich dem einer Masse m, in F konzentriert, ist, so wird auch im ganzen Innern Gleichheit beider Wirkungen eintreten. Denn wenn die Verteilung negativ hergestellt würde, dann würde das Potential auf der Kugel, also auch in ihrem Innern null sein, die beiden Wirkungen würden sich gerade aufheben; folglich ist die positive Oberflächenbelegung mit der äußeren Masse gerade äquivalent.

Sei nun die negative Flächenverteilung vorhanden, so ist die Normalkraft, welche in E nach außen wirkt, gleich $4\pi k \sigma$ (wo σ der absolute Wert der Dichte ist). Diese Kraft läßt sich nun im vorliegenden Falle leicht berechnen. Die nach F gerichtete Kraft ist nämlich km/r^2, die nach G gerichtete $km(a/f)/r'^2$; die erstere läßt sich in eine Komponente $(EO) = kma/r^3$ und eine zweite $(OF) = kmf/r^3$, die andere in eine Komponente $(OE) = kma^2/(fr'^3)$ und eine zweite $(GO) = kmaf'/(fr'^3)$ zerlegen; für die letztgenannte läßt sich einfacher, da $f'/r'^3 = a^3/(f'^2 r^3)$ und $a/f' = f/a$, also $f'/r'^3 = f^2/(ar^3)$ ist, kmf/r^3 schreiben; sie ist also der Komponente (OF) dem Werte nach gleich, dem Zeichen nach aber offenbar entgegengesetzt. Es bleiben somit nur die Komponenten nach dem Radius übrig, nämlich

Fig. 295.



$$\left.\begin{array}{l} \text{einerseits } \dfrac{kma}{r^3} \text{ von } E \text{ nach } O \\ \text{anderseits } \dfrac{kma^2}{fr'^3} \text{ von } O \text{ nach } E \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (58)$$

die letztere, welche auch $kmf^2/(ar^3)$ geschrieben werden kann, ist aber größer, und deshalb ergibt sich schließlich eine von O nach E gerichtete Resultante vom Betrage $km(f^2 - a^2)/(ar^3)$. Vergleicht man dies mit $4\pi k \sigma$, so erhält man:

$$\sigma = \frac{m}{4\pi a} \frac{f^2 - a^2}{r^3} \quad \text{. . . . . (59)}$$

Diese von Ort zu Ort mit r variierende Dichte muß man also der Massenverteilung auf der Kugelfläche geben, um in jedem inneren Punkte (und jedem Punkte der Oberfläche) dasselbe Potential wie das von der Masse m, in F konzentriert, herrührende, sowie in jedem äußeren Punkte (und in jedem Punkte der Oberfläche selbst) dasselbe Potential wie das von der Masse ma/f, in G konzentriert, herrührende zu erzielen.

Wie man sieht, wird die Dichte in dem dem Pole F nächsten Kugelpunkte A am größten, im entferntesten A' am kleinsten; für $f = 2a$ würde das Verhältnis der größten zur kleinsten Dichte 27 : 1 sein; dazwischen nimmt die Dichte zonenweise vom Maximum zum Minimum ab.

491. Elektrische Bilder. Zentrobarische Verteilung. Um es nun zu rekapitulieren, haben wir folgende Beziehungen:

Die Ladung m in F, zusammen mit der Ladung $-ma/f$ in G, liefert das Potential null in der Oberfläche.

Die Oberflächenverteilung von der Dichte

$$-m\frac{f^2 - a^2}{4\pi a r^3},$$

zusammen mit der Masse m in F, gibt ebenfalls in der Oberfläche und im Innern $V = 0$, und sie erzeugt überdies im äußeren Raume dasselbe Potential wie eine G-Ladung $-ma/f$.

Der Punkt G heißt das elektrische Bild des Punktes F in bezug auf die Kugelfläche, und dieser Ausdruck wird entsprechend auf die Ladung dieser Punkte übertragen. Die Methode der elektrischen Bilder wurde von Lord Kelvin ersonnen, und mit ihrer Hilfe sind von Lord Kelvin selbst, Kirchhoff u. a. manche Probleme in relativ einfacher Weise gelöst worden, die sonst außerordentliche analytische Schwierigkeiten darbieten würden. Übrigens ist die Methode nicht auf das Potential beschränkt, für das sie besonders in der Elektrostatik eine große Rolle spielt; sie läßt sich auch auf das Geschwindigkeitspotential in in kompressiblen Flüssigkeiten anwenden, da diese Funktion, wie wir sahen, ebenfalls die Laplacesche Gleichung und in gewissen Fällen auch die übrigen erforderlichen Bedingungen erfüllt.

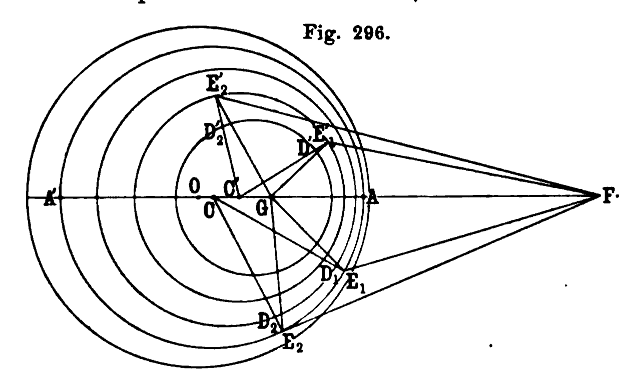
Die gesamte, auf der Kugelfläche verbreitete Masse ist, wie man auch noch durch direkte Integration bestätigen kann, ma/f; sie ist also so groß wie die punktförmig in G konzentrierte, dasselbe äußere Potential erzeugende Masse. So sieht man, daß man es hier mit einer Verallgemeinerung des früheren Satzes zu tun hat, wonach eine homogene Kugelfläche nach außen so wirkt, als ob ihre ganze Belegung in ihrem Mittelpunkte konzentriert wäre. Ein analoger Satz gilt auch für eine ungleichförmig geladene Kugelfläche (mit einer Belegungsdichte,

welche von Punkt zu Punkt im umgekehrten Verhältnisse des Kubus der Entfernung von einem äußeren Punkte variiert); nur ist hier der Punkt, in dem die Masse konzentriert gedacht werden kann, ein exzentrischer Punkt; seine Exzentrizität f' wächst mit der Ungleichförmigkeit der Verteilung, sie ist also z. B. ausdrückbar durch die Maximaldichte in A bezw. ihr Verhältnis zur Minimaldichte in A'; es bleibe indes diese Rechnung dem Leser überlassen.

Verteilungen von der Art, für welche die hier betrachtete ein Beispiel ist und auf die wir bald (§ 504) noch zu sprechen kommen, nennt man zentrobarische Verteilungen.

492. Aus zentrobarischen Schalen aufgebaute Kugel. Wir wollen nun, indem wir F und G festhalten, der Reihe nach verschiedene Kugeln beschreiben (Fig. 296), für welche F und G im Verhältnis von Punkt und Bildpunkt zueinander stehen; offenbar kann man, wenn

Fig. 296.



man statt O jetzt C als Kugelmittelpunkt wählt, den Kugelradius so abmessen, daß jene Bedingung erfüllt wird, und so fort für immer mehr nach rechts wirkende Zentra, wobei die Radien immer kleiner werden. Auf diese Weise füllt sich schließlich der ganze Raum der ursprünglichen Kugel mit Kugelflächen an, bezw. es setzt sich nun die Kugel aus lauter Kugelschalen zusammen. Nun hat eine Massenverteilung auf irgend einer jener Kugelflächen, welche im umgekehrten Verhältnisse des Kubus der Entfernung der Flächenelemente von F variiert, alle Eigenschaften der eben besprochenen Verteilung; d. h. sie erzeugt in allen Punkten außerhalb von sich selbst dasselbe Potential, als ob in G eine gleich große Masse — sagen wir m' — konzentriert wäre, und in allen inneren Punkten dasselbe Potential, als ob in F die Masse $m'f/a$ konzentriert wäre. Für die ganze Kugel addiert sich das, und die Verteilung ist zentrobarisch, d. h. im äußeren Raume (freilich nur außerhalb der ganzen Kugel) herrscht dasselbe Potential, welches herrschen würde, wenn die ganze Masse, statt über die verschiedenen Schalen verbreitet, in G vereinigt wäre.

Nun variiert des weiteren die Dicke einer Schale im Verhältnis des Quadrates der Entfernung der Schalenpunkte von F. Denn es sei y der Abstand des Mittelpunktes C' einer Kugelfläche vom Mittelpunkte C einer größeren, auf der die Punkte A und A' liegen, und x der Abstand des am nächsten zu A gelegten Punktes der kleineren Kugel von A; dann ist, wenn a der Radius der größeren Kugel ist, der Radius der kleineren $a - x - y$ und, da F und G fest sind:

$$f' - y = \frac{(a - x - y)^2}{f - y}.$$

Gehen wir zu einer noch etwas kleineren Kugel vom Radius $a - x - y - dx - dy$ über, so erhalten wir

$$dx = \frac{(f - a + x)^2}{2\,(f - y)\,(a - x - y)}\,dy.$$

Ist ferner θ der Winkel, den der Radius $C'E'$ nach irgend einem Elemente E' der Oberfläche mit $C'F$ macht, so ist die Dicke $d\delta$ der Schale an der Stelle E'

$$d\delta = dx + dy\,(1 - \cos\theta).$$

In dem Dreieck $C'E'F$ ist aber, wenn $E'F = r$ gesetzt wird,

$$r^2 = (f - a + x)^2 + 2\,(f - y)\,(a - x - y)\,(1 - \cos\theta),$$

und folglich wird:

$$dx + dy\,(1 - \cos\theta) = \frac{r^2}{2\,(f - y)\,(a - x - y)}\,dy,$$

die Dicke ist also für die verschiedenen Stellen einer Schale mit r^2 proportional.

Nun wollen wir eine jede der Flächenverteilungen, deren Flächendichte σ, wie wir wissen, mit r^3 umgekehrt proportional ist, in den ganzen Raum der anliegenden Schale zerstreuen, die zwar unendlich dünn, aber doch an verschiedenen Stellen verschieden dick, nämlich proportional mit r^2 ist; die Raumdichte ϱ wird dann offenbar umgekehrt proportional mit r^5, da sie an einer Stelle, wo ohnehin schon σ umgekehrt wie r^3 ist, noch über eine Dicke wie r^2 zerstreut wird; es ist eben einfach, von einem Proportionalitätsfaktor abgesehen,

$$\varrho = \frac{\sigma}{d\delta} = \frac{1}{r^3} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^5}.$$

Das Gesagte gilt nur für die verschiedenen Stellen einer und derselben Schale; für die verschiedenen Schalen kann ϱ ganz verschieden sein. Man erhält so beliebig viele zentrobarische Kugelverteilungen.

Überdies kann nun über die ungleichförmige Belegung der Kugelfläche noch irgend eine gleichförmige gelagert werden, z. B. vom Gesamtbetrage m'; im äußeren herrscht alsdann das Potential, welches erzeugt werden würde von der Masse m' in C und der Masse ma/f

in G. Ist z. B. $a/f = 1/4$ und $m' = m$, so erhält man außerhalb $a = \sqrt{CG.f}$ gerade die in Fig. 290 dargestellten Niveau- und Kraftlinien, wobei B und A die Rolle von C und G spielen. Innerhalb der Kugel ist das von m' herrührende Potential gleichförmig, das von ma/f, über die Fläche nach dem Dichtegesetz von Gl. (59) verteilt, herrührende ist dasselbe wie das von m, in F konzentriert, herrührende.

Somit ist die Dichte in irgend einem Punkte:

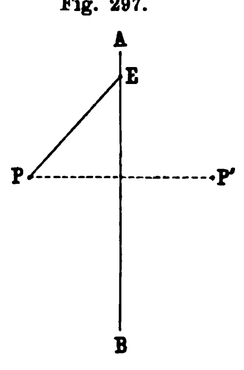
$$\sigma = \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{m'}{a} + m\,(f^2 - a^2)\,\frac{1}{r^3}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

und speziell in den Punkten A bezw. A'

$$\left.\begin{aligned} \sigma(A) &= \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{m'}{a} + m\,\frac{f+a}{(f-a)^2}\right] \\ \sigma(A') &= \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{m'}{a} + m\,\frac{f+a}{(f+a)^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

493. Bild in Bezug auf eine Ebene. Wenn der Kugelradius unendlich wird, verwandelt sich die Kugel in eine Ebene AB (Fig. 297), und der zu einem Punkte P gehörige Bildpunkt P' liegt auf derselben Normalen ebensoweit auf der anderen, wie P selbst auf der einen Seite; P' ist einfach der optische, von AB als Spiegel herrührende Bildpunkt von P. Ist die Masse in P gleich m, so ist die in P' gleich mf/a, also, da mit größer werdendem a schließlich $f = a = \infty$ wird, ebenfalls m: die Bildmasse ist gleich der Punktmasse. Eine Massenverteilung auf einer nach allen Richtungen unbegrenzten Ebene, deren Dichte von Punkt zu Punkt umgekehrt wie der Kubus der Entfernung von einem Punkte in dem einen Halbraume variiert, ruft hiernach in diesem Halbraume ein Potential hervor, als ob ihre Belegung in dem Bildpunkte jenes Punktes konzentriert wäre, und ebenso in dem anderen Halbraume das Potential, als ob die Belegung in jenem Punkte konzentriert wäre. Dabei ist die Flächendichte

Fig. 297.



$$\sigma = \frac{hm}{2\pi r^3},$$

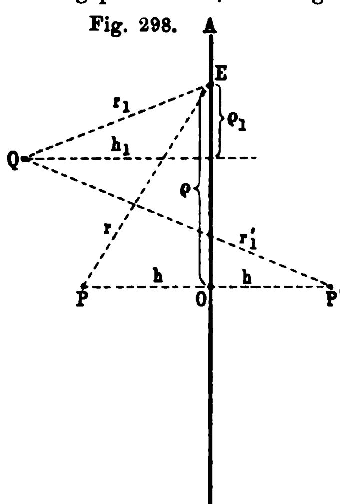
wo h die kürzeste Entfernung der Punkte von der Ebene und r die Entfernung irgend eines Punktes E der Ebene von den Punkten ist.

Um die Probe zu machen, integriere man zunächst über die Masse aller Elemente der Ebene, d. h. man bilde das Integral

$$\frac{hm}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{\varrho\,d\varrho\,d\theta}{r^3} = hm\int\frac{\varrho\,d\varrho}{(h^2 + \varrho^2)^{3/2}},$$

wo $\varrho = OE$ (Fig. 298) und θ Polarkoordinaten in der Ebene, mit O als Anfangspunkt sind, und folglich $r = \sqrt{h^2 + \varrho^2}$ ist; die Integration ergibt in der Tat m, wie zu beweisen war. Ferner bilde man das Integral über die Potentiale aller Elemente der Ebene auf einen beliebigen Punkt Q, dessen Entfernung von E gleich $r_1 = \sqrt{h_1^2 + \varrho_1^2}$ ist. Dann ist

Fig. 298.



$$V = k\frac{hm}{2\pi}\int\frac{\varrho\, d\varrho\, d\theta}{r^3 r_1},$$

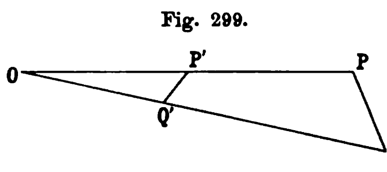
und dies erweist sich als $m : r_1'$, wo r_1' der Abstand des Punktes Q vom Bilde P' des Punktes P ist; speziell für P selbst wird

$$V = k\frac{hm}{2\pi}\int\int\frac{\varrho\, d\varrho\, d\theta}{r^4},$$

und dies wird $m/2h$, wie es sein muß.

494. Geometrische Inversion. Die in Rede stehende Methode heißt geometrische Inversion oder Methode der reziproken Radien; sie ist sehr wichtig für die Ableitung unbekannter geometrischer Anordnungen aus bereits bekannten. Man betrachte irgend einen Punkt P einer geometrischen Anordnung, sei es von Teilchen im Raume oder von Punkten in einer Zeichnung, und verbinde ihn mit irgend einem Punkte O (Fig. 299). Um O schlage man eine Kugel mit irgend einem Radius, etwa a, und ermittele auf $OP = r$ den Punkt P' von solcher Lage, daß $OP' = r'$ die Bedingung

Fig. 299.



$$r r' = a^2$$

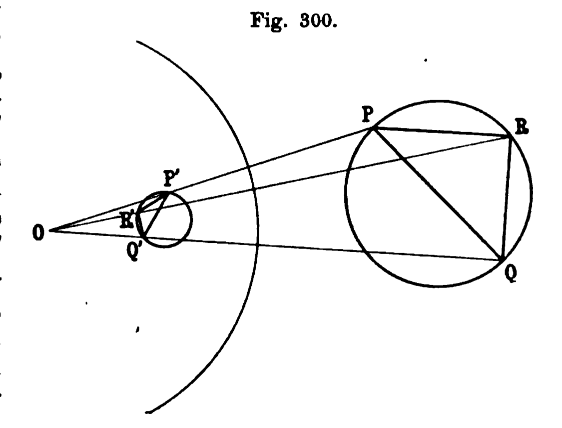
erfüllt, daß also, wenn $a = 1$ ist, oder allgemeiner, wenn r und r' in Vielfachen (bezw. Bruchteilen) von a ausgedrückt werden, r' der reziproke Wert von r ist. Dann heißt O das Zentrum der Inversion, a der Radius der Inversion und P' der Bildpunkt oder inverse Punkt von P. Nimmt man einen zweiten Punkt Q, so ergibt sich ein zweiter Bildpunkt Q' u. s. f.; je weiter der Punkt vom Zentrum, desto näher liegt der Bildpunkt an demselben. Die neue Anordnung von Punkten

heißt das Bild oder die Inversion der alten. (Die gerade Linie $P'Q'$ ist aber, wie sich zeigen wird, nicht das Bild der geraden Linie PQ.)

Man wird bemerken, daß die Dreiecke OPQ, $OQ'P'$ ähnlich und die Winkelpaare OPQ und $OQ'P'$, OQP und $OP'Q'$ gleich sind. Ist der Winkel bei O sehr klein, also PQ das Element einer Kurve, dann ist $P'Q'$ seine Inversion, und die beiden Elemente schneiden den Radiusvektor OP in den gleichen Winkeln $P'PQ$, $PP'Q'$; daraus folgt, daß, wenn man zwei verschiedene, sich schneidende Kurven (oder auch Flächen) hat, ihr Schnittwinkel gleich dem Schnittwinkel ihrer Inversionen ist.

Die Inversion eines Kreises ist ein anderer Kreis, einer Kugel eine andere Kugel. Für den Fall, daß der Kreis mit O in einer Ebene liegt, ist der Beweis des ersten Satzes ziemlich einfach; nur darf man, wenn PQ der Durchmesser des gegebenen Kreises, R irgend einer seiner Punkte, also der Winkel PRQ ein rechter ist, nicht etwa schließen, daß (Fig. 300) der Winkel $P'R'Q'$, wo P', Q', R' die Inversionen von P, Q, R sind, auch ein rechter sei (denn die Linien $R'P'$ und $R'Q'$ sind nicht die Inversionen von RP und RQ); er ist vielmehr, je nach den Umständen, um den Winkel POQ größer oder kleiner; es ist also auch nicht $P'Q'$ der Durchmesser des Bildkreises. Der Beweis für Kugeln folgt aus dem für Kreise leicht durch die Erwägung, daß die Kugelschnitte Kreise sind.

Fig. 300.

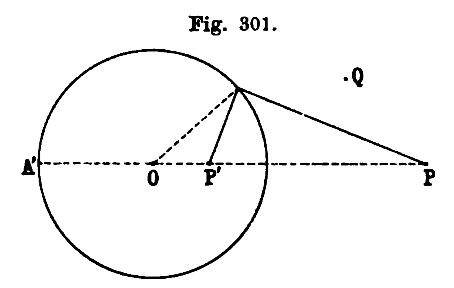


Besonders interessant ist der Spezialfall einer geraden Linie; ihre Inversion ist natürlich ein Kreis, da sie selbst ein Kreis ist; und da die vom Zentrum der Inversion parallel zur geraden Linie nach beiden Seiten gezogenen Radienvektoren unendlich lang sind, müssen die entsprechenden Bildvektoren unendlich kurz, d. h. null sein; der Bildkreis geht also durch das Zentrum der Inversion, und die Tangente daselbst ist der gegebenen Geraden parallel. Die Konstruktion ist hier überaus einfach: man sucht das Bild des dem Zentrum O nächsten Punktes P der Geraden und beschreibt über OP als Durchmesser einen Kreis. Geht die Gerade durch das Zentrum selbst, so ist sie ihr eigenes Bild, wobei aber die einzelnen Linienpunkte ihre Rollen vertauschen.

495. Inverse Verteilungen. Das Bild des Raumes außerhalb der Inversionskugel ist offenbar der Raum innerhalb derselben, und umgekehrt. Dies ist insofern von großer Wichtigkeit, als man hiermit in den Stand gesetzt ist, irgend eine Lösung eines Gravitationsproblems, die für den Raum innerhalb einer Kugel gültig ist, in eine andere, außerhalb gültige zu transformieren; dasselbe gilt für elektrostatische Probleme.

Die Ladung ma/f des Punktes P' (Fig. 301) heißt die Inversion der Ladung m des Punktes P, wo a der Radius und $f = OP$ ist.

Fig. 301.



Statt eines Punktes P können auch mehrere, $P, Q \ldots$ gegeben sein; es ergeben sich dann ebensoviele Bildpunkte P', Q'; einer stetigen Linien-, Flächen- oder Raumverteilung entspricht eine ebensolche Verteilung im Bilde.

Es sei df die Ausdehnung eines kleinen Volumenelementes in der Radiusvektorrichtung f; die entsprechende des Bildes ist dann

$$df' = \frac{a^2}{f^2}\, df;$$

denn es ist $f' - df' = a^2/(f + df) = (1 - df/f)a^2/f$. Anderseits ist, wenn die Ausdehnung des Volumenelementes in der Richtung senkrecht zum Radiusvektor gleich $f d\theta$ ist (θ der Polarwinkel), die entsprechende Bildausdehnung ($d\theta'$ ist gleich $d\theta$):

$$f' d\theta = \frac{a^2}{f^2} \cdot f d\theta = \frac{a^2}{f}\, d\theta.$$

Folglich entspricht dem Volumenelement

$$d\tau = f^2 df d\theta^2$$

das inverse Volumenelement

$$d\tau' = f'^2 df' d\theta^2$$
$$= \frac{a^4}{f^2} \frac{a^2}{f^2}\, df d\theta^2,$$

also schließlich:

$$d\tau' = \frac{a^6}{f^6}\, d\tau$$

oder auch umgekehrt

$$d\tau' = \frac{f'^6}{a^6}\, d\tau.$$

Für Flächenelemente ergibt sich entsprechend

$$ds' = \frac{a^4}{f^4}\, ds = \frac{f'^4}{a^4}\, ds.$$

Gehen wir nun zum Massenelement m im Raume $d\tau$ über, dem das inverse (ma/f) im Raume $d\tau'$ entspricht, und führen wir die Dichten $\varrho = m/d\tau$ und $\varrho' = (ma/f)/d\tau'$ ein, so haben wir

$$\varrho' = \frac{f^5}{a^5}\varrho = \frac{a^5}{f'^5}\varrho,$$

und für Flächendichten

$$\sigma' = \frac{f^3}{a^3}\sigma = \frac{a^3}{f'^3}\sigma.$$

Zusammenfassend hat man also folgende Verhältnisse (dl, dl' Linienelemente, λ, λ' Liniendichte):

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dl'}{dl} = \dfrac{a^2}{f^2} = \dfrac{f'^2}{a^2} = \dfrac{f'}{f}, \quad \dfrac{ds'}{ds} = \dfrac{a^4}{f^4} = \dfrac{f'^4}{a^4} = \dfrac{f'^2}{f^2} \\ \dfrac{d\tau'}{d\tau} = \dfrac{a^6}{f^6} = \dfrac{f'^6}{a^6} = \dfrac{f'^3}{f^3} \\ \dfrac{\lambda'}{\lambda} = \dfrac{f}{a} = \dfrac{a}{f'}, \quad \dfrac{\sigma'}{\sigma} = \dfrac{f^3}{a^3} = \dfrac{a^3}{f'^3}, \quad \dfrac{\varrho'}{\varrho} = \dfrac{f^5}{a^5} = \dfrac{a^5}{f'^5} \end{array}\right\} \quad . . \quad (62)$$

496. Inversion von Potentialen. Nun sei V das Potential im Punkte Q, herrührend von der Masse m in P; dann ist $V = km/(PQ)$. Die Inversion ist das Potential V' im Bildpunkte Q' von Q, erzeugt durch die inverse Masse ma/f (wo $f = OP$ ist) im Bildpunkte P' von P; es ist also

$$V' = km\frac{a}{f}\cdot\frac{1}{P'Q'};$$

bezeichnet man also OQ mit r, OQ' mit r', so ist nach Fig. 299

$$V' = \frac{r}{a}V = \frac{a}{r'}V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Wie man sieht, ist das Verhältnis $V' : V$ von der Masse m und Lage des Punktes P gänzlich unabhängig; es ist einfach das Verhältnis der in den reziproken Punkten Q' und Q durch irgend ein Paar punktförmiger, reziproker Ladungen erzeugten Potentiale.

Wenn V ein in einem gegebenen Raume τ konstantes Potential ist, so ist, wie man sieht, V' keineswegs im allgemeinen ebenfalls konstant, sondern nur dann, wenn $r = const$ oder $r' = const$ ist, d. h. wenn der Raum konstanten Potentials eine mit der Inversionskugelfläche konzentrische Kugel ist.

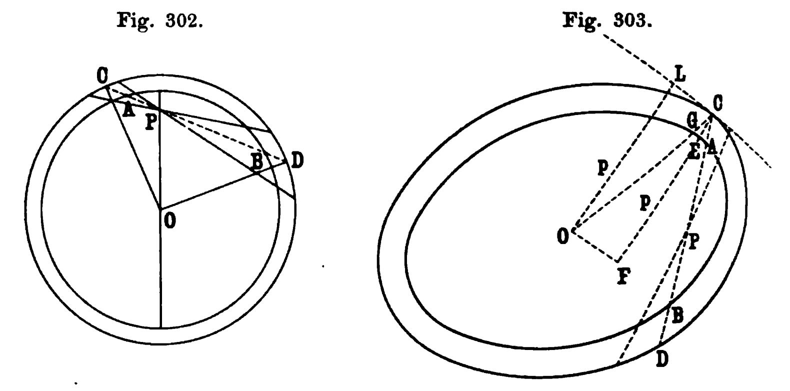
In der Theorie der elektrischen Verteilung werden von den gewonnenen Ergebnissen der Bildermethode Anwendungen gemacht werden; für jetzt sei u. a. auf des Verfassers „Treatise on Magnetism and Electricity“ (London 1898) hingewiesen.

497. Inneres Feld eines dünnen Homöoids. Wir wollen jetzt den im § 490 aufgestellten Satz auf eine Reihe interessanter Spezialfälle der Gravitation anwenden.

Zunächst betrachten wir das Feld einer Masse, die den Raum zwischen zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden gleichförmig erfüllt. Zu einer derartigen Masseverteilung gelangt man durch homogene Deformation einer Kugelschale, d. h. durch Änderung ihrer Ausmaße in drei aufeinander senkrechten Richtungen im Verhältnis von $a:1$, $b:1$, $c:1$, wobei sich die Kanten eines rechteckigen Raumelementes aus δx, δy, δz in $a\delta x$, $b\delta y$, $c\delta z$, also das Volumen selbst aus $\delta x \delta y \delta z$ in $abc\delta x \delta y \delta z$ verwandelt. Bei diesem Prozesse ändert sich also die Dichte, aber überall in demselben Maße, die Schale bleibt also homogen.

Nun ziehe man eine Sehne (Fig. 302), welche die Schale in vier Punkten, nämlich die innere Fläche in A und B, die äußere in C und D schneidet; irgend ein Punkt auf ihr sei P. Dann läßt sich leicht beweisen, daß die Verhältnisse $AP:PB$ und $CP:PD$ nach der Deformation noch dieselben sind wie vorher, und daß dies auch von den

Fig. 302. Fig. 303.



Massenelementen gilt, die durch einen schmalen Kegel vom Winkel $d\omega$, mit dem Scheitel P und CD als Axe aus der Schale herausgeschnitten werden.

Fürs erste nehmen wir an, die Schale sei äußerst dünn im Vergleich zu PA oder PB, diese Dicke sei ε, die Linien PA und PB seien r_1 und r_2, der Winkel OCP sei θ; die ausgeschnittenen Flächen sind dann

$$\text{bei } A: \quad \frac{r_1^2 d\omega}{\cos\theta} = f_1, \quad \text{bei } B: \quad \frac{r_2^2 d\omega}{\cos\theta} = f_2.$$

Die ausgeschnittenen Massen sind also proportional $f_1 \varepsilon$ und $f_2 \varepsilon$, ihr Verhältnis ist also $r_1^2 : r_2^2$. Anderseits sind die Anziehungen, die P von ihnen erfährt, entgegengesetzt gerichtet, und sie stehen im Verhältnis $1/r_1^2 : 1/r_2^2$, also $r_2^2 : r_1^2$. Daraus folgt, daß diese beiden Anziehungen gleich und entgegengesetzt sind. Dasselbe gilt aber für je zwei in analoger Weise ausgeschnittene Elemente der Schale: die Feldstärke in P ist also null, und sie ist es in jedem Punkte des Hohlraumes, da P gar keine besondere Lage hatte.

Daß die Feldstärke im Innern einer homogenen Hohlkugel null ist, wissen wir bereits (§ 453). Jetzt aber können wir ohne weiteres den Schluß ziehen, daß sie auch im Innern der deformierten Schale null ist; denn die Massenelemente bleiben, wie wir sahen, ungeändert, und die beiden r ändern sich in gleichem Maße.

Das Resultat gilt auch für endliche Dicke der Schale, da man diese aus lauter äußerst dünnen aufbauen kann.

Wir wollen eine von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden eingeschlossene Schale nach dem Vorgange von Thomson und Tait ein elliptisches Homöoid nennen.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Dicke ε eines elliptischen Homöoids, die natürlich von Punkt zu Punkt variiert, proportional ist mit der Länge des vom Mittelpunkt auf die an der betreffenden Stelle gezogene Tangentialebene gefällten Lotes. Bei der homogenen Deformation bleiben nämlich parallele Linien, wenn sie auch ihre Richtung ändern, doch parallel. Nun sind kurze Bögen bei A und C (Fig. 303) parallel gewesen, sie sind es also auch jetzt noch. Fällt man jetzt von O das Lot $p = OL$ auf die Tangentialebene in C, zieht $CF // LO$ und $OF // LC$ und nennt die Schnittpunkte von OC bezw. FC mit der inneren Fläche G bezw. E, so sind die Dreiecke COF und CGE einander ähnlich, also ist $CG : CO = CE : CF$, d. h. es ist

$$\varepsilon = CE = \frac{CG}{CO} \cdot CF = \frac{CG}{CO} \cdot p;$$

$CG : CO$ ist aber ein für alle Richtungen von OC konstantes Verhältnis; es ist also wirklich ε proportional mit p.

498. Äußeres Feld eines dünnen Homöoids. Betrachten wir nun das Feld eines dünnen Homöoids, so sehen wir, daß das Potential in allen äußeren Punkten nahe der Oberfläche konstant ist, und nach § 489 ist die Kraft nach außen

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi k \varepsilon \varrho.$$

Die Entfernung ε' zwischen zwei benachbarten Niveauflächen, die, wie wir wissen, mit der Kraft reziprok ist, ist also umgekehrt proportional mit ε (denn k und ϱ sind Konstanten). Dadurch erhält man aber eine mit dem Homöoid konfokale Fläche. Denn wenn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die Gleichung des dünnen elliptischen Homöoids ist, und wenn die Koordinaten der nach außen benachbarten Niveaufläche $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sind (x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sollen immer zwei auf der Flächennormalen gelegene Punkte sein), so sind die Richtungskosinus der Normale in x, y, z gleich x/a^2, y/b^2, z/c^2, und folglich ist

$$\varepsilon' = \frac{\frac{x}{a^2}dx + \frac{y}{b^2}dy + \frac{z}{c^2}dz}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Der Nenner dieses Ausdruckes ist aber nach der analytischen Geometrie gerade das Reziproke der Länge des Perpendikels p vom Zentrum auf die Tangentialebene in x, y, z. Nun ist aber ε' umgekehrt proportional mit ε, also nach § 497 auch mit p, also etwa gleich $\frac{1}{2}f/p$, wo $\frac{1}{2}f$ eine Konstante ist. Demnach ist:

$$dx = \frac{\varepsilon' x p}{a^2} = \frac{1}{2}\frac{fx}{a^2}, \quad dy = \frac{1}{2}\frac{fy}{b^2}, \quad dz = \frac{1}{2}\frac{fz}{c^2},$$

oder

$$2\,x dx = f\frac{x^2}{a^2}, \quad 2\,y dy = f\frac{y^2}{b^2}, \quad 2\,z dz = f\frac{z^2}{c^2}.$$

Man erhält also:

$$\frac{x^2 + 2\,x dx}{a^2 + f} + \frac{y^2 + 2\,y dy}{b^2 + f} + \frac{z^2 + 2\,z dz}{c^2 + f} = 1,$$

oder mit Vernachlässigung kleiner Größen

$$\frac{(x + dx)^2}{a^2 + f} + \frac{(y + dy)^2}{b^2 + f} + \frac{(z + dz)^2}{c^2 + f} = 1;$$

d. h. der Punkt $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ liegt auf einem mit dem Homöoid konfokalen Ellipsoid.

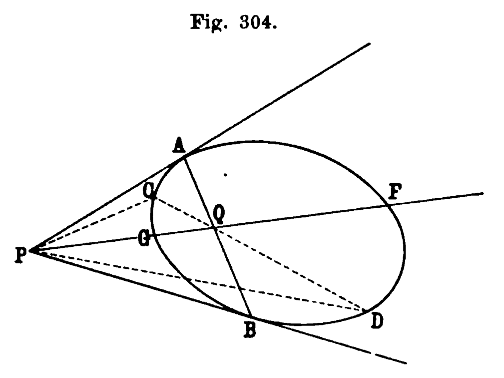
499. Äußere Verteilung, äquivalent mit einem dünnen Homöoid. Aus dem Früheren folgt nun sofort, daß in Bezug auf die Wirkung nach außen ein dünnes elliptisches Homöoid ersetzt werden kann durch ein äußeres konfokales und gleichmassiges. Potential und Kraft eines elliptischen Homöoids in einem äußeren Punkte P sind also identisch mit denen eines anderen, ihm konfokalen und gleichmassigen, für das P zwar auch noch außen, aber unmittelbar an seiner Oberfläche liegt. Die Aufgabe, Potential und Kraft im äußeren Raume zu bestimmen, ist hiermit auf ihre Bestimmung an der Oberfläche eines konfokalen Homöoids reduziert.

500. Homöoide von endlicher Dicke. Maclaurins Theorem. Gehen wir jetzt zu Homöoiden von endlicher Dicke über und nennen wir zwei solche von verschiedener Dicke konfokal, wenn ihre inneren Oberflächen konfokal sind und ihre äußeren ebenfalls (die inneren sind mit den äußeren nicht konfokal, sondern ähnlich), so sehen wir leicht ein, daß sie bei gleicher Masse und überall gleicher Dichte im äußeren Raume die gleiche Wirkung ausüben. Läßt man die inneren Hohlräume mehr und mehr zusammenschrumpfen, so kommt man schließlich zu massiven, homogenen, gleichmassigen und konfokalen Ellipsoiden und findet, daß diese im ganzen, für beide äußeren Räume, die gleiche

Wirkung ausüben. Dieser Satz wird gewöhnlich als Maclaurinsches Theorem bezeichnet; der hier geführte Beweis ist eine Modifikation des von Chasles gegebenen. Nach Gauß hat indes Maclaurin den Satz nur für Punkte in der Verlängerung der Axen aufgestellt, vervollständigt wurde er erst von Laplace in seiner Mécanique céleste (vol. 2, Buch 3, Kap. 1; vergl. Gauß' Werke Bd. 5, und Chasles, Journ. de l'École polytechn., Heft 25; 1837).

Das Verfahren, ein Ellipsoid in unendlich dünne Homöoide zu teilen, scheint zuerst von Poisson in seiner Abhandlung „Mémoire sur l'attraction d'un ellipsoide homogène (Mém. de l'Institut de France, vol. 13, 1835) angewandt worden zu sein. Er zeigt daselbst, daß die von einem Homöoid ausgehende Kraft in einem äußeren Punkte die Richtung der Axe des Kegels hat, der in ihm seinen Scheitel hat und das Homöoid einhüllt. Nach dem Vorgange von Steiner (Crelles J., Bd. XII) kann man dies rein geometrisch folgendermaßen zeigen. Fig. 304 gibt einen Schnitt, der durch die Kegelaxe PF geht, A und B sind die Berührungspunkte, Q der Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie mit der Kugelaxe, und es ist offenbar $\angle APQ = \angle BPQ$. Ist nun C irgend ein Punkt auf der Ellipse und zieht man CQD, so kann man zeigen, daß auch $\angle CPQ = \angle DPQ$ ist. Legt man nun durch Q einen schmalen Doppelkegel um CQD als Axe, so schneidet dieser aus der Schale zwei Elemente heraus, die, wie wir wissen, in Q gleiche und entgegengesetzte Wirkung hervorrufen, weil ihre Volumina sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Abstände, $(QC)^2 : (QD)^2$, verhalten. Wegen der Gleichheit jener Winkel ist aber $QC : QD = PC : PD$, so daß man das Verhältnis der Volumina auch gleich $(PC)^2 : (PD)^2$ setzen kann; ihre Anziehung auf P ist also dieselbe, und folglich fällt ihre Resultante, also auch die Resultante aller Elementenpaare des Homöoids in die Mittellinie, d. h. in die Kegelaxe.

Fig. 304.

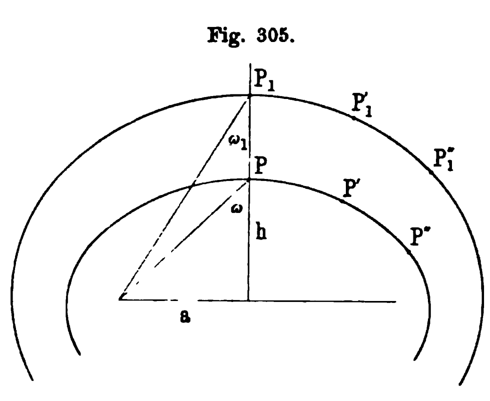


[Die Axe des einhüllenden Kegels ist senkrecht auf der durch P gehenden, mit dem gegebenen Homöoid konfokalen ellipsoidischen Fläche, woraus wiederum der Satz folgt, daß die äußeren Niveauflächen konfokale Ellipsoide sind.]

Alle diese hier behandelten Sätze finden besonders wichtige Anwendungen außer in der Gravitation selbst in der Elektrostatik, nämlich auf die Verteilung der Elektrizität auf ellipsoidischen Leitern und das von ihnen erzeugte Feld.

500a. Kreisscheibe mit konstantem Potential. Das Potential einer homogenen Scheibe auf einen beliebigen Punkt ist sehr verwickelt. Es mag indessen diese Gelegenheit benutzt werden, um ein anderes Problem vorläufig zu erwähnen, das später (besonders in der Elektrostatik) sehr wichtig werden wird, und für welches gerade bei der Kreisscheibe die Lösung sehr einfach und anschaulich ist. Es ist das Problem des Potentials einer Flächenmasse, deren Dichte nicht überall die nämliche ist, sondern derart variiert, daß das Potential für alle Punkte in der Fläche selbst den gleichen Wert hat; es ist das offenbar diejenige Verteilung, bei welcher das verteilte Substrat, wenn es innerhalb der Fläche frei beweglich ist, im Gleichgewichte sein wird. Bei einer Kreisscheibe findet sich nun einfach, wenn jener in der Fläche selbst konstante Wert von V zu 1 angenommen wird (sonst ist mit einem Faktor zu multiplizieren), zunächst für einen Axenpunkt:

Fig. 305.



$$V = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a}{h} = \frac{2}{\pi} \cdot \omega,$$

wo die Größen a, h, ω aus der Fig. 305 ersichtlich sind; derselbe Wert $(2/\pi) \cdot \omega$ gilt dann aber auch für alle mit dem betreffenden Axenpunkte auf demselben mit der Scheibe konfokalen Ellipsoide gelegenen seitlichen Punkte P', P'' u. s. w. bezw. P_1, P_1', P_1'' u. s. w. Zugleich wird die variable Flächendichte im Abstande x vom Zentrum

$$\sigma = \frac{1}{2\pi a \sqrt{a^2 - x^2}},$$

d. h. sie nimmt von der Mitte nach dem Rande immer rascher zu und wird dort unendlich.

Den vollständigen Beweis für diese Ergebnisse können wir hier nicht führen; wir müssen uns mit folgenden Betrachtungen begnügen. In § 497 ist gezeigt worden, daß eine durch ähnliche und ähnlich gelegene innere und äußere Flächen begrenzte ellipsoidische Schale (ein „elliptisches Homöoid") in seinem ganzen Innern ein gleichförmiges Potential erzeugt; in § 499 ist ferner nachgewiesen worden, daß es in einem äußeren Punkte dasselbe Potential erzeugt wie ein in seinem Innern gelegenes, konfokales Homöoid von gleicher Masse; endlich ist gezeigt worden, daß die Flächendichte der Schale in irgend einem Punkte proportional der Länge des Lotes vom Mittelpunkte auf die das Homöoid in diesem Punkte berührende Fläche ist.

Die ganze Masse m der Schale ist deshalb, wenn q eine Konstante ist, $q\int p\,dS$, das Integral über die Schale genommen. Dieses Integral ist aber das dreifache innere Volumen der Schale, also, wenn a, b, c die Längen der Halbaxen sind, gleich $4\pi abc$. Setzt man nun den Wert von p ein, so erhält man also:

$$\sigma = \frac{m}{4\pi abc}\sqrt{\frac{1}{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

Nun nehme man als inneres Homöoid eine ganz flache rotationsellipsoidische Schale, so daß also, wenn a, a, c die Halbaxen sind, c sehr klein gegen a ist. Man hat dann offenbar eine Kreisscheibe vom Radius a vor sich, und erhält für deren Flächendichte, wenn man bedenkt, daß die Scheibe zwei Flächen (die obere und die untere Seite) hat:

$$\sigma = \frac{m}{2\pi a^2 c}\,p = \frac{m}{2\pi a^2 c}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}}},$$

oder, da nach der Oberflächengleichung $z^2 = c^2(1 - x^2/a^2)$ ist:

$$\sigma = \frac{m}{2\pi a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

wo x der Abstand vom Mittelpunkte ist. Dies ist die oben angegebene Formel.

Ferner denken wir uns nun ein die Scheibe umgebendes konfokales Homöoid von den Halbaxen a', a', h. Nach der oben hingeschriebenen Gleichung ist die Dichte am Ende der z-Axe gleich $m/4\pi a'^2$ und die Feldstärke $-4\pi k\sigma$, also $-km/a'^2$. Folglich hat man

$$\frac{\partial V}{\partial h} = -\frac{km}{a'^2} = -\frac{km}{h^2 + a^2},$$

da wegen der Konfokalität

$$a'^2 = a^2 + \lambda,\ h^2 = c^2 + \lambda = \lambda$$

ist. Durch Integration erhält man:

$$V = -km\,arc\,tg\,\frac{h}{a} + C,$$

wo $C = \pi/2$ sein muß, damit für $h = \infty$ das Potential null werde. Es ist also

$$V = -km\,arc\,tg\,\frac{h}{a} + \frac{\pi}{2} = +km\,arc\,tg\,\frac{a}{h}.$$

Damit aber in der Scheibe $V = 1$ sei, muß $m = 2\pi k$ sein, und folglich wird wie oben:

$$V = \frac{2}{\pi}\,arc\,tg\,\frac{a}{h} = \frac{2}{\pi}\,\omega.$$

501. Satz von Chasles, betreffend zwei konfokale Homöoide. Dieser Satz lautet folgendermaßen: Das in einem Punkte P eines dünnen Homöoids durch ein konfokales Homöoid erzeugte Potential ist gleich dem durch das erste in dem entsprechenden Punkte des anderen erzeugten.

Zunächst läßt sich zeigen, daß, wenn P und P' zwei Punkte auf der einen, Q und Q' die entsprechenden auf der anderen Fläche sind, $PQ' = P'Q$ ist. Es seien nämlich

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2 + h^2} + \frac{y^2}{b^2 + h^2} + \frac{z^2}{c^2 + h^2} = 1$$

die Gleichungen der beiden Flächen, und es seien

$$x, y, z \text{ und } x', y', z'$$

die Koordinaten von P und P'; dann sind die von Q und Q':

$$\frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} x, \quad \frac{\sqrt{b^2 + h^2}}{b} y, \quad \frac{\sqrt{c^2 + h^2}}{c} z$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} x', \quad \frac{\sqrt{b^2 + h^2}}{b} y', \quad \frac{\sqrt{c^2 + h^2}}{c} z';$$

folglich ist

$$(PQ')^2 = \left[x - \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} x'\right]^2 + \cdots,$$

$$(P'Q)^2 = \left[x' - \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} x\right]^2 + \cdots,$$

also die Differenz

$$(PQ')^2 - (P'Q)^2 = h^2\left[\frac{x'^2 - x^2}{a^2} + \frac{y'^2 - y^2}{b^2} + \frac{z'^2 - z^2}{c^2}\right] = 0 \quad (64)$$

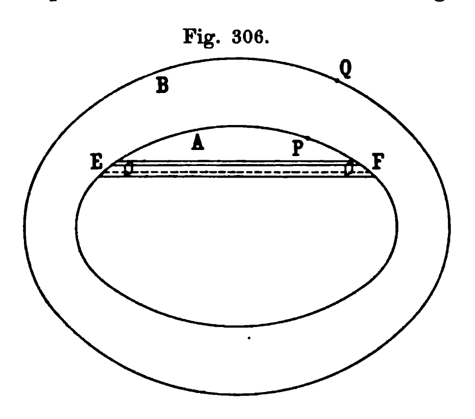
d. h. $PQ' = P'Q$.

Hieraus folgt nun der Chaslessche Satz unmittelbar; denn, welches auch das Entfernungsgesetz der Anziehung sein möge: ein Homöoidelement bei P' wird in Q dasselbe Potential hervorrufen wie das gleichmassige Element bei Q' in P; dieses Resultat braucht man dann nur noch über alle Elemente zu summieren.

In dem besonderen Falle, daß die Anziehung dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist, hat das Potential des äußeren Homöoids, wie wir wissen, im Innern einen konstanten Wert; denselben Wert hat also auch das Potential des inneren Homöoids in der ganzen Oberfläche des äußeren, d. h. letzteres stellt für das innere eine Niveaufläche dar (vergl. § 498).

502. Ivorys Satz von der Anziehung der Ellipsoide. Sind P und Q entsprechende Punkte auf zwei konfokalen, massiven, homogenen und gleich dichten Ellipsoiden A und B, mit den Halbaxen a, b, c bezw. a', b', c', so steht die x-Komponente der in Q durch A erzeugten Feldstärke zur x-Komponente der in P durch B erzeugten Feldstärke im Verhältnis $bc:b'c'$, und entsprechend für die beiden anderen Komponenten.

Fig. 306.



Um dies einzusehen, betrachten wir (Fig. 306) ein dünnes Prisma von A, parallel mit der x-Axe und vom Querschnitt $dy\,dz$; der Abstand des Punktes Q von den Enden sei EQ bezw. FQ, sein Abstand von irgend einem Punkte des Prismas sei r, der Winkel zwischen r und der x-Axe θ. Ist das Anziehungsgesetz durch $f(r)$ dargestellt, so ist die x-Komponente dX der Anziehung eines Elementes des Prismas auf Q

$$\varrho f(r) \cos\theta\, dx\, dy\, dz = -\, \varrho f(r)\, dy\, dz\, dr;$$

für das ganze Prisma wird daher, wenn

$$\int f(r) dr = -\, \psi(r)$$

gesetzt wird:

$$dX = \varrho[\psi(FQ) - \psi(EQ)]\, dy\, dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Entsprechend betrachten wir ein Prisma des anderen Ellipsoids, dessen Enden E' und F' die den Punkten E und F entsprechenden Punkte sind; nach § 501 ist dann $E'P = EQ$, $F'P = FQ$; macht man also den Querschnitt gleich $(b'c'/bc)\, dy\, dz$, so erhält man für die x-Komponente dX' der Kraft auf P:

$$dX' = \varrho \frac{b'c'}{bc} [\psi(F'P) - \psi(E'P)]\, dy\, dz = \frac{b'c'}{bc}\, dX \,. \quad . \quad (66)$$

Füllt man aber das erste Ellipsoid mit solchen Prismen vom Querschnitt $dy\,dz$ an, so wird das andere von den entsprechenden mit dem Querschnitt $(b'c'/bc)\, dy\, dz$ ebenfalls ausgefüllt, und man erhält für die gesamten, von den Ellipsoiden ausgehenden x-Komponenten:

$$X' : X = b'c' : bc \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

Das ist der Ivorysche Satz. Er gilt, wie zuerst Poisson festgestellt hat, für jedes Anziehungsgesetz, das lediglich eine Funktion der Entfernung enthält.

503. Ausdehnung des Ivoryschen Satzes; Übergang von ihm zum Maclaurinschen. Die Gleichung (67) kann in der Form

$$\frac{X'}{X} = \frac{a'b'c'}{abc}\,\frac{a}{a'}$$

geschrieben werden. Da nun die Dichte beider Ellipsoide dieselbe ist, so sind die Massen M' und M mit $a'b'c'$ und abc proportional, und folglich ist

$$\frac{X'}{X} = \frac{M'}{M}\cdot\frac{a}{a'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (67a)$$

Diese Gleichung gilt aber auch für verschiedene Dichten der beiden Ellipsoide, da sich mit der Dichte auch M, und mit diesem auch X in gleichem Maße ändert.

Macht man nun ferner $M' = M$, so wird

$$X' : X = a : a' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

d. h. die x-Komponente der von B herrührenden Feldstärke in P verhält sich zu der von A herrührenden in Q wie die Halbaxe a von A zur Halbaxe a' von B.

Bis hierher war das Anziehungsgesetz ganz allgemein gehalten. Nimmt man nun das Gesetz des umgekehrten Quadrats der Entfernung an, so erhält man, was hier nicht abgeleitet werden kann, als Komponenten der Feldstärke eines homogenen Ellipsoids in einem Punkte xyz auf seiner Oberfläche (oder in seinem Innern)

$$X = Ax,\ Y = By,\ Z = Cz \quad \ldots\ldots \quad (69)$$

wo A, B, C numerische Konstanten sind, die man für gegebene a, b, c aus den Tafeln der elliptischen Integrale entnehmen kann, nämlich

$$\left.\begin{aligned} A &= 2\pi k\varrho abc\int_0^\infty \frac{d(\varphi^2)}{(a^2+\varphi^2)\,W} \\ B &= 2\pi k\varrho abc\int_0^\infty \frac{d(\varphi^2)}{(b^2+\varphi^2)\,W} \\ C &= 2\pi k\varrho abc\int_0^\infty \frac{d(\varphi^2)}{(c^2+\varphi^2)\,W} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (70)$$

wo zur Abkürzung

$$\sqrt{(a^2+\varphi^2)(b^2+\varphi^2)(c^2+\varphi^2)} = W$$

gesetzt ist. Die Kraftkomponenten sind also mit den Koordinaten des Punktes einfach proportional.

Nennt man X'' die von B in Q erzeugte x-Komponente, so hat man

$$\frac{X''}{X'} = \frac{\dfrac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\,x}{x} = \frac{a'}{a};$$

anderseits ist aber $X' = Xa/a'$, es wird also $X'' = X$, und ebenso für die anderen Komponenten. Das ist aber wieder der Maclaurinsche Satz (§ 500).

Es sei bemerkt, daß für äußere Punkte die Anziehung eines Ellipsoids nicht so einfach ist. Es gelten zwar dieselben Formeln wie (70), aber mit dem Unterschiede, daß die untere Grenze der Integrale nicht null, sondern φ_1^2 ist, wo φ_1^2 die größte Wurzel der in φ^2 kubischen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\varphi^2}+\frac{y^2}{b^2+\varphi^2}+\frac{z^2}{c^2+\varphi^2}=1$$

ist; dadurch kommen aber in die Werte von A, B, C die Größen x, y, z hinein, A, B, C sind nicht mehr Konstanten wie in Gl. (69), und die X, Y, Z sind nicht mehr einfach proportional mit x, y, z.

---

504. Ableitung des Gravitationsgesetzes aus der Nichtexistenz von Kraft im Innern einer Kugelschale. Es sind zahlreiche Tatsachen denkbar, die als Ausgangspunkte zur Ableitung des Gravitationsgesetzes gewählt werden können. Zwei derselben sollen hier kurz betrachtet werden.

Die eine ist die Tatsache, daß im Innern einer homogenen und überall gleich dicken Kugelschale kein Feld existiert. Der Beweis, der an den Ivoryschen Satz anknüpft, ist von Duhamel (Cours de Mécanique § 151) gegeben worden. Zwei konzentrische, gleich dichte Kugeln stellen offenbar einen Spezialfall zweier konfokaler Ellipsoide dar. Ihre Feldstärken X, X' in entsprechenden Punkten verhalten sich nach Ivory wie $r^2:r'^2$, wo r' und r die Radien nach den Punkten sind. Ist das Anziehungsgesetz derartig, daß die außerhalb der inneren liegende Masse der größeren Kugel kein inneres Feld erzeugt, so rühren X und X' jetzt beide von der inneren Kugel her, nur beziehen sie sich auf Punkte in den Abständen r' und r, und sie verhalten sich, wie wir eben sahen, wie $r^2:r'^2$; also muß das Anziehungsgesetz das des umgekehrten Quadrats der Entfernung sein.

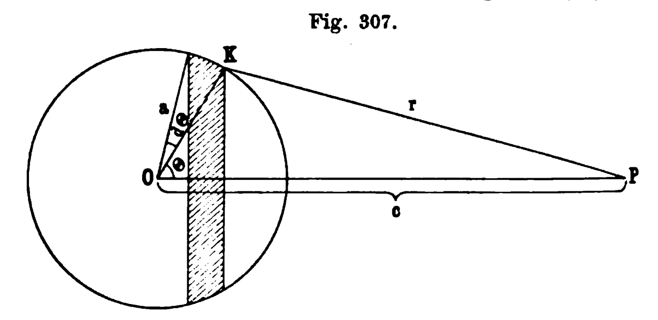
Das Gesetz der umgekehrten Quadrate der Entfernungen läßt sich somit aus der experimentellen Tatsache ableiten, daß innerhalb einer Hohlkugel von gleichförmiger Dicke kein Gravitationsfeld existiert. Für die elektrische Anziehung und Abstoßung entspricht dem das berühmte Experiment von Cavendish.

Einen anderen, von derselben Tatsache ausgehenden Beweis hat Laplace in seiner Mécanique céleste, Buch 2, Nr. 12 gegeben (man vergl. darüber auch Maxwells Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus Bd. I, Art. 74e.)

Die zweite der erwähnten Tatsachen ist die, daß die Wirkung einer homogenen Kugelfläche auf einen äußeren Punkt von ihrem

Radius nicht abhängt; eine Tatsache, die unter anderem aus dem ebenfalls fundamentalen Versuche folgt, wonach zwei konzentrische, mit derselben, aber entgegengesetzten Ladung elektrisierte Kugeln nach außen nicht wirken. Sei nun V das Potential der Kugel und es werde die Kugel vom Radius a in Zonen senkrecht zur Verbindungslinie des Mittelpunktes O mit dem äußeren Punkte P geteilt (Fig. 307): der

Fig. 307.



Kugelpunkt K, also jeder Punkt der Zone, sei von P um r entfernt, ferner sei $OP = c$ und $\angle\ KOP = \theta$. Dann ist, wenn ε die Flächendichte und $\varphi(r)$ eine Funktion der Entfernung r ist:

$$V = 2\pi\varepsilon a^2 \int_0^\pi \sin\theta\, \varphi(r)\, d\theta$$

oder, da

$$r^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta,$$

also

$$r dr = ac \sin\theta d\theta$$

ist:

$$V = \frac{2\pi\varepsilon a}{c} \int_{c-a}^{c+a} r\,\varphi(r)\, dr.$$

Die Integralfunktion von $r\varphi(r)$ sei $\psi(r)$; es ist alsdann

$$V = \frac{2\pi\varepsilon a}{c}\,[\psi(c+a) - \psi(c-a)]$$

oder, wenn die ganze Masse $m = 4\pi\varepsilon a^2$ eingeführt wird:

$$V = \frac{m}{2ac}\,[\psi(c+a) - \psi(c-a)].$$

Entwickelt man dies nach der Taylorschen Reihe, so erhält man:

$$V = \frac{m}{2ac}\left\{\begin{aligned}&\psi(r) + a\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{a^3}{2.3}\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3} + \cdots\\ &-\psi(r) + a\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{a^3}{2.3}\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3} + \cdots\end{aligned}\right\}$$

$$= \frac{m}{c}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{a^2}{2.3}\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3} + \cdots\right).$$

Soll dies, wie beobachtet, von a unabhängig sein, so muß

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} = 0, \text{ also } \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = A, \text{ also } \frac{\partial \psi}{\partial r} = A\varrho + B$$

sein, also, wenn man auf die Funktion $\psi(r) = (1/r)\partial\psi/\partial r$ zurückgeht und, damit in der Unendlichkeit $V = 0$ werde, $A = 0$ setzt:

$$\varphi(r) = \frac{B}{r},$$

und folglich die Kraft mit r^2 umgekehrt proportional.

---

505. Schwerpunkt. Zentrobarische Körper. Wie Lord Kelvin (Proc. R. Soc. of Edinb. 1864) bemerkt hat, führt die Greensche Theorie des Ersatzes einer anziehenden Materie durch eine andere zur Bestimmung von Massenanordnungen, die, im strengen Sinne des Wortes, einen Schwerpunkt haben. Bisher haben wir diesen Ausdruck der Kürze halber für Massenmittelpunkt benutzt, wir wollen ihn jetzt folgendermaßen definieren.

Ein starrer, d. h. aus relativ zueinander festen Teilchen bestehender Körper sei gegeben, die zwischen seinen Teilchen und denen eines anderen starren Körpers wirksamen Kräfte mögen sich auf eine einzige Kraft reduzieren, und diese Kraft möge, wie auch immer die relative Lage der beiden Körper gegeneinander geändert werden möge, stets durch einen in Beziehung zum ersten Körper festen Punkt gehen: dann soll dieser Punkt der Schwerpunkt des ersten Körpers heißen.

Wie wir sehen werden, gibt es zahlreiche Massenanordnungen, die keinen Schwerpunkt in diesem Sinne haben; Körper, die ihn haben, nennt man zentrobarisch.

Der wichtigste Fall für die Physik ist natürlich der, in welchem der andere Körper die Erde ist; aber es können auch andere Weltkörper oder irdische Körper sein.

Ist S der Schwerpunkt eines Körpers B für die Wechselwirkung mit einem anderen Körper A, so ist es auch sein Schwerpunkt für die Wechselwirkung mit irgend einer anderen gänzlich außerhalb von B gelegenen Massenverteilung. Um das einzusehen, müssen wir schrittweise vorgehen.

Zunächst ist, da die Resultante für jede Lage von A durch S geht, S der Schwerpunkt von B für jede Verteilung, die entsteht, wenn man A der Reihe nach in irgend welche neue Lagen bringt. Nun wähle man eine solche Lage von A, daß um einen Punkt C als Mittelpunkt eine Kugel geschlagen werden kann, die A gänzlich einschließt, aber B gänzlich ausschließt. Jetzt drehe man A um einen Kugeldurchmesser herum, wobei jedes Teilchen einen Kreis beschreibt: man sieht dann ein, daß S auch der Schwerpunkt sein wird für die Wirkung zwischen B und einem Körper, der aus A dadurch entsteht, daß man die Masse jedes seiner Teilchen gleichförmig über den Kreis, den es beschrieben

hat, verteilt. Und da dies für jede durch C gehende Axe, um die man A drehen kann, gilt, so gilt es auch für die Wirkung zwischen B und dem Körper, der entsteht, wenn man die Masse jedes Teilchens gleichförmig über die betreffende Kugelfläche verteilt; d. h. es gilt für die Wirkung zwischen B und einem aus gleichförmigen konzentrischen Kugelschalen aufgebauten Körper.

Nun ist aber, wie wir wissen, die Kraft zwischen einer gleichförmigen Schale und jedem Teilchen eines äußeren Körpers so groß, als ob die Masse der Schale in ihrem Mittelpunkte konzentriert wäre. Folglich geht auch die Kraft zwischen B und einer in C konzentrierten Masse A durch S hindurch. Offenbar gilt dies auch für jede andere in C konzentrierte Masse und für jede Lage von C, für welche die obige Kugel beschrieben werden kann. Es läßt sich aber sogar zeigen, daß es für jede beliebige Lage von C in dem Raume außerhalb des Körpers B gilt.

Denn man denke sich zunächst eine Lage von A, für welche die gedachte Kugel möglich ist. Es wird ein ganz bestimmtes Gebiet geben, innerhalb dessen die Zentren solcher Kugeln liegen können, außerhalb dessen sie nicht liegen können. Man lege nun den Körper A teilweise innerhalb, teilweise außerhalb eines solchen Gebietes. Die Anziehung zwischen B und dem ersten Teile geht durch S; da aber die ganze Kraft zwischen B und A durch S geht, so muß die Kraft zwischen B und dem zweiten Teile von A ebenfalls durch S gehen. Nunmehr kann man den Körper A so weit verschieben, daß der erste Teil an die Stelle des zweiten und der zweite in ein neues Gebiet rückt. für diesen letzteren denselben Schluß ziehen u. s. f., womit das Behauptete bewiesen ist.

Da die Kraftlinien durch S gehende Gerade sind, sind die Niveauflächen außerhalb B offenbar Kugeln um S. Daraus folgt aber, daß S von Materie umgeben sein muß, d. h. daß man von außen nach S nicht gelangen kann, ohne die Materie von B zu passieren. Denn sonst könnte man im freien Raum um S eine geschlossene Fläche beschreiben. durch welche hindurch die Kraftströmung nicht null wäre, was dem Satz des § 456 widersprechen würde. Körper vom Charakter eines Ringes, eines offenen Zylinders, einer unvollständigen Kugelschale u. dgl. können also keinen Schwerpunkt im vorliegenden Sinne haben; denn wenn sie einen hätten, könnte er nur im freien Raume liegen. Solche Körper werden sich also der Einwirkung verschieden gelegener Körper gegenüber verschieden verhalten.

506. Zentrobarische Anordnungen. Eine gegebene Masse M' läßt sich stets derart über eine gegebene, die gegebene Masse M vollständig einschließende, geschlossene Fläche verteilen, daß sie ein nach außen zentrobarisches System bildet und einen beliebig gegebenen inneren Punkt zum Schwerpunkt hat.

Denn man verteile zunächst über die Fläche eine Masse derart, daß sie auf der Fläche selbst das Potential von M gerade aufhebt; das Potential in der Fläche ist dann null, und die auf der Fläche verteilte Masse ist $-M$. Anderseits verteile man nunmehr Masse derart über die Fläche, daß im Element E das Potential $kM/(SE)$ herrscht; das äußere Feld ist dann so, als ob sich M in S befände; das System ist also zentrobarisch, die Masse auf der Fläche null und die ganze Masse im Innern wie vorhin. Nun endlich füge man eine Masse über die Fläche hinzu, deren Potential in E gleich $kM'/(SE)$ ist. Das Gesamtpotential in E ist jetzt $k(M+M')/(SE)$ und in jedem äußeren Punkte dasselbe, welches von $M+M'$, in S konzentriert, herrühren würde. Ziehen wir keine negative Materie in Betracht, so müssen wir, wenn die Kraft, statt nach innen, nach außen gerichtet ist, M vermindern, so daß erreicht wird, daß M' für den vorliegenden Zweck hinreicht.

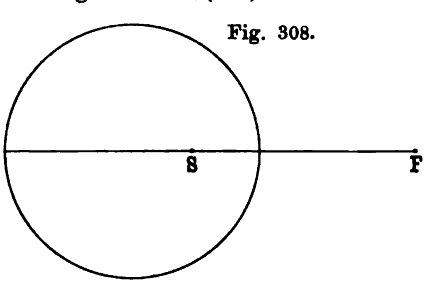


Fig. 308.

Ein wichtiger, wenn auch weniger allgemeiner Satz gilt, wenn M null ist. Spezialfälle hiervon sind eine Kugelschale, deren Flächendichte wie der reziproke Kubus der Entfernung von einem äußeren Punkt F variiert, und sphärische Raumverteilung, deren Raumdichte wie die reziproke fünfte Potenz der Entfernung von F variiert. Die Schale bezw. Kugel zieht äußere Teilchen so an, als ob ihre ganze Masse in dem Bildpunkte S von F vereinigt wäre. Man kann also irgend einen Punkt S als Schwerpunkt im Innern wählen, muß dann aber die Masse so verteilen, daß die Dichte mit der dritten (bezw. fünften) Potenz der Entfernung von dem Bildpunkte F von S umgekehrt proportional wird.

507. Schwerpunkt und Massenmittelpunkt. Trägheitsmoment. Es ist übrigens einleuchtend, daß der Schwerpunkt eines zentrobarischen Körpers mit seinem Massenmittelpunkt (der früher der Kürze halber Schwerpunkt genannt wurde und auch weiterhin, wo dies nichts schadet, so genannt werden kann) zusammenfällt. Denn der Körper ist zentrobarisch für alle äußeren anziehenden Körper, also auch für so entfernte, daß die Kräfte auf alle seine Teilchen nahezu parallel sind; diese Kräfte sind proportional mit den Massen, und ihr Mittelpunkt, also der Massenmittelpunkt, ist der Schwerpunkt.

Schließlich sei bemerkt, daß ein zentrobarischer Körper um alle Axen durch den Schwerpunkt dasselbe Trägheitsmoment hat, so daß das Trägheitsellipsoid in diesem Punkt eine Kugel ist. Den Beweis findet man bei Thomson und Tait, Handb. d. theor. Physik, Bd. II, § 535 (S. 71).

Zwölftes Kapitel.

Astronomische Dynamik.

---

508. Bahnbewegung eines Teilchens unter der Wirkung einer Zentralkraft. Wir wollen zuerst den Fall eines Teilchens betrachten, das sich unter dem Einflusse einer Kraft bewegt, welche nach einem festen Punkte hin gerichtet ist und eine eindeutige Funktion der Entfernung des Teilchens von diesem Punkte ist. Später werden wir dann ganz kurz auch das Problem der relativen Bewegung zweier Körper ins Auge fassen, welche mit gleichen und entgegengesetzten Kräften aufeinander wirken, und das Ergebnis durch die Bewegungen der Planeten um die Sonne veranschaulichen. Was die verwickelteren Probleme in betreff der Bewegung der Weltkörper angeht, so werden wir uns auf wenige allgemeine Betrachtungen beschränken müssen und im übrigen auf die bezügliche Literatur verweisen.

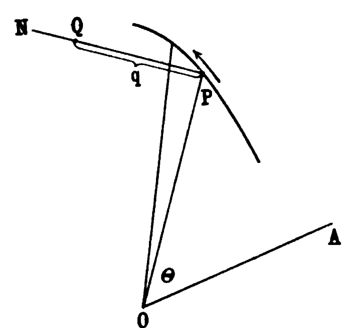
Die vom festen Punkte nach dem Teilchen gezogene gerade Linie heißt Radiusvektor, ihre Länge wird mit r bezeichnet; es ist alsdann die Zentralkraft $K = f(r)$. Wo nichts anderes bemerkt ist, wird die Kraft als eine Anziehung eingeführt, unter K ihr Zahlenwert verstanden und demgemäß, da der positive Sinn vom Zentrum fort gerechnet zu werden pflegt, die Massenbeschleunigung gleich $-K$ gesetzt. Bis auf weiteres sei angenommen, das Teilchen habe die Masse 1; hat es eine andere Masse m, so braucht man nur die Beschleunigung mit m zu multiplizieren.

509. Die Bahn ist eben. Wir nehmen an, das Teilchen habe in einem bestimmten Moment die Geschwindigkeit v_0 und den Abstand r_0 vom Zentrum; die im nächsten Zeitteilchen dt zurückgelegte Strecke ist dann $v_0\,dt$, und die Beschleunigung liegt in der durch das Zentrum und das Bahnelement $v_0\,dt$ bestimmten Ebene. Folglich liegt die Geschwindigkeit im nächsten Moment in derselben Ebene, die nächste Beschleunigung ebenfalls, u. s. f. Es ist also die Bahn jedenfalls eine ebene Kurve, deren Ebene durch den ursprünglichen Impuls bestimmt ist.

Dies ist die erste große Vereinfachung, die eintritt, wenn nur ein Attraktionszentrum vorhanden ist. Bei mehreren wird die Bahn eine Raumkurve (z. B. die Bahn eines Planetoiden unter dem Einflusse von Sonne und Jupiter).

510. Normal- und Tangentialbeschleunigung. Flächensatz. In Fig. 309 sei O das Zentrum, P das sich bewegende Teilchen, der Pfeil deute die Bewegungsrichtung in der Bahn an, OA sei eine feste Linie in der Bahnebene und θ der augenblickliche Winkel des Radiusvektors OP mit ihr. Die Komponente der Geschwindigkeit, welche in die Richtung OP fällt, ist $\dot{r}$; diese Richtung ihrerseits dreht sich aber mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ herum. Zieht man daher eine Linie PN senkrecht auf OP und betrachtet auf ihr einen Punkt Q, der von P um q entfernt ist, so ist dessen Geschwindigkeitskomponente parallel einer festen, mit OP zusammenfallenden Linie $\dot{r} - \dot{\theta} q$, und seine Geschwindigkeit längs einer festen, augenblicklich mit PN zusammenfallenden Linie gleich $\dot{q} + \dot{\theta} r$, oder, wenn q fest gegeben, also $\dot{q} = 0$ ist, gleich $\dot{\theta} r$; und dies gilt natürlich auch für $q = 0$, d. h. für den Punkt P selbst. Seine Geschwindigkeitskomponenten nach den festen Axen OP und PN sind also $\dot{r}$ und $r\dot{\theta}$.

Fig. 309.



Geht man jetzt, mit Hilfe der Gl. (76) in § 271, von den Geschwindigkeiten zu den Beschleunigungen und von festen zu rotierenden Axen über und erwägt, daß die Beschleunigung nach OP gleich der Kraft, die nach PN gleich null sein muß (denn in dieser Richtung wirkt gar keine Kraft), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= -K \\ r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die zweite Gleichung kann auch in der Form

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

geschrieben werden und hat folgende einfache und anschauliche Bedeutung. Die von dem Radiusvektor während der Zunahme von θ um $d\theta$ überstrichene Fläche ist $\frac{1}{2} r^2 d\theta$; die Gl. (2) sagt also aus, daß der Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, in Formel, wenn h eine Konstante ist:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Dies ist der berühmte **Flächensatz**, hier in Anwendung auf die Zentralbewegung. Er sagt, mit anderen Worten, aus, daß das Moment der Bewegungsgröße des Teilchens um das Zentrum $(r . r d\theta / dt)$ konstant ist, und dies muß offenbar der Fall sein, weil die Richtung des Änderungsgrades der Bewegungsgröße in jedem Augenblicke durch O geht, also kein Moment um O hat.

Noch andere Ausspruchsweisen des Satzes sind offenbar diese:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}, \quad r \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\,a)$$

d. h. die Winkelgeschwindigkeit ist mit dem Quadrat des Radiusvektors, die Streckengeschwindigkeit senkrecht zum Radiusvektor mit diesem selbst umgekehrt proportional. In großer Entfernung vom Zentrum bewegt sich also das Teilchen langsam, in kleiner rasch.

511. Differentialgleichung der Bahn. Setzt man

$$u = \frac{1}{r}, \quad r = \frac{1}{u},$$

so hat man, da r und θ gleichzeitig variieren, mit Rücksicht auf Gl. (3):

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{d\theta}{dt}\frac{du}{d\theta} = -h\frac{du}{d\theta} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und weiter:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -h\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Anderseits ist

$$r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{h^2}{r^3} = h^2 u^3,$$

und dies mit Gl. (5) kombiniert verwandelt die erste der Gl. (1) in:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{h^2 u^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Dies ist, in Polarkoordinaten, die Differentialgleichung der Bahn.

512. Spezialisierung der Kraft. Ist K eine gegebene Funktion der Entfernung, so dient die Gl. (6) zur Ermittelung der Bahn; umgekehrt kann man, wenn die Bahn gegeben ist, mittels der Gl. (6) ermitteln, nach welchem Gesetze die Kraft sich mit der Entfernung ändert. Als ein Beispiel für das erstgenannte Problem nehmen wir den Fall, in welchem die Kraft dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist, d. h. wir setzen

$$K = \mu u^2$$

und erhalten dann die Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

ihre vollständige Lösung ist

$$u - \frac{\mu}{h^2} = A \cos(\theta - \alpha),$$

wo A und α Konstanten sind. Es ist einleuchtend, daß

$$\text{für } \theta - \alpha = 0: \quad u = \frac{\mu}{h^2} + A, \quad \text{also } r = \frac{1}{\frac{\mu}{h^2} + A}$$

$$\text{für } \theta - \alpha = \pi: \quad u = \frac{\mu}{h^2} - A, \quad \text{also } r = \frac{1}{\frac{\mu}{h^2} - A}$$

ist. Bezeichnet man den ersten dieser beiden Werte von r mit $a(1 - e)$, den zweiten mit $a(1 + e)$, wo jetzt a und e zwei neue Konstanten sind, so erhält man:

$$A = \frac{e}{a(1 - e^2)}, \quad \frac{\mu}{h^2} = \frac{1}{a(1 - e^2)},$$

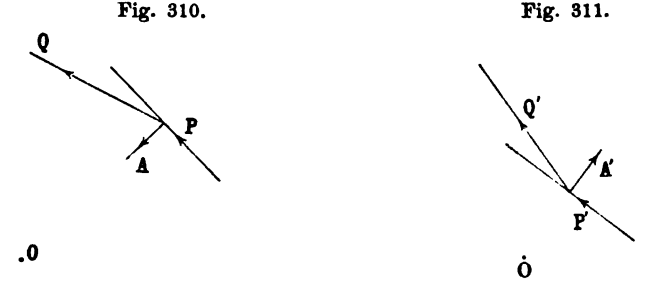
und die Lösung wird:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \alpha)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnittes, vom Parameter $2a(1 - e^2)$, der großen Axe $2a$ und der Exzentrizität e. Für $e > 1$ ist er eine Hyperbel, für $e < 1$ eine Ellipse.

513. Konkave und konvexe Bahn. Welches auch das Kraftgesetz sein möge, die Bahn ist stets nach dem Zentrum konkav, wenn die Kraft eine Anziehung ist, konvex, wenn sie eine Abstoßung ist.

Fig. 310. Fig. 311.



Aus den Fig. 310 und 311 ist dies ohne weiteres einleuchtend; denn bei einer von O ausgehenden Anziehung A geht die Bewegungsrichtung von P in Q über, bei einer von O ausgehenden Abstoßung A' dagegen von P' in Q'.

Auch analytisch ist dies leicht zu zeigen. In Fig. 312 seien P und Q die Orte des Teilchens zu Beginn und Ende des Zeitteilchens dt, ferner sei $PQ = ds$, QS (senkrecht auf OP) $= r\,d\theta$, $SP = -\,dr$. Es ist alsdann:

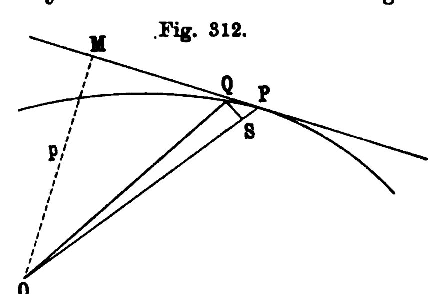


Fig. 312.

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2;$$

anderseits ist, wenn $OM = p$ das Perpendikel von O auf die Bahntangente ist und beachtet wird, daß wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke OMP und QSP

$$\sin SPQ = \frac{p}{r} = \frac{r\,d\theta}{ds} \quad \ldots \ldots \quad (8a)$$

ist:

$$ds^2 = \frac{r^4 d\theta^2}{p^2};$$

durch Kombination beider Formeln wird also:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \quad \ldots \quad (9)$$

und mit Rücksicht auf Gl. (6), da

$$\frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dr} = -\,u^2$$

ist:

$$\frac{1}{p^3}\,\frac{dp}{dr} = u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \frac{K}{h^2} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Für den Fall der Konkavität der Bahn muß offenbar p mit r zu- und abnehmen, also dp/dr positiv sein, und folglich ist auch K positiv, d. h. (s. oben) eine Anziehung, und umgekehrt.

514. Gesetz der reziproken Quadrate. Kriterium der Bahn. Geschwindigkeit aus der Unendlichkeit. Zwischen p, h und der Geschwindigkeit v besteht wegen [vergl. Gl. (8a) u. (3)]

$$p = r^2\,\frac{d\theta}{ds}, \qquad h = r^2\,\frac{d\theta}{dt}, \qquad v = \frac{ds}{dt}$$

die Beziehung

$$pv = h.$$

Benutzt man dies, so erhält man aus Gl. (9):

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad \ldots \quad (11)$$

Nun ist aber die Geschwindigkeit, die ein Teilchen annehmen würde,

wenn es unter dem Einfluß einer Zentralkraft μ/r^2 von der Unendlichkeit bis in den Abstand r vom Zentrum fiele, gegeben durch

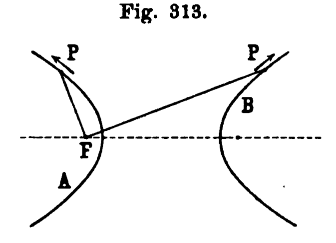
$$v_\infty^2 = 2\mu \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{2\mu}{r} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

folglich wird

$$v_\infty^2 - v^2 = \frac{\mu}{a} = \frac{h^2}{a^2(1-e^2)} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Ist also $v^2 > v_\infty^2$, so ist $e > 1$, die Bahn ist eine Hyperbel; ist $v^2 < v_\infty^2$, so ist $e < 1$, die Bahn ist eine Ellipse. Man nennt v_∞ gewöhnlich die Geschwindigkeit aus der Unendlichkeit und kann dann sagen: Die Bahn ist eine Ellipse oder Hyperbel mit dem Kraftzentrum als einem Brennpunkt, je nachdem die Geschwindigkeit kleiner oder größer als die „Geschwindigkeit aus der Unendlichkeit“ ist. Wenn die Bahn eine Hyperbel und die Kraft eine Anziehung ist, so bewegt sich das Teilchen auf demjenigen Zweige der Hyperbel, in dessen Inneren das Kraftzentrum liegt, bei abstoßender Kraft auf dem anderen Zweige; in jenem Falle also mit der konkaven, in diesem mit der konvexen Bahnseite nach dem Kraftzentrum hin. Die beiden Fälle sind in Fig. 313 veranschaulicht; F ist das Kraftzentrum, A die Bahn bei Anziehung, B die bei Abstoßung.

Fig. 313.



Im ersten Falle ist a negativ, d. h. der Abstand ist vom Scheitel nach der dem Zentrum F abgewandten Seite zu rechnen; in Gl. (13) ist alsdann, für positives μ, die Größe μ/a negativ.

Lautet, allgemeiner, das Kraftgesetz μ/r^n, wo $n > 1$ ist, so ist die Geschwindigkeit aus der Unendlichkeit gegeben durch

$$\frac{1}{2} v_\infty^2 = \int_r^\infty \frac{\mu}{r^n} dr = \frac{\mu}{n-1} \frac{1}{r^{n-1}} \quad \ldots \quad (14)$$

Anderseits, wenn das Kraftgesetz μr^m lautet, wo m zwischen -1 und 0 liegt, so ist $v_\infty = \infty$. In diesem Falle muß man, statt v_∞ eine Größe v'_∞ einführen, welche die Geschwindigkeit darstellt, die ein Teilchen erlangt, wenn es aus der Entfernung r auf das Kraftzentrum selbst stürzt:

$$\frac{1}{2} v_\infty'^2 = \mu \int_0^r r^m dr = \frac{\mu}{m+1} r^{m+1} \quad \ldots \quad (15)$$

515. Energie der Bahnbewegung eines Teilchens. Wir sind etzt im Stande, die Energie der Bewegung anzugeben. Im Abstande r

vom Zentrum hat das Teilchen eine potentielle Energie V gleich der Arbeit, welche der Anziehung $f(r)$ gegenüber geleistet wird, wenn das Teilchen aus einer Normalentfernung c in die Entfernung r gebracht wird; in der Lage ist dann $V = 0$. Ist nun $f(r) = \mu r^{\varepsilon}$, wo ε positiv oder negativ sein kann, so ist die potentielle Energie gegeben durch

$$V = \int_c^r f(r)\,dr = \mu \int_c^r r^{\varepsilon} dr = \frac{\mu}{\varepsilon + 1}(r^{\varepsilon+1} - c^{\varepsilon+1}) \;.\;. \quad (16)$$

Ist die Geschwindigkeit in der Lage r gleich v, so liefert daher das Prinzip der Erhaltung der Energie die Beziehung

$$\frac{1}{2}v^2 + V = \frac{1}{2}v^2 + \frac{\mu}{\varepsilon + 1}(r^{\varepsilon+1} - c^{\varepsilon+1}) = E \;.\;. \quad (17)$$

wo E die ganze Energie des Teilchens ist.

Es sind jetzt, je nach dem Werte von ε, zwei Fälle zu unterscheiden: $\varepsilon < -1$ und $\varepsilon > -1$. Ist $\varepsilon < -1$, so wird, wenn $\varepsilon = -n$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{2}v^2 + V = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{n-1}(r^{1-n} - c^{1-n}) = E \;.\;. \quad (18)$$

oder, indem man als Normallage $c = \infty$ wählt:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{n-1}r^{1-n} = E$$

oder, wenn wieder v_∞ die Geschwindigkeit aus der Unendlichkeit ist:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_\infty^2 = E \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (19)$$

In dem anderen Falle, wenn $\varepsilon > -1$, d. h. zwischen -1 und 0 liegt oder positiv ist, wird für $c = \infty$ auch $V = \infty$, wir nehmen deshalb als Normallage jetzt $c = 0$ und erhalten, da $\varepsilon + 1$ stets positiv ist:

$$V = \frac{\mu}{\varepsilon + 1}r^{\varepsilon+1} = \frac{1}{2}v_\infty^2;$$

die Energiegleichung ist also in diesem Falle

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{\mu}{\varepsilon + 1}r^{\varepsilon+1} = E,$$

oder

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}v_\infty^2 = E \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (20)$$

Beide Fälle unterscheiden sich also nur durch das Vorzeichen des zweiten Gliedes.

Kehren wir jetzt nochmals zur Gl. (18) zurück, so erhalten wir, wenn im Abstande r_0 die Geschwindigkeit v_0 ist:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \frac{\mu}{n-1}(r^{1-n} - r_0^{1-n}) \;\;.\;.\;. \quad (21)$$

Ist nun die Bahn, unter dem Einfluß einer mit r^2 umgekehrt proportionalen Kraft, eine Ellipse, und wählt man die kleinste Entfernung, nämlich $a\,(1-e)$ (vergl. § 512) vom Brennpunkt (Kraftzentrum) als r_0, so erhält man

$$\frac{1}{2}\,v^2 - \frac{1}{2}\,v_0^2 = \mu\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{a\,(1-e)}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Dies kann man kürzer schreiben, wenn man bedenkt, daß das Teilchen in der kürzesten Entfernung sich senkrecht zur großen Axe der Ellipse bewegt, daß demgemäß

$$v_0\,a\,(1-e) = h,$$

also, da

$$\mu = \frac{h^2}{a\,(1-e^2)}$$

ist,

$$v_0^2 = \frac{h^2}{a^2\,(1-e)^2} = \frac{\mu}{a}\cdot\frac{1+e}{1-e}$$

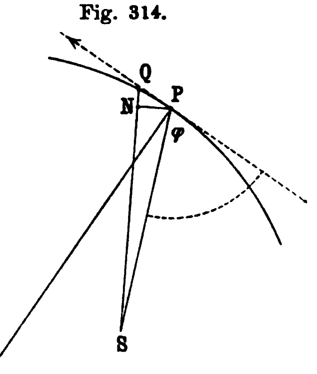
ist; Gl. (22) verwandelt sich daher in

$$\frac{1}{2}\,v^2 = \mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22\,a)$$

in Übereinstimmung mit der schon früher erhaltenen Gl. (11).

516. Tangential- und Normalkomponente. Krümmungssehne. Die Geschwindigkeit v im Punkte P sei gegen den Radiusvektor im Winkel φ geneigt, wie in Fig. 314 veranschaulicht. Dann ist die Tangentialkomponente der Kraft gleich $K\cos\varphi$, in der der Bewegung entgegengesetzten Richtung (denn die Kraft ist $-K$, vergl. oben); die andere, die Normalkomponente, ist gleich $K\sin\varphi$ und nach dem Krümmungsmittelpunkte gerichtet. Ist also der Krümmungsradius in P gleich R, so ist

Fig. 314.



$$v\,\frac{dv}{ds} = -\,K\cos\varphi,\ \frac{v^2}{R} = K\sin\varphi \quad (23)$$

Nun ist $\cos\varphi = dr/ds$, die erste Gleichung wird also $v\,dv = -\,K\,dr$, und durch Integration

$$\frac{1}{2}\,v^2 = -\int K\,dr + C,$$

was eine andere Form der Energiegleichung darstellt. Ist nun $K = f(r)$, so erhält man

$$\frac{1}{2}\,v^2 = -\int f(r)\,dr + C,$$

oder

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = F(r_0) - F(r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

wo $F(r) = \int f(r)\,dr$ die Integralfunktion von $f(r)$ und r_0 die Entfernung vom Zentrum im Ausgangspunkte der Integration ist.

Ist z. B. $f(r) = \mu/r^2$ und $r_0 = a(1 - e)$, also die Bahn eine Ellipse mit dem Kraftzentrum in einem ihrer Brennpunkte, so ist

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{a(1-e)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

dies ist wieder die Gl. (22).

Die zweite der Gl. (23) kann in der Form

$$v^2 = \frac{1}{2} K . 2 R \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

geschrieben werden. Nun ist aber $2 R \sin \varphi$ die Länge der sogenannten Krümmungssehne, d. h. der in die Richtung PS (S ist das Kraftzentrum) fallenden Sehne PST des Krümmungskreises. Vergleichen wir unsere Formel mit der für den freien Fall gültigen $v^2 = 2gh$, so sehen wir, daß v die Geschwindigkeit ist, welche das Teilchen erreichen würde, wenn es aus dem Ruhezustande mit der konstanten Beschleunigung K in der Bewegungsrichtung durch eine Strecke gleich einem Viertel der Krümmungssehne fiele.

Im besonderen Falle einer Kreisbahn vom Radius a um dessen Mittelpunkt unter der Wirkung einer Kraft μ/a^2 ist z. B. die Geschwindigkeit die eines Teilchens, das sich in der Tangente der Bahn mit der Beschleunigung μ/a^2 durch die Strecke $a/2$ fortbewegt hat. Die Eigengeschwindigkeit eines kleinen um die Erde im Abstande R kreisenden Satelliten ist daher $\sqrt{gR}$, wo g die Beschleunigung durch die Schwere im Abstande R ist. Die Umdrehungsperiode des Satelliten würde $2\pi R \sqrt{gR} = 2\pi \sqrt{R/g}$ sein, d. h. gleich der Schwingungsdauer eines Pendels von der Länge des Erdradius unter der Schwere, die an der Erdoberfläche herrscht (981).

517. Apsiden. Apsis heißt ein Punkt der Bahn, in welchem die Bewegung senkrecht auf dem Radiusvektor steht, in dem also die Beziehung

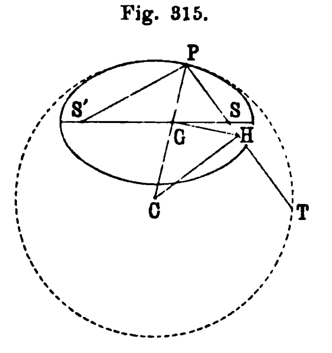
$$\frac{dr}{d\theta} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{du}{d\theta} = 0$$

besteht; sein Abstand vom Brennpunkte heißt Apsidenabstand. Im allgemeinen hängt die Zahl der in einer Bahn vorhandenen Apsiden von der Natur der Bahnkurve ab. Setzt man aber obige Bedingung in die allgemeine Differentialgleichung der Bahn um ein Zentrum ein, so kann man zeigen, daß, wenn die Kraft eine eindeutige Funktion der Entfernung ist, nur höchstens zwei Apsiden existieren können:

auch durch einfache Symmetriebetrachtungen kann man dies einsehen. Bei einer elliptischen Bahn versteht man unter Apsiden demgemäß die Endpunkte der großen Axe, und ihre Verbindungslinie heißt Apsidenlinie. Die beiden Apsidendistanzen stellen zugleich den kleinsten und den größten Wert des Radiusvektors dar; ist der Zentralkörper die Sonne, so nennt man deshalb die Apsiden Perihel und Aphel; ist es, wie beim Monde, die Erde, so spricht man von Perigäum und Apogäum.

518. Bahnbestimmung. Eine Bahn kann bestimmt werden, wenn ihre Ebene, das Kraftzentrum, die Richtung und die Geschwindigkeit der Bewegung gegeben sind. Der wichtigste Fall ist der einer elliptischen Bahn unter Wirkung einer mit dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportionalen Kraft.

Fig. 315.



Gegeben sei also der Brennpunkt S als Sitz der Kraft, die Bahnebene, und, nach Richtung und Größe, die Geschwindigkeit v in einem Punkte P, der von S um r entfernt ist. Denn nach dem früheren ist, wenn p das Perpendikel von S auf die Bewegungsrichtung in P bedeutet:

$$vp = h,$$

und somit ist h bekannt.

Bei einer Ellipse muß, wie wir sahen, $v^2 < 2\mu/r$ sein; dies ist bekannt, wenn μ bekannt ist. Ferner ist nach § 512 und 514:

$$a(1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu}, \quad v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

und folglich:

$$a = \frac{\mu r}{2\mu - v^2 r}, \quad e^2 = \frac{\mu a - h^2}{\mu a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Hiernach wird — vergl. Fig. 314 — die Länge der kleinen Halbaxe:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = h\sqrt{\frac{a}{\mu}} = \sqrt{\frac{a}{\mu}}\, vr \sin\varphi \quad . \quad . \quad (28)$$

Schließlich wird die Bahn selbst folgendermaßen bestimmt. Die in P (Fig. 315) auf der Bahn nach innen errichtete Senkrechte PG bildet mit dem Radiusvektor den Winkel $\frac{\pi}{2} - \varphi$; die denselben Winkel mit PG, aber nach der anderen Seite bildende Linie wird durch den anderen Brennpunkt S' gehen; und da überdies $PS + PS' = 2a$ ist, so ist auch der zweite Brennpunkt bestimmt.

519. Bahnelemente. Wir müssen uns nun fragen, wie die hier als bekannt vorausgesetzten Faktoren an sich festgelegt werden, insbesondere wie die Bahnebene angegeben wird. Bei den Planetenbahnen pflegt man die Neigung gegen die Erdbahn („Ekliptik“) und die Lage der Schnittlinie dieser beiden Ebenen, die sogenannte Knotenlinie, anzugeben. Die Knoten sind die Punkte, in denen der Planet bei seiner Bewegung die Ebene der Ekliptik kreuzt; zwischen beiden wird in folgender Weise unterschieden. Für ein Auge, das im Weltraume über dem Nordpole der Erde plaziert ist und auf die Ekliptik hinabschaut, wird der Planet in dem einen Knoten von der unteren oder südlichen nach der oberen oder nördlichen der Ekliptik empor-, in dem anderen von der nördlichen in die südliche unterzutauchen scheinen; jener heißt der aufsteigende, dieser der niedersteigende Knoten.

Die Lage der Knotenlinie wird durch den Winkel charakterisiert, den die vom Sonnenzentrum nach dem aufsteigenden Knoten einerseits und nach dem Frühlingspunkte der Erde (Ort der Tag- und Nachtgleiche im Frühjahr) anderseits gezogenen Linien miteinander bilden. Dieser Winkel heißt die heliozentrische Länge des aufsteigenden Knotens.

Die Lage der großen Axe und das Bahnzentrum sind gegeben durch die heliozentrische Länge des Perihels und den Perihelabstand $a(1 - e)$.

Die Bahnbestimmung setzt hiernach die Kenntnis von sechs Größen, den sogenannten Bahnelementen voraus, und zwar sind dies:

1. Die große Halbaxe a.
2. Die Exzentrizität e.
3. Die Neigung ψ der Bahnebene gegen die Ekliptik.
4. Die Länge α des Perihels.
5. Die Länge β des aufsteigenden Knotens.
6. Die Länge ω des Planeten in irgend einem als Nullpunkt der Zeitrechnung gewählten Augenblicke. Diese Größe heißt die Epoche; aus ihr läßt sich die Position des Planeten in jedem Augenblicke ableiten.

520. Anomalie: wahre, exzentrische, mittlere. Beziehungen zwischen ihnen. Der Winkel, den der Radiusvektor SA (Fig. 316) vom Perihel nach einem anderen Bahnpunkte P beschreibt, d. h. der Winkel ASP, heißt die wahre Anomalie dieses Punktes. Beschreibt man um das Zentrum C mit der großen Axe AA' als Durchmesser einen Kreis, fällt das Lot PN von N auf AA', verlängert es bis zum Schnittpunkte Q mit dem Kreise und zieht CQ, so heißt der Winkel ACQ die exzentrische Anomalie (sprachwidrig aus „excentro“ gebildet).

Die mittlere Winkelgeschwindigkeit n, mit welcher der Radiusvektor sich umdreht, ist $h/(ab)$, da πab die bei einer Umdrehung überstrichene Fläche und h die doppelte Flächengeschwindigkeit ist. Anders ausgedrückt, da

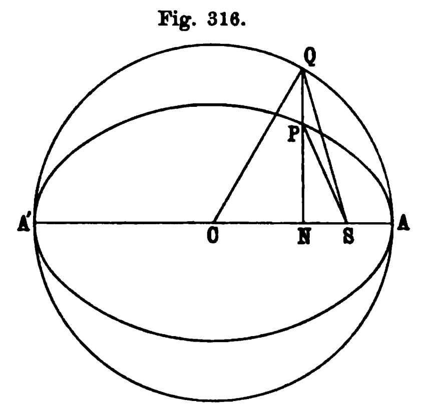


Fig. 316.

$$b = a\sqrt{1-e^2}, \quad h = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$$

ist, es ist:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Die Größe nt, wo t die zur Zurücklegung des Bogens AP erforderte Zeit ist, heißt die mittlere Anomalie. Die Periode, d. h. die Zeit, in welcher der Radiusvektor eine Umdrehung macht, also die Größe

$$T = \frac{\pi ab}{h/2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29\text{a})$$

ist daher:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29\text{b})$$

Beziehen wir uns wieder auf Fig. 316 und nennen die wahre Anomalie θ, die exzentrische φ, so können wir sowohl nt als auch θ durch φ ausdrücken. Denn offenbar ist, wenn eckige Klammern Flächen bedeuten:

$$[ASP] = \frac{b}{a}[ASQ] = \frac{b}{a}([ACQ] - [SCQ])$$
$$= \frac{1}{2} ab\,(\varphi - e \sin \varphi);$$

anderseits ist aber

$$[ASP] = \frac{nt}{\pi}[APA'] = nt \cdot \frac{ab}{2};$$

folglich erhält man

$$nt = \varphi - e \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Diese Gleichung heißt, nach Johannes Kepler, dem Begründer der Himmelsmechanik, die Keplersche Gleichung.

Ferner ist

$$NS = CS - CN = ae - a \cos \varphi = a(e - \cos \varphi),$$

und anderseits

$$NS = -SP . \cos \theta = a(e \cos \varphi - 1) \cos \theta,$$

also durch Vergleichung

$$\cos\theta = \frac{e - \cos\varphi}{e\cos\varphi - 1},$$

oder:

$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1+e}{1-e}\,\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi},$$

d. h. es ist:

$$tg\,\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\,\frac{\varphi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Umgekehrt findet sich φ durch θ ausgedrückt mittels der Formel:

$$\sin\varphi = \sqrt{1-e^2}\,\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Schließlich kann man Gl. (30) mit Benutzung von Gl. (31) und Gl. (32) auch in der Form

$$nt = 2\,arctg\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,tg\,\frac{\theta}{2}\right) - e\sqrt{1-e^2}\,\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta} \quad . \quad . \quad (33)$$

schreiben, womit nt durch θ ausgedrückt ist, so daß man jetzt im Stande ist die Zeit zu berechnen, die zur Zurücklegung irgend eines Bogens der elliptischen Bahn erfordert wird.

Ein Problem von großer Wichtigkeit in der Astronomie ist umgekehrt die Berechnung von r und θ bezw. φ für gegebene Werte von t: das ist das berühmte Keplersche Problem, von welchem im Laufe der Zeit mehrere angenäherte Lösungen gegeben worden sind. Man kann, um zunächst φ durch t auszudrücken (das übrige ist dann leicht), entweder die Keplersche Gleichung, die transzendenten Charakters ist, numerisch auflösen, oder man bedient sich einer von Lagrange gegebenen Reihenentwickelung, von der hier nur das Ergebnis angeführt werden kann:

$$\varphi = nt + e\sin nt + \frac{e^2}{2}\,\frac{\partial\sin^2(nt)}{\partial(nt)} + \frac{e^3}{2.3}\,\frac{\partial^2\sin^3(nt)}{[\partial(nt)]^2} + \cdots$$

oder ausgeführt und umgestaltet:

$$\begin{aligned}\varphi = nt &+ e\sin nt + \frac{e^2}{2}\sin 2nt \\ &+ \frac{e^3}{8}(3\sin 3nt - \sin nt) \\ &+ \frac{e^4}{6}(2\sin 4nt - \sin 2nt) \\ &+ \frac{e^5}{384}(125\sin 5nt - 81\sin 3nt + 2\sin nt) + \cdots\end{aligned}$$

Da bei den Planeten e meist sehr klein ist, wird man vielfach mit den drei oder gar mit den beiden ersten Gliedern auskommen; in letzterem Falle wird

$$\varphi = nt + e\sin nt,$$

und

$$\theta = nt + 2e \sin nt,$$

endlich mit der gleichen Annäherung:

$$r = a(1 - e \cos nt).$$

521. Problem der zwei Körper. Bis hierher haben wir angenommen, der Körper bewege sich um ein festes Zentrum; mit anderen Worten, wir haben die Masse des Planeten oder Satelliten als unendlich klein betrachtet gegenüber der Masse des Zentralkörpers. Diese Annahme ist indessen bei den Planeten des Sonnensystems nur annähernd erfüllt, ihre Masse kommt, so klein sie auch verhältnismäßig ist, doch in Betracht. Man muß deshalb die Beschleunigung der Sonne nach dem Planeten hin in Rechnung ziehen, eine Beschleunigung, die sich zu der des Planeten nach der Sonne hin wie die Masse des Planeten zu der der Sonne verhält. Betrachtet man nur einen Planeten für sich, so kommt man auf diese Weise zu dem Problem der zwei Körper. Die Grundlage für seine Lösung ist offenbar das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung; und um dieses anwenden zu können, muß man die Bewegung beider Körper auf einen festen, durch ihre Bewegung nicht beeinflußten Punkt beziehen. Es ist einleuchtend, daß sich hierzu der Schwerpunkt der beiden Körper am besten eignet.

In Wahrheit ist das Problem viel komplizierter, weil alle Planeten zugleich wirken. Aber schon der nächst einfachste Fall, das Dreikörperproblem — also z. B. die Bewegung der Erde unter der Einwirkung von Sonne und Jupiter — bietet der mathematischen Behandlung, der es seit Jahrzehnten von den hervorragendsten Fachgenossen unterzogen wird, bis jetzt noch unüberwindliche Schwierigkeiten dar; nur für einige spezielle Konfigurationen der Körper ist man zu geschlossenen Teillösungen gelangt, im übrigen muß man sich mit mühsamen Annäherungsverfahren begnügen.

522. Bahn relativ zur Sonne. Korrektion des dritten Keplerschen Gesetzes. Wir beschränken uns nunmehr auf zwei Körper, Sonne und Planet, und beziehen ihre Bahnen auf ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Was beobachtet wird, ist freilich die relative Bewegung des Planeten um das Sonnenzentrum als festgedachten Punkt. Um diese Bewegung aus jener abzuleiten, muß man beiden Körpern noch eine Beschleunigung erteilen, welche derjenigen der Sonne nach dem Planeten hin gleich und entgegengesetzt ist. M sei die Masse der Sonne, m die des Planeten; dann ist die Beschleunigung nach dem gemeinsamen Schwerpunkte hin für den Planeten gleich kM/r^2, für die Sonne gleich km/r^2 in entgegengesetzter Richtung. Die relative Beschleunigung des Planeten ist daher gleich $k(M + m)/r^2$, und diese ist zu nehmen, um die relative Bahn des Planeten um die Sonne zu finden,

d. h. es ist die in § 512 eingeführte, die Kraft in der Einheit der Entfernung charakterisierende Größe

$$\mu = k(M + m)$$

zu setzen. Damit erhält man nach § 520 für die Umlaufsdauer oder Periode

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{k(M + m)}} \quad \dots\dots \quad (34)$$

Für einen anderen Planeten von der Masse m_1 und der großen Halbaxe der Bahn a_1 wird, wenn man annimmt, daß die Konstante k für ihn dieselbe sei (vergl. w. u. § 529):

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3}{k(M + m_1)}},$$

und durch Vergleichung:

$$\frac{T^2}{T_1^2} = \frac{a^3}{a_1^3} \frac{M + m_1}{M + m} \quad \dots\dots\dots \quad (35)$$

Kepler hatte aus seinen Planetenbeobachtungen den Schluß gezogen, daß sich

$$T^2 : T_1^2 = a^3 : a_1^3$$

verhalte; eine Formel, die in Worte gekleidet, das dritte Keplersche Gesetz liefert: Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne. (Die große Halbaxe ist offenbar das Mittel aus Perihel- und Apheldistanz und zugleich die mittlere Entfernung.) Wir ersehen jetzt aus Gl. (35), daß dieses Gesetz nicht ganz exakt ist, daß vielmehr wegen der verschiedenen Massen der Planeten eine Korrektion an dem Gesetze anzubringen ist; sie wird desto merklicher, je massiger der Planet ist, und zwar in dem Sinne, daß seine Umlaufszeit kleiner wird, als sie nach dem Keplerschen Gesetze sein sollte.

Die hier folgende Tabelle (a. f. S.), die aus Maxwells „Substanz und Bewegung“ S. 129 entnommen ist, läßt diese Verhältnisse deutlich hervortreten. Alle Werte von a sind auf den mittleren Sonnenabstand der Erde als Einheit, alle Umlaufszeiten auf die der Erde als Einheit bezogen. Die Werte von a^3 und T^2 sind, wie man sieht, für alle Planeten nahezu gleich; für die kleineren Planeten ist die Differenz $a^3 - T^2$ negativ und äußerst klein, für die großen ist sie erheblicher und positiv; am größten, im Verhältnis zu a^3 oder T^2 selbst, ist sie für Jupiter, den Planeten von der größten Masse.

523. Bestimmung der Masse eines Planeten aus der Umlaufszeit seiner Monde. Die Aufgabe, die Masse eines Planeten zu bestimmen, läßt sich sehr leicht lösen, falls der Planet einen Mond be-

	Merkur	Venus	Erde	Mars
a	0,387098	0,72333	1	1,52369
T	0,24084	0,61518	1	1,88082
a^3	0,0580046	0,378451	1	3,53746
T^2	0,0580049	0,378453	1	3,53747
$a^3 - T^2$	— 0,0000003	— 0,000002	0	— 0,00001
	Jupiter	**Saturn**	**Uranus**	**Neptun**
a	5,2028	9,5388	19,1824	30,037
T	11,8618	29,4560	84,0123	164,616
a^3	140,832	867,914	7058,44	27100,0
T^2	140,701	867,658	7058,07	27098,4
$a^3 - T^2$	+ 0,131	+ 0,256	+ 0,37	+ 1,6

sitzt. Die Masse des Planeten sei m, die des Mondes m', seine Umlaufszeit um den Planeten T', die große Halbaxe seiner Bahn a'; dann ist

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{a'^3}{k(m + m')}},$$

wo der Faktor k, wie die Beobachtung gezeigt hat, derselbe ist, wie für die Wechselwirkung zwischen Sonne und Planet. Anderseits war die Umlaufszeit des Planeten um die Sonne

$$T = \pi \sqrt{\frac{a^3}{k(M + m)}}.$$

Durch Vergleichung erhält man:

$$\frac{T'^2}{T^2} = \frac{a'^3}{a^3} \frac{M + m}{m + m'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

und, wenn m' vernachlässigt wird:

$$m = \frac{T^2 a'^3}{T'^2 a^3 - T^2 a'^3} M \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

Auf diese Weise sind die Massen von Planeten wie Mars, Jupiter und Saturn bestimmt worden. Bei Planeten, die, wie z. B. Jupiter, mehrere Monde haben, ist die Bewegung eines jeden Mondes natürlich durch die der übrigen beeinflußt; mit Rücksicht hierauf aber sind die Perioden mit dem dritten Keplerschen Gesetz in Einklang. Die beobachteten Abstände erlauben dann die Beschleunigungen zu finden; und die Vergleichung derselben mit der des Planeten nach der Sonne hin bestätigt es, daß dieselbe Konstante k, wie oben vorweg angenommen wurde, in beiden Fällen auftritt.

524. Keplersche Gesetze. Flächensatz. Die Bewegung der Planeten um die Sonne wurde von Kepler aus Beobachtungen, ins-

besondere am Mars, abgeleitet, die sein Vorgänger als Prager Astronom, Tycho Brahe, angestellt hatte. Die Resultate sind in seiner 1609 erschienenen Astronomia nova enthalten, die, wenn auch die in ihr entwickelten dynamischen Ideen zum Teil irrig sind, doch die erste Aufstellung der Lehre von der Gravitation als einer Wechselwirkung zwischen Stoffteilen enthält.

Keplers Schlüsse in Bezug auf die Planetenbewegungen waren das Ergebnis vergeblicher Anstrengungen, die beobachteten Örter und Zeiten mit der Hypothese einer mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um einen exzentrischen Punkt beschriebenen kreisförmigen Bahn in Übereinstimmung zu bringen. Der Mittelpunkt der Bahn sollte in der Mitte zwischen jenem Punkte und der Sonne liegen. Kepler bemerkte nämlich, daß in den Punkten der größten und der kleinsten Entfernung von der Sonne die Bahngeschwindigkeiten der Erde sich umgekehrt wie diese Entfernungen verhielten, d. h., daß die Flächengeschwindigkeit in beiden Punkten dieselbe war. Er schloß hieraus, wie es scheint, daß dies in allen Punkten der Fall sein würde, daß also allgemein die zur Zurücklegung gleicher kleiner Bögen erforderten Zeiten ihren Entfernungen von der Sonne proportional seien und daß folglich auch die Summe der Entfernungen der gleichen kleinen Bögen, in die man irgend welche endliche Bögen teilen konnte, sich wie die Zeiten verhalten, in denen die Bögen beschrieben werden. Da die Ermittelung dieser Summe Schwierigkeiten machte, wurde, um wenigstens eine ganz rohe Annäherung zu erhalten, die von dem Anfangs- und Endstrahl des endlichen Bogens eingeschlossene Fläche an ihre Stelle gesetzt, und diese Flächen erwiesen sich überraschenderweise genau proportional mit den Zeiten. Das Ergebnis war also ein ganz anderes, als Kepler erwartet hatte.

525. Gesetz der elliptischen Bahn. Auf diese Weise wurde für die Erde das Gesetz der gleichförmigen Überstreichung der Flächen durch den Radiusvektor nach der Sonne festgestellt. Als nun Kepler sich bemühte zu untersuchen, ob das nämliche Gesetz auch für den Mars gelte, wobei er immer noch an der Vorstellung einer kreisförmigen Bahn um einen exzentrischen Punkt festhielt, stieß er auf Widersprüche bezw. Abweichungen, die sich nur durch die Annahme erklären ließen, daß die Bahn kein Kreis, sondern eine Ellipse mit der großen Axe längs der Apsidenlinie und der Sonne in einem der Brennpunkte sei. Diese Feststellung hat inzwischen die Bezeichnung „Erstes Keplersches Gesetz“ erhalten. Historisch steht es, wie man sieht, dem zweiten (dem Flächensatze) nach.

526. Drittes Keplersches Gesetz. Erst sehr viel später gelangte Kepler zu dem dritten, jetzt seinen Namen tragenden Gesetze, das sich nicht, wie die beiden ersten, auf jeden Planeten für sich, sondern auf alle im Vergleich miteinander bezieht, indem es, wie wir schon

wissen, aussagt, daß die Quadrate der Umlaufszeiten der verschiedenen Planeten um die Sonne sich verhalten wie die Kuben ihrer mittleren Sonnenabstände (d. h. der großen Halbaxen ihrer Bahnen). Zu diesem Gesetze (das, wie wir sahen, einer kleinen Korrektion bedarf) kam Kepler nicht auf Grund irgend einer Theorie, sondern indem er probierte, welche Beziehung die beobachteten Zeiten und Abstände am besten darstellte.

527. Newtons Ableitungen aus den Keplerschen Gesetzen. Nachdem Kopernikus sein System aufgestellt und Kepler dieses System durch seine großen Gesetze präzisiert hatte, war es ein dritter Genius, Isaac Newton, dem es gelang, aus den Keplerschen Gesetzen Schlüsse zu ziehen, die ihn schließlich zu seinem berühmten, an gleichzeitiger Einfachheit und Universalität unerreichten Gesetze führten.

Zunächst schloß er aus dem zweiten Keplerschen Gesetze, dem der Flächen, daß, wenn auf die Planeten überhaupt eine Kraft wirke, sie längs dem Radiusvektor seiner Bahn gerichtet sein müsse. Denn die Frage, ob überhaupt eine Kraft auf den Planeten wirke oder nicht, läßt sich aus dem Flächensatze an sich nicht beantworten. Denn beispielsweise beschreibt auch der von irgend einem seitlichen festen Punkte nach einem sich geradlinig und gleichförmig bewegenden Punkte gezogene Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen, und hier wirkt keine Kraft auf den bewegten Punkt ein. Soll, bei Geltung des Flächensatzes, eine Kraft vorhanden sein, so muß offenbar die Bahn gekrümmt sein.

Anderseits kann, wenn der Flächensatz erfüllt ist, keine Kraft vorhanden sein, welche ein Moment besitzt in Bezug auf den festen Punkt, durch den der Radiusvektor stets hindurchgeht. Denn das Doppelte der Flächengeschwindigkeit ist das Moment der Bewegungsgröße um den festen Punkt; dieses muß also wie jenes konstant sein; das Moment der Kraft um den festen Punkt (der Differentialquotient jenes) muß daher null sein.

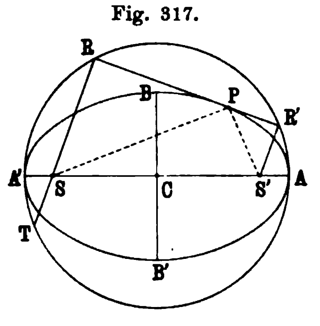
Die Kraft, die auf den Planeten wirkt, ist also — das ist der erste Newtonsche Schluß — längs der Linie durch ihn und das Zentrum der Sonne gerichtet.

528. Ableitung des Kraftgesetzes aus dem Gesetze der elliptischen Bahn. Zweitens zog Newton aus dem ersten Keplerschen Gesetze, dem der elliptischen Bahn, den Schluß, daß eine auf den Planeten wirkende, nach der Sonne gerichtete Kraft existiere, welche umgekehrt proportional sein müsse dem Quadrate der — während der Bahnbeschreibung sich ändernden — Entfernung des Planeten vom Sonnenmittelpunkte (in dem man sich nach dem Gesetze der anziehenden Wirkung kugelförmiger Massen die ganze Sonnenmasse konzentriert zu denken hat). Die Ableitung dieses Resultates liefert ein schönes Beispiel

der Möbius-Hamiltonschen Methode des Hodographen, wie wir sie in der Kinematik kennen gelernt haben.

In Fig. 317 sei APA' die Bahn des Planeten, die in P an sie gelegte Tangente schneide den über AA' als Durchmesser beschriebenen Kreis in R, R'. Dann sind nach § 78 die von den Brennpunkten S, S' nach R, R' gezogenen Linien SR und $S'R'$ auf RR' senkrecht, und es ist, wenn man RS bis zum anderen Schnittpunkte T mit dem Kreise verlängert, $ST = S'R'$. Das Sonnenzentrum (vergl. § 522) sei in Ruhe und liege in S, dann ist SP der Radiusvektor, und nach dem Flächensatze ist $v . RS = h$. Anderseits ist aber $RS . ST = b^2$, also $v . RS = vb^2 : ST$; folglich hat man

Fig. 317.



$$v = \frac{h}{b^2} \cdot ST,$$

d. h. die Geschwindigkeit des Planeten ist mit ST proportional. Der Kreis ist, wie man sieht, der Hodograph der Bahn, der Anfangspunkt ist S, und die um 90° gedrehte Geschwindigkeit im Punkte P ist durch die Linie ST dargestellt. Die die Bewegung des Punktes P begleitende Bewegung des Punktes T stellt die Beschleunigung von P in demselben Maßstabe dar, in dem ST die Geschwindigkeit darstellt, und zwar ebenfalls um 90° gedreht, d. h. die Beschleunigung von P ist senkrecht zur Tangente in T, also längs CT gerichtet; CT ist aber, wie man leicht beweisen kann, parallel mit PS, also ist die Beschleunigung des Planeten nach der Sonne gerichtet.

Da ferner SP mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ rotiert und stets $TC // SP$ bleibt, so ist die Streckengeschwindigkeit von T gleich $a\dot{\theta}$. Dies stellt die Beschleunigung von P in demselben Maßstabe dar, wie ST die Geschwindigkeit, d. h. (s. die letzte Formel) dividiert durch dem Faktor h/b^2; die Beschleunigung ist also $a\dot{\theta}h/b^2$, und dies ist, wenn die Masse des Planeten 1 ist, zugleich die Kraft, mit der er nach der Sonne gezogen wird. Nun ist

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}, \quad SP = r,$$

also:

$$K = h^2 \frac{a}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2},$$

d. h. die Kraft ist mit dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional.

Führt man jetzt für h nach Gl. (29a) die Umlaufszeit T ein und setzt die Masse des Planeten gleich m, so erhält man

$$K = \frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2 r^2}.$$

Vergleicht man dies mit der generellen Gravitationsformel kMm/r^2, wo M die Sonnenmasse ist und bringt die uns schon bekannte Korrektion $M/(M+m)$ an K an, so erhält man

$$k\frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot\frac{a^3}{r^2}\cdot\frac{M}{M+m},$$

und folglich, in Übereinstimmung mit Gl. (34):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{k(M+m)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

529. Dynamische Interpretation des dritten Keplerschen Gesetzes. Nimmt man für den Augenblick an, jeder Planet habe eine besondere, seine Gravitation bestimmende Konstante, z. B. der eine k_1, ein anderer k_2, so würde man aus Gl. (38)

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}\cdot\frac{M+m_2}{M+m_1}\cdot\frac{k_2}{k_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

erhalten, während in dem korrigierten Keplerschen Gesetze der dritte Faktor rechts fehlt; es ist also zu schließen, daß

$$k_1 = k_2 = const.$$

ist, d. h. die Gravitation für die Masseneinheit ist bei allen Planeten dieselbe. Man beachte, daß nach dem Newtonschen Pendelexperiment auch für irdische Körper an der Erdoberfläche die Schweren den Massen proportional sind, also die Schwere pro Masseneinheit für alle Körper gleich groß ist.

530. Newtons Entdeckung des allgemeinen Gravitationsgesetzes. Nun war noch ein weiterer Schritt zu tun, es mußte die, Beschleunigung beim freien Falle irdischer Körper mit der Beschleunigung der Himmelskörper gegen ihre Zentralkörper verglichen werden und auch diese Aufgabe löste Newton. Er wies nach, daß die Beschleunigung des Mondes gegen die Erde zur Beschleunigung beim freien Fall eines Körpers auf der Erdoberfläche im umgekehrten Verhältnis des Quadrates des Abstandes des Mondes vom Erdmittelpunkte zum Quadrate des Erdradius steht. Damit war aber unter der — später als richtig erwiesenen — Annahme, daß die Erde äußere Körper so anzieht, als ob ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkte konzentriert wäre, die Identität der irdischen Schwere und der himmlischen Gravitation nachgewiesen.

Bei der ersten Berechnung stellte sich freilich eine erhebliche Differenz heraus; der Grund lag darin, daß zwar für den Mondabstand in Vielfachen des Erdradius der richtige, für den Äquatorgrad aber der irrige Wert von 96 km, also auch ein falscher Wert für den Erdradius und den Mondbahnradius (der für die Beschleunigung maßgebend ist) eingesetzt wurde. Erst 1682 erfuhr Newton von der neuen Grad-

messung, die Picard in Paris durchgeführt hatte, und welche 112 km ergab. Newton wiederholte die Rechnung und fand nunmehr gute Übereinstimmung.

Drei Jahre später holte er den Beweis nach, daß eine Kugel mit um das Zentrum symmetrischer Massenanordnung einen äußeren Körper so anzieht, als ob ihre ganze Masse im Zentrum vereinigt wäre. Damit war denn das letzte Hindernis beseitigt, und er konnte das allgemeine Gesetz aufstellen, das seitdem seinen Namen trägt, und das schon in den §§ 195 bis 202 sowie im fünften Kapitel nach verschiedenen Richtungen hin behandelt worden ist:

Jedes Massenteilchen zieht jedes andere mit einer Kraft an, die dem Produkte ihrer Massen direkt und dem Quadrate ihres Abstandes umgekehrt proportional ist. In Formel, wenn k der Proportionalitätsfaktor ist (dessen Ermittelung im nächsten Kapitel erfolgen soll):

$$K = k\,\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Der Mondabstand beträgt im Mittel 383000 km, seine Umlaufszeit 27,32 Tage, seine Beschleunigung gegen die Erde beträgt also in cm/sec:

$$\left(\frac{2\pi}{27{,}32 \times 86400}\right)^2 383000 \times 100000 = 0{,}271.$$

Folglich muß die Beschleunigung eines frei fallenden Körpers auf der Erdoberfläche, wenn als Wert des Erdradius im Mittel 6365 km eingeführt und das umgekehrte Verhältnis der Quadrate genommen wird:

$$g = \left(\frac{383000}{6365}\right)^2 .\ 0{,}271 = 981\ \text{cm/sec}^2$$

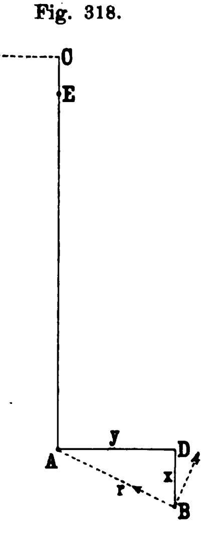
sein, wie es tatsächlich der Fall ist.

Das Newtonsche Gravitationsgesetz hat sich in den zwei Jahrhunderten seiner Anwendung so glänzend bewährt, daß auch nicht die geringfügigste Abweichung hat konstatiert werden können, und wenn neuerdings allgemeine Erwägungen bekannt gemacht worden sind, nach denen die Gültigkeit des Gesetzes keine räumlich unbegrenzte sein kann, so ist es doch höchst zweifelhaft, ob es jemals gelingen wird, solchen Abweichungen auf die Spur zu kommen. Auch eine andere Art möglicher Abweichungen, nämlich infolge eines etwa im Weltraume vorhandenen Mediums, ist bis jetzt trotz wiederholter Bemühungen nicht festgestellt worden. Es ist dies von prinzipieller Bedeutung für die Frage, ob man die Gravitation als eine Fernwirkung oder als eine Wirkung von Schicht zu Schicht durch das Zwischenmedium hindurch auffassen solle. Solange nämlich weder ein Einfluß dieses Mediums auf die Gestirne, noch eine Beeinflussung des Mediums durch die letzteren konstatiert, noch endlich festgestellt ist, daß die Gravitation Zeit

zu ihrer Wirkung brauche, liegt kein Grund vor, die an Einfachheit jedenfalls unerreichbare Newtonsche Fernwirkungsformel zu verlassen und Hypothesen über den Mechanismus der Kraftübertragung aufzustellen, die an keiner Tatsache geprüft werden können. Bei einem verwandten Gebiete von Erscheinungen liegt die Sache seit den Versuchen von Hertz über die Ausbreitung der elektrischen Kraft bekanntlich anders, hier mußte man auf Grund der beobachteten Tatsachen die Fernwirkungstheorie verlassen.

531. Bahnbewegung eines Meteoritenschwarms. Nächst den Planeten und ihren Monden nehmen das größte Interesse in Anspruch die Kometen und die Meteoritenschwärme, die bekanntlich in gewisse Beziehung zueinander gebracht werden. Wir wollen deshalb die Bewegung eines Haufens von Teilchen betrachten, deren jedes der Anziehung der Sonne und der anderen Teilchen unterliegt; dabei wollen wir, um recht einfache Verhältnisse zu haben, die allerdings von der Wirklichkeit meist weit entfernte Annahme machen, der Haufe sei kugelförmig und die Teilchen in ihm seien gleichförmig verteilt, woraus dann folgt, daß die Anziehung des Haufens auf jedes seiner Teilchen nach dem Mittelpunkte der Kugel gerichtet ist.

Fig. 318.



In Fig. 318 sei C die als fest angenommene Sonne, A der Mittelpunkt des Haufens, B eins seiner Teilchen; des letzteren Masse sei 1, die Kraft, mit der es nach A gezogen wird, also $km/(AB)^2 = km/r^2$, wo $r = AB$ und, da die weiter als B von A entfernten Teilchen nach der Potentialtheorie keinen Beitrag liefern, $m = \frac{4\pi}{3}\varrho r^3$ ist; ϱ ist dabei die mittlere Dichte der Materie im Haufen. Es ist also

$$K = \frac{4\pi}{3} k\varrho r = \mu r,$$

wenn μ für $\frac{4\pi}{3} k\varrho$ geschrieben wird. Nach den §§ 272 und 273 und mit der dortigen Bezeichnung, nur daß R statt a für die Strecke CA gesetzt werde, ist dann

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} - y\frac{dn}{dt} - n^2(R+x) = X \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + 2n\left(\frac{dR}{dt} + \frac{dx}{dt}\right) + (R+x)\frac{dn}{dt} - n^2 y = Y \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (40)$$

Zu diesen Gleichungen muß aber, da nicht alle Teilchen in der Bahnebene des Zentrums liegen, eine dritte hinzugefügt werden, die

sich auf die Koordinate z, senkrecht zu jener Ebene, bezieht und annähernd

$$z = -kM\frac{z}{R^3} - \mu z$$

lautet, wenn M die Masse der Sonne ist. Für X und Y gelten die Werte

$$X = -kM\frac{R+x}{\sqrt{[(R+x)^2+y^2]^3}} - \mu x = -\frac{kM}{(R+x)^2} - \mu x$$

(letzteres angenähert)

$$Y = -kM\frac{y}{(R+x)^2} - \mu y.$$

Für die Bewegung des Zentralteilchens wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2R}{dt^2} - n^2R &= -\frac{kM}{R^2} \\ 2n\frac{dR}{dt} + R\frac{dn}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (41)$$

Durch Kombination von Gl. (40) und (41) mit Rücksicht auf die Werte von X und Y erhält man schließlich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} - y\frac{dn}{dt} - n^2x &= 2kM\frac{x}{R^3} - \mu x \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + x\frac{dn}{dt} - n^2y &= -kM\frac{y}{R^3} - \mu y \end{aligned}\right\} \ldots (42)$$

Wenn R konstant ist, ist es auch n, der Schwerpunkt des Haufens beschreibt dann einen Kreis um die Sonne. Die Anziehung nach der Sonne hin ist im Zentrum n^2R pro Masseneinheit, und da dies kM/R^2 sein muß, erhält man $n^2 = kM/R^3$. Die Bewegungsgleichungen des Teilchens mit den Koordinaten x, y, z werden somit

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} - (3n^2 - \mu)\,x &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + \mu y &= 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + (n^2 + \mu)\,z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (43)$$

532. Bedingung für die Beständigkeit des Schwarms. Nehmen wir nun an, daß die Werte von x und y um gewisse konstante Werte herum nur in bestimmten Grenzen schwanken, so müssen wir

$$x = a\cos(mt+\varepsilon), \quad y = b\sin(mt+\varepsilon)$$

schreiben, d. h. als relative Bahn eines Teilchens eine Ellipse von den Halbaxen a und b annehmen. Durch Einsetzen dieser Werte in Gl. (43) erhält man die Bedingungsgleichung

$$(m^2 - \mu)(m^2 + 3n^2 - \mu) - 4m^2n^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

deren Wurzeln, wenn die x- und y-Schwingung stabil sein soll, positiv sein müssen; man findet durch Vorzeichenfeststellung, daß dies der Fall ist, wenn

$$\mu > 3n^2$$

ist oder, indem man für μ wieder $\frac{4\pi}{3} k\varrho$, für n^2 aber kM/R^3 einführt, wenn

$$\frac{4\pi}{3} \varrho R^3 > 3M,$$

d. h.

$$\varrho > \frac{3M}{\frac{4\pi}{3} R^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

ist. Damit also der Haufe zusammenbleibe, muß seine Dichte größer als die einer gleichförmigen Kugel vom Radius des Sonnenabstandes des Haufens und von der dreifachen Sonnenmasse sein. Dieses Ergebnis rührt von Charlier (Bull. Acad. St. Petersbourg, Bd. XXXII, Nr. 2) her.

Es ist zu bemerken, daß, wie sich durch Einsetzen der Werte von n und y in die beiden ersten der Gl. (43) zeigt, die relative Bahn unter den vorliegenden Verhältnissen nur dann ein Kreis sein kann, wenn $3n^2$ klein ist gegen $\mu - m^2$.

533. Bedingung für das Abfangen eines Satelliten seitens eines Planeten oder eines Meteorschwarms. Betrachten wir ein isoliertes Teilchen außerhalb eines Planeten oder sphärischen Schwarms im Abstande r von dessen Zentrum, so haben wir (μ für km gesetzt) statt Gl. (43) die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} - \left(3n^2 - \frac{\mu}{r^3}\right)x &= 0 \\
\frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + \frac{\mu}{r^3}y &= 0 \\
\frac{d^2z}{dt^2} + n^2z + \frac{\mu}{r^3}z &= 0
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Durch Multiplikation bezw. mit $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, Addition und Integration ergibt sich, wenn

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v^2$$

gesetzt wird und C eine Konstante ist:

$$v^2 - 3n^2x^2 + n^2z^2 - \frac{2\mu}{r} + C = 0 \quad . \quad . \quad (47)$$

als Gleichung der relativen kinetischen Energie für den vorliegenden Fall; die Konstante C hat dabei, wie man sich leicht überzeugt, die Bedeutung, daß $\mu/C = a$ die große Halbaxe der Ellipse ist, die das Teilchen um das Schwarmzentrum beschreiben würde, wenn $n = 0$, d. h. wenn die Wirkung der Sonne zu vernachlässigen wäre.

Es läßt sich zeigen, daß obige Gleichung eine obere Grenze für die Entfernung festlegt, in welche das Teilchen vom Schwarmzentrum gelangen kann. Denn für einen gegebenen Wert von v^2 muß das Teilchen auf der durch Gl. (47) definierten Fläche liegen; da ferner v^2 positiv ist, kann es die Fläche, die für $v^2 = 0$ aus obiger entsteht, nämlich

$$3\,n^2 x^2 - n^2 z^2 + \frac{2\,\mu}{r} - C = 0 \quad \ldots \quad (48)$$

nicht passieren. Der Schnitt dieser Fläche mit der x-y-Ebene ($z = 0$) ist die Kurve

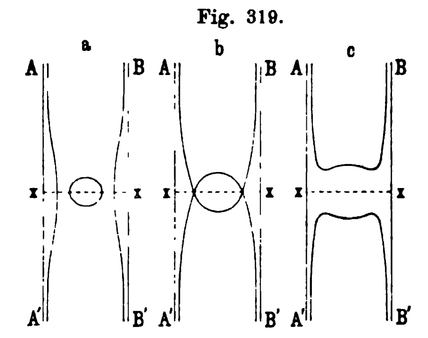
$$3\,n^2 x^2 + \frac{2\,\mu}{r} - C = 0 \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

oder, wenn $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ gesetzt wird:

$$3\,n^2 \cos^2\theta \,.\, r^3 - Cr + 2\,\mu = 0 \quad \ldots\ldots \quad (50)$$

Wenn diese kubische Gleichung für r wenigstens eine endliche, reelle, positive Wurzel für jeden Wert von θ hat, wird die Schnittkurve einen geschlossenen Zweig um das Zentrum herum besitzen. Mehr als zwei positive oder als eine negative Wurzel kann sie nach den Vorzeichenregeln nicht haben; und die Wurzeln sind sämtlich reell, wenn

Fig. 319.



$$\cos^2\theta < \frac{C^3}{81\,n^2\mu^2} \quad \ldots \quad (51)$$

ist. Ist also diese Ungleichung erfüllt, so gibt es eine geschlossene Kurve, und das Teilchen kann aus ihrem Inneren, wenn es einmal drin ist, nicht heraus.

Um die Diskussion zu erleichtern, ersetzen wir die Ungleichung Gl. (51) durch die sie einschließende

$$\frac{C^3}{81\,n^2\mu^2} > 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51\,\text{a})$$

Für $\theta = \pi/2$, also $\cos\theta = 0$, hat unsere Gleichung eine endliche Wurzel $r = 2\,\mu/C$, und zwei unendliche (eine positive, eine negative). Für $\theta = 0$, also $\cos\theta = 1$ anderseits, liegt eine Wurzel zwischen $2\,\mu/C$ und $3\,\mu/C$; dazwischen ändert sich r stetig mit θ.

Neben der geschlossenen Kurve, die ovalförmig ist (Fig. 319a), gibt es noch, entsprechend den unendlichen Wurzeln, zwei ins Unend-

liche gehende Zweige, die die Linien $3 n^2 x^2 = C$ zu Asymptoten haben (AA', BB'). In dem Raume zwischen Oval und Zweigen ist v^2 negativ, also die Geschwindigkeit imaginär; das Teilchen muß hiernach entweder immer innerhalb des Ovals oder immer außerhalb der Zweige bleiben. Soweit der Fall von Gl. (51 a).

Die Fig. 319 c bezieht sich auf den entgegengesetzten Fall, wo $C^3 < 81 n^2 \mu^2$ ist. Hier gibt es keine geschlossene Kurve, das Teilchen kann sich beliebig von dem Planeten oder Schwarm entfernen.

Endlich stellt Fig. 319 b den Grenzfall dar, in welchem gerade $C^3 = 81 n^2 \mu^2$ ist.

534. Anwendung auf den Mond. Wendet man die vorstehend skizzierte Theorie auf Erde und Mond an, so findet man, daß der erste Fall vorliegt; es könnte sogar die große Halbaxe a der Mondbahn zwei- bis dreimal so groß sein, als sie tatsächlich ist, und es würde immer noch $C = \mu/a$ (vergl. oben) die Bedingung (51 a) erfüllen.

Allerdings ist hier nur der x-y-Schnitt der maßgebenden Fläche untersucht worden. Der letzteren selbst ist Hill (Amer. J. of math., Bd. I) nachgegangen und hat gefunden, daß diese Grenzfläche aus drei Blättern besteht, deren erste die Erde, deren zweite die Sonne umschließt, und deren dritte die beiden ersten umschließt, in der (auf der Erdbahn senkrechten) z-Richtung aber unbegrenzt ist. In dem Raume zwischen den beiden ersten Blättern und dem dritten ist v imaginär. Da nun die erste Schicht mindestens 110 Erdradien, der Mond aber nur deren 60 von der Erde absteht, kann der Mond der Erde nicht untreu werden.

Näheres über die zuletzt behandelten Probleme findet man in Rouths Dynamik, sowie in Tisserands Mécanique céleste.

535. Planetarische Störungen. Schon bei Gelegenheit unserer Skizze der elementaren Mondtheorie ist das Problem der Störung der Planetenbewegung berührt worden (vergl. § 274 bis 276, sowie die Fig. 150, S. 296).

Die Ausrechnung dieser Störungen und die Anfertigung von Tafeln für die so modifizierten Örter der Planeten und Monde geschieht auf Grund namentlich der Mécanique céleste von Laplace, und es ist bekannt, welche Triumphe diese Wissenschaft z. B. in der geistigen Entdeckung des Neptun durch Leverrier und Adams (aus den Störungen des Uranus) gefeiert hat.

In neuester Zeit hat dieses Problem und die Himmelsmechanik überhaupt namentlich durch die Arbeiten von Hill, Gyldén, Poincaré u. a. große Fortschritte gemacht; man findet darüber in Tisserands Mécanique céleste und sonst ausführliche Darlegungen.

536. Newtons „rotierende Bahn". Wir wollen hier noch ein interessantes Resultat betrachten, zu dem schon Newton geführt wurde. Denken wir uns einen Planeten, der einer mit dem Kubus der

Entfernung umgekehrt proportionalen störenden Kraft unterliegt. Die Hauptkraft sei, wenn wieder $1/r = u$ gesetzt wird $f(u)$, die störende Kraft μu^3; dann ist die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{\mu}{h^2}\right) u = \frac{f(u)}{h^2 u^2} \quad \dots\dots \quad (52)$$

Durch die Substitutionen

$$\theta' = \theta \sqrt{1 - \frac{\mu}{h^2}}, \quad h' = h \sqrt{1 - \frac{\mu}{h^2}}$$

reduziert sie sich auf

$$\frac{d^2 u}{d\theta'^2} + u = \frac{f(u)}{h'^2 u^2} \quad \dots\dots\dots \quad (53)$$

Diese Gleichung ist von der gewöhnlichen Form. Die Bewegung ist also genau die eines nur der Hauptkraft unterliegenden Teilchens, mit dem einzigen Unterschiede, daß die Winkelgeschwindigkeit nicht $\dot\theta$, sondern $\dot\theta'$, d. h.

$$\frac{d\theta'}{dt} = \sqrt{1 - \frac{\mu}{h^2}} \cdot \frac{d\theta}{dt} = c \frac{d\theta}{dt}$$

ist. Mit anderen Worten: Die Bahnkurve ist die ungestörte, aber mit der Winkelgeschwindigkeit

$$(c - 1) \frac{d\theta}{dt}$$

um das Kraftzentrum rotierende Bahn.

537. Störende Wirkung einer kleinen Tangentialkraft auf die Planetenbewegung. Flutwirkung auf die Mondbewegung. Wir wollen ein Teilchen betrachten, das sich, infolge einer kleinen Tangentialkraft in der Bewegungsrichtung, in einer sehr flachen Spirale um einen Zentralkörper bewegt. Durch die Tangentialkraft wird die Bahngeschwindigkeit des Teilchens erhöht, und man gelangt zu einer immer angenäherteren Darstellung der Bewegung, indem man sich vorstellt, das Teilchen erfahre eine Reihe von schwachen Tangentialstößen, nach deren jedem es die neue Bahn mit der neuen Geschwindigkeit beginnt, und indem man dann die Stöße häufiger und häufiger werden läßt. Wir wollen hier nicht so verfahren, sondern von vornherein stetige Wirkung annehmen.

Die Geschwindigkeit sei v, der Bahnradius a, dann ist die kinetische Energie $\frac{1}{2} v^2$, die potentielle $-\mu/a$. Nach (Gl. 22a) ist dann die Energiegleichung

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{a} = -\frac{\mu}{2a} \quad \dots\dots \quad (54)$$

Durch die Arbeit A der Tangentialkraft wird die Gesamtenergie auf

$A - \mu/2\,a$ erhöht; sind also die neuen Werte von v und a gleich v' und a', so hat man

$$\frac{1}{2}\,v'^2 - \frac{\mu}{a'} = A - \frac{\mu}{2\,a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Für das relative Gleichgewicht muß aber $v'^2 = \mu / a'$ sein; dies eingesetzt gibt

$$-\frac{1}{2}\,v'^2 = A - \frac{2\,a}{\mu},$$

und durch Addition zu Gl. (54):

$$\frac{1}{2}\,v^2 - \frac{1}{2}\,v'^2 = A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

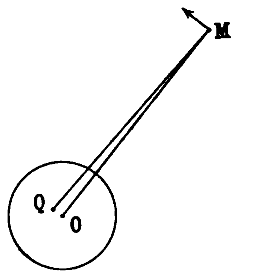
d. h. die kinetische Energie ist durch die Arbeit A nicht erhöht, sondern vermindert worden, und zwar gerade um A; ein Paradoxon, das sich dadurch erklärt, daß auch die Zentralkraft eine Tangentialwirkung, und zwar der Bewegung entgegen, ausübt; diese Wirkung muß hiernach doppelt so groß sein wie die der störenden Kraft.

Anderseits ist der Gewinn an potentieller Energie gleich $-\mu/a' - (-\mu/a) = \mu/a - \mu/a'$, also nach Gl. (54) und (55):

$$\frac{1}{2}\,v^2 - \frac{1}{2}\,v'^2 + A = 2\,A \quad . \quad . \quad (57)$$

er ist also doppelt so groß wie die Einbuße an kinetischer; die Gesamtenergie wächst also um A.

Fig. 320.



Eine derartige Wirkung wird z. B. auf den Mond ausgeübt infolge des Umstandes, daß die höchste Flut nicht gerade unter dem Monde, sondern etwas voraus ist; der Mond wird daher nicht nach dem Erdmittelpunkte O, sondern nach Q (Fig. 320) hingezogen, was eine Tangentialstörung ergibt. Im 14. Kapitel wird hierauf im Zusammenhange mit der Theorie der Gezeiten näher eingegangen werden.

Dreizehntes Kapitel.

Gravitationskonstante und mittlere Erddichte.

---

538. Bestimmung der Gravitationskonstante und der mittleren Erddichte [1]**.** Man kann mit gutem Grunde annehmen, daß die Anziehung irgend eines Planeten sehr annähernd dieselbe ist, als ob seine ganze Masse in seinem Figurmittelpunkte vereinigt wäre. Es sind aber in vielen, wahrscheinlich in allen Fällen Abweichungen von der Kugelgestalt vorhanden; ohne Zweifel haben alle Planeten infolge ihrer axialen Rotation eine größere oder geringere Abplattung an den Polen, und dieser sind, im Falle der Erde, die Erscheinungen der Präzession und Nutation zuzuschreiben; aber die auf ein Teilchen außerhalb wirkende Anziehung ist praktisch doch dieselbe, als ob die ganze Masse der Erde in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre. Die Beobachtung lehrt, daß die Erde nahezu kugelförmig ist und um einen Durchmesser rotiert, um den herum die Abweichung von der Kugelgestalt sehr annähernd symmetrisch ist. Aus den Tatsachen, daß, abgesehen von der Wirkung der Rotation (§ 281), die Beschleunigung eines Teilchens in allen Punkten vom selben Niveau nahezu konstant im Betrage ist, und daß sie sehr annähernd nach dem Erdmittelpunkt zu gerichtet ist, ist zu schließen, daß die die Erde bildende Materie fast genau symmetrisch um den Mittelpunkt verteilt ist; d. h., daß die Erde als aus einer Reihe konzentrischer Kugelschalen, jede von gleichförmiger Dichte, zusammengesetzt gedacht werden kann.

Auch werden wir durch das dritte Keplersche Gesetz, das sich in seiner allgemeinsten Form (§ 522) nicht nur durch das System „Sonne-Planeten", sondern auch durch kleinere Systeme, wie den Jupiter und seine Trabanten, erfüllt findet, zu dem Schluß geführt, daß dieselbe Gravitationskonstante k für die Sonne und alle planetaren Körper gilt; und wie Newton gezeigt hat, ist es dieselbe Formel kmm'/r^2, die die Kraft zwischen Erde und Mond und die Beschleunigung eines fallenden

---

[1]) Näheres über diesen Gegenstand findet man in dem Buche von Poynting, The mean density of the earth, London 1894, das freilich zum Teil schon wieder veraltet ist.

Körpers auf der Erdoberfläche ergibt. Somit entsteht das Problem, die Konstante k zu bestimmen, oder mit anderen Worten die Anziehung zwischen zwei Teilchen, deren jedes von der Masse eins ist, und die in der Entfernung eins voneinander sich befinden. Dies ist selbstverständlich ein zur allgemeinen Gravitation gehöriges Problem und könnte ohne weiteres aus der beobachteten Beschleunigung irgend eines Planeten oder Trabanten gelöst werden, wenn die Masse des anziehenden zentralen Körpers in Vielfachen der dynamischen Masseneinheit bekannt wäre. Aber durch solche Beobachtungen können wir nur die Massen der Himmelskörper miteinander oder mit der unbekannten Masse der Erde vergleichen.

539. Elementare Theorie. Wenn nun aber die Anziehung einer Kugel von bekannter Dichte, etwa einer Bleikugel, auf ein Teilchen von der Masse eins, das sich in einer genau gemessenen Entfernung vom Kugelmittelpunkt befindet, bestimmt ist, kann der Wert von k und damit auch die mittlere Erddichte gefunden werden. Denn wenn M die Masse der Kugel, r die Entfernung des angezogenen Teilchens von ihrem Mittelpunkte und K die beobachtete Kraft in absoluten Einheiten ist, dann ist $K = kM/r^2$ oder

$$k = \frac{r^2}{M} K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Der Wert von k kann dazu benutzt werden, g, den bekannten Wert der Schwere am Orte des Experiments, durch die Masse und die Dimensionen der Erde auszudrücken. Nach § 281 ist, wenn G die gesamte Anziehung durch die Schwere an der Erdoberfläche, R den mittleren Erdradius, n die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation und λ die geographische Breite des Ortes bezeichnet,

$$g = G - n^2 R \cos^2 \lambda = G\left(1 - \frac{n^2 R}{G} \cos^2 \lambda\right).$$

Nun ist aber

$$G = \frac{k V \varrho}{R^2},$$

wo V das Erdvolumen und ϱ die mittlere Dichte der Erde und

$$\frac{n^2 R}{G} = \frac{1}{289}$$

ist; somit ergibt sich der Ausdruck:

$$g = \frac{k V \varrho}{R^2}\left(1 - \frac{1}{289} \cos^2 \lambda\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dieser Ausdruck beruht allerdings auf der Annahme, daß die Erde Kugelgestalt habe, was nicht genau richtig ist, da die Erde in Wahrheit nach neuesten geodätischen Ergebnissen die folgenden Dimensionen hat (a mittlerer Äquatorialradius, c Polarradius):

$$a = 637\,824\,262 \text{ cm}$$
$$c = 635\,650\,844 \text{ cm},$$

so daß sie eine Elliptizität

$$e\left[= (a - c)/a\right] = \frac{1}{293,465}$$

hat.

Um die notwendige Korrektion[1]) anzubringen, muß der Faktor von $k V \varrho / R^2$ in Gl. (2) um

$$\frac{1}{2} m - \frac{1}{3} e - \left(\frac{3}{2} m - e\right) \sin^2 \lambda$$

verkleinert werden, wo m den Wert $1/289$ bezeichnet. Somit haben wir einschließlich eines Korrektionsgliedes $- 2h/R$ für eine Höhe h über dem mittleren Niveau (h in Zentimeter genommen)

$$g = \frac{k V \varrho}{R^2} \left[1 - \frac{3}{2} m + \frac{1}{3} e + \left(\frac{5}{2} m - e\right) \sin^2 \lambda - 3 \times 10^{-9} h\right] \quad (3)$$

Der Wert von V in cbcm ist $1,0832 \times 10^{27}$, derjenige von R in cm ist $6,37 \times 10^8$.

Nun sei g für den Ort des Experimentes entweder durch direkte Pendelbeobachtungen oder nach der Formel

$$g = 980,6056 - 2,572 \cos 2\lambda - 0,000003 h \quad (4)$$

bestimmt, die mit Gl. (3) übereinstimmt und in *cm-sec*-Einheiten sehr annähernd die Ergebnisse der an verschiedenen Stellen der Erde gemachten Schwerebestimmungen ausdrückt. Man muß nur in Gl. (3) die Werte von k, V und R einsetzen und den von ϱ berechnen. Es bleibt also nur noch die Bestimmung von K zu erörtern, mit deren Hilfe k gefunden wird. Weiter unten bei Feststellung der Ergebnisse wird das Symbol Δ wie gebräuchlich für die mittlere Erddichte gesetzt werden.

Der Wert von ϱ kann auch ohne Benutzung des Wertes von k folgendermaßen gefunden werden. Wenn $E = V \varrho$ ist, so ist

$$G = k \frac{E}{R^2} = \frac{4\pi}{3} k \varrho R.$$

Folglich ist

$$\frac{G}{K} = \frac{4\pi}{3} \varrho R \frac{r^2}{M}$$

und somit

$$\varrho = \frac{3}{4\pi} \frac{G}{K} \frac{M}{R r^2},$$

woraus ϱ aus dem durch Wägung der anziehenden Kugel ermittelten Wert von M und dem beobachteten Wert von K berechnet werden kann.

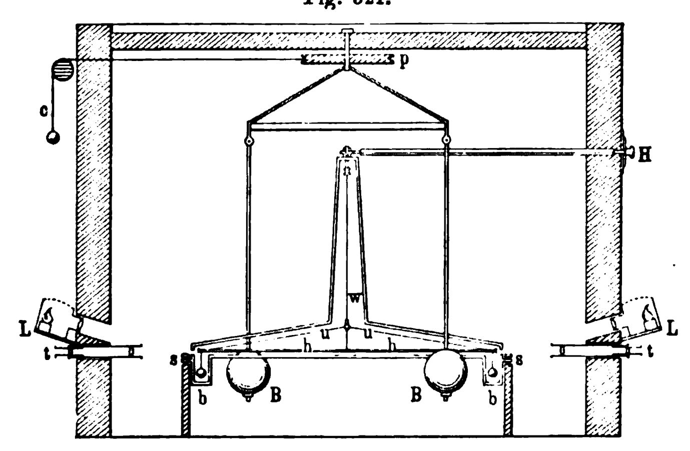
---

[1]) Thomson und Tait, Theoret. Physik 1, 2. Teil, § 797.

540. Experiment von Cavendish. Die gegenseitige Anziehung zweier Bleikugeln wurde durch Cavendish zuerst gemessen nach einer von Michell angegebenen Methode, der selbst sogar einen Apparat für diesen Zweck konstruiert hatte; dieser Apparat wurde von Cavendish verbessert und in großem Maßstabe wiederholt, aber ohne das Prinzip und die allgemeine Anordnung zu ändern. An den Enden eines leichten, an einem Torsionsdraht horizontal aufgehängten Stabes wurden zwei gleiche Bleikügelchen befestigt. Da tatsächlich keine Kraft außer der herunterziehenden Schwerkraft auf jedes dieser Kügelchen wirkt, würde der Balken, wenn ihn keine Luftbewegung stört, diejenige Ruhelage einnehmen, in welcher der Draht untordiert ist. Nun sollen zwei große, gleiche Bleikugeln so angebracht werden, daß die eine nahe der einen der hängenden Kügelchen, ihm zur Seite, die andere in gleicher Entfernung vom anderen Kügelchen, aber auf der andern Seite des Balkens sich befindet. Alsdann wird ein Zug in entgegengesetzten Richtungen auf die Kugeln ausgeübt werden, und es wird ein Kräftepaar auf das hängende System wirken. Dieses würde in eine neue Gleichgewichtslage abgelenkt werden, in welcher das ablenkende Paar durch das Torsionskräftepaar infolge der dem Aufhängedraht erteilten Drehung gerade ausgeglichen würde. Die Ablenkung des hängenden Systems würde den Torsionswinkel ergeben; aus einer unabhängigen Bestimmung der Torsionsstarrheit des Drahtes könnte das Kräftepaar und daher der Zug in absoluten Einheiten zwischen jedem Kugelpaar gefunden werden.

541. Einzelheiten des Apparats. Fig. 321 und 322 (a. f. S.) zeigen die Anordnung des Apparates von Cavendish im Aufriß und

Fig. 321.

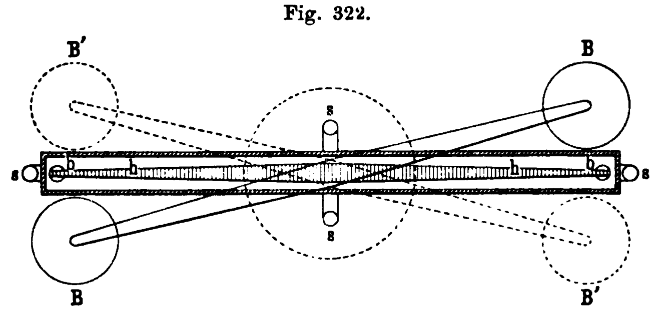


Grundriß. Der Aufhängebalken hh mit den Kügelchen b, b und dem Aufhängedraht w war in einem inneren Gehäuse untergebracht, das

Störungen durch Luftzug größtenteils verhinderte, während der ganze Apparat in eine große äußere Kammer eingeschlossen war, die immer geschlossen blieb. Der Hebel war von Tannenholz, 6 Fuß lang und versteift durch einen Draht *u*, der von seinen Enden aus über einen starren senkrechten Mittelbalken gestreckt war. Am obersten Punkte des so konstruierten leichten Bindebalkens war der Draht befestigt, während das andere Ende von einem auf der Spitze des inneren Gehäuses ruhenden Torsionskopf gehalten wurde. Dieser Torsionskopf konnte mittels eines Stabes *H* von außerhalb der Kammer erfaßt und bewegt werden. Vier im Grundriß verzeichnete Stellschrauben machten es möglich, den ganzen Apparat in geeignete Lage zu bringen.

Die großen Massen waren in einem Rahmen befestigt, der sich um einen Zapfen in der Zimmerdecke drehte, wodurch sie zuerst in die in der Zeichnung voll ausgezeichnete Lage, dann in die durch gestrichelte Linien bezeichnete gebracht werden konnten; oder nach

Fig. 322.



Wunsch konnte auch die die Kugeln verbindende Linie senkrecht zu *h*, *h* gestellt werden, so daß sie kein Kräftepaar auf das hängende System wachrief. Der Drehrahmen wurde von außerhalb des Zimmers durch ein Seil *c*, das über eine horizontale Rolle *p* lief, gehandhabt.

Zwei senkrechte Kupferstäbe trugen an ihrem unteren Ende die Kugeln, und diese Stäbe wurden auf jeder Seite der Torsionskammer durch Vorsprünge an der äußeren Wand angehalten, so daß die großen Kugeln so nahe als möglich an die kleinen herangebracht werden konnten, ohne das innere Gehäuse zu stören.

Die Lage des Hebels *h*, *h* wurde an Skalen gegenüber den äußersten Enden mit Hilfe von in den Zimmerwänden angebrachten Teleskopen *t*, *t* beobachtet. Diese Skalen waren von Elfenbein, in 20stel Zoll geteilt, während der Hebel einen Nonius von fünf Teilstrichen an jedem Ende trug. Die notwendige Beleuchtung der Skalen wurde durch die in einander gegenüber liegenden Öffnungen in der Wand über den Teleskopen angebrachten Lampen geleistet.

Sowohl die hängenden Kügelchen *b* und *b* als die angezogenen Kugeln *B* und *B* waren von Blei. Die ersten maßen 2, die letzteren 12 Zoll im Durchmesser; der Torsionsdraht von versilbertem Kupfer

war $39^1/_4$ Zoll lang; seine Dicke war zuerst so bemessen, daß die Zeit einer Torsionsschwingung (halbe Periode) fünfzehn Minuten betrug, bald wurde er aber durch einen dickeren ersetzt, bei dem die Schwingungszeit nur etwa sieben Minuten betrug. Wenn der Drehrahmen an die Anschläge an jeder Seite des Drehgehäuses traf, so waren die Mittelpunkte der großen Kugeln 8,85 Zoll von der senkrechten Mittelebene des Gehäuses entfernt und auf gleicher Höhe mit den Mittelpunkten der Kügelchen b und b.

542. Experimentiermethode. Es erwies sich als unmöglich, die Gleichgewichtslagen zu beobachten; es wurde deshalb folgendermaßen verfahren: Zuerst wurde der Aufhängedraht so weit als möglich torsionsfrei gemacht, wobei die Verbindungslinie zwischen den großen Kugeln senkrecht zu h, h stand. Dann wurden die großen Kugeln in Stellung auf einer Seite des Rahmens gebracht, was den Hebel h, h in Schwingung um die Gleichgewichtslage versetzte. Es wurden drei aufeinander folgende Umkehrlagen oder Ruhelagen des schwingenden Hebels h, h auf der Skala beobachtet, wonach der Rahmen in die Stellung auf der anderen Seite gebracht wurde und wiederum drei aufeinander folgende Umkehrlagen von h, h beobachtet wurden. Aus diesen konnte die Gleichgewichtslage auf jeder Seite abgeleitet werden, und es wurde der Winkel zwischen ihnen als die durch die Beförderung der Kugeln B und B von einer Lage in die andere erzeugte Winkelablenkung angenommen.

Die Schwingungszeit wurde durch eine Reihe von eigens für diesen Zweck gemachten Beobachtungen sorgfältig bestimmt und diente mitsamt dem berechneten Trägheitsmoment des hängenden Systems dazu, die Berechnung des durch den Draht w angreifenden Torsionskräftepaars zu ermöglichen; auch diese Beobachtungen wurden für beide Stellungen der anziehenden Kugeln B und B ausgeführt, wobei sich fand, daß die Schwingungszeit (halbe Periode) für die eine 426 Sekunden, für die andere 427 Sekunden betrug.

543. Korrektionen. Bei der Umrechnung der Ergebnisse mußten verschiedene Korrektionen angebracht werden, auf die hier unmöglich im einzelnen eingegangen werden kann. Es sei dafür auf die ursprüngliche Mitteilung oder auf das Buch von Poynting (siehe oben) verwiesen. Um etwas zu nennen, so waren die anziehenden Massen B und B nicht genau gegenüber b und b, da der Abstand zwischen ihnen etwas zu klein war. Es wurde auch eine Anziehung von der jedesmaligen entfernteren großen Kugel auf jedes Kügelchen b ausgeübt, eine Anziehung, die die Wirkung der von der nahen Kugel ausgeübten abschwächte; es gab eine auf den Hebel h, h ausgeübte Anziehung, eine durch die Kupferstäbe auf das hängende System ausgeübte Anziehung und schließlich auch ein

durch die infolge der Ablenkung erzeugte Abweichung von der Symmetrie durch das Gehäuse angreifendes Kräftepaar. Dieses letztere fand Cavendish kleiner als $^1/_{10}$ Proz. von dem durch die Anziehung der Massen erzeugten.

544. Theorie des Experiments. Es war durch frühere, von Coulomb ausgeführte Experimente gefunden worden, daß das zur Erhaltung der Drillung eines Drahtes um einen beliebigen Winkel notwendige Kräftepaar dieser Drillung direkt proportional ist. So würde, wenn das untere Ende des Drahtes w relativ zum oberen um einen Winkel θ gedreht wäre, ein Kräftepaar $c\theta/l$ notwendig sein, um die Drehung (durch θ/l gemessen) zu erhalten, wo l die Länge des Drahtes und c eine Konstante ist, die die „Torsionskonstante“ des Drahtes (siehe § 638) genannt wird. Wir wollen c/l durch μ bezeichnen, dann ist das Kräftepaar $\mu\theta$. Wenn nun $2a$ den Abstand zwischen den Wirkungslinien des Zuges zwischen den benachbarten Kugelpaaren bezeichnet, so wird das aus diesen Kräften herrührende Kräftepaar durch $2kMma/r^2$ bezeichnet, wo M die Masse einer großen Kugel, m die einer kleinen und r der Abstand zwischen ihren Mittelpunkten ist.

Wenn jetzt r' der Abstand zwischen zwei entfernten Kugeln (einer großen und einer kleinen) und $2a'$ der Abstand zwischen den (parallelen) Wirkungslinien der Komponenten eines jeden solchen Kugelpaares ist, so gibt es ein entgegengesetztes Kräftepaar vom Betrage $2kMma'/r'^2$. Somit ist

$$\mu\theta = 2kMm\left(\frac{a}{r^2} - \frac{a'}{r'^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Es ist theoretisch korrekter, für M und m nicht die wirklichen Massen der Kugeln im Vakuum zu benutzen, sondern die scheinbaren Massen in Luft, d. h. die wahren Massen, in jedem Falle vermindert um die Masse der durch die Kugel verdrängten Luft. Denn angenommen, es würden zwei sich gegenüberstehende Kugeln entfernt und die leer gewordenen Räume mit Luft gefüllt, so wird zwischen diesen beiden Luftmassen Anziehung stattfinden, die, wenn die ganze Luftmasse im Gleichgewicht ist, durch die Wirkung der umgebenden Luft aufgehoben werden wird. Diese Wirkung wird auch auf die in die Luft eingetauchten Kugeln ausgeübt werden, und nur die Anziehung zwischen dem jetzt in den wieder ausgefüllten Räumen enthaltenen Mehrbetrag an Masse wird unausgeglichen bleiben. Dieser Punkt ist allerdings nicht von praktischer Bedeutung.

Für die Schwingungsversuche gilt die Gleichung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{\mu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wo K das Trägheitsmoment des schwingenden Systems und T seine

Periode ist. Denn es ist $\mu\theta$ das aufdrehende Kräftepaar, und daher ist die Winkelbeschleunigung nach der Gleichgewichtslage zu $\mu\theta / K$, so daß nach der Theorie der einfach harmonischen Bewegung

$$\frac{\mu\theta}{K\theta} = \frac{\mu}{K} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

ist. Eine Korrektion mußte in der Anwendung dieser Gleichung angebracht werden im Hinblick auf die Tatsache, daß das anziehende Kräftepaar während der Schwingungen, durch welche die Periode bestimmt wurde, nicht konstant blieb.

545. Ergebnisse der Versuche. Diese Gleichungen ermöglichen es, die Größe der von der großen Kugel auf die Einheitsmasse einer kleinen ausgeübten Anziehung zu bestimmen und folglich die Gravitationskonstante k auf die schon erklärte Weise zu berechnen. Mit Hilfe des Ergebnisses kann dann schließlich auch der Wert von Δ, die mittlere Erddichte, gefunden werden. Aus 29 von Cavendish gefundenen Zahlen ergab sich für Δ ein mittlerer Wert von 5,448 mit einem wahrscheinlichen Fehler von $\pm$ 0,033.

546. Wirkungen der Temperaturverschiedenheiten. Mancherlei Mühe und Mißerfolg entstand aus der Schwierigkeit, bei dem bedeutenden Umfang des Apparats die Temperatur im ganzen inneren Gehäuse gleichförmig zu erhalten. Wurden die großen Kugeln eine Zeitlang neben den kleinen belassen, so schien sich die Wirkung zu ändern, manchmal in Gestalt allmählicher Steigerung, manchmal allmählicher Abnahme. Dies wurde auf den Unterschied zwischen der Temperatur des Gehäuses und der der großen Kugeln zurückgeführt, so daß die Temperaturverteilung sich änderte, wenn die Massen bewegt wurden und Luftströmungen entstanden, die irreleitende Anziehungen oder Abstoßungen und im Laufe der Zeit Ablenkungen erzeugten, die nur sehr langsam erloschen, wenn der Apparat sich selbst überlassen wurde.

So stieg, als man, um diese Wirkung zu prüfen, die großen Kugeln mit einer Lampe erwärmte und sie dann dem Gehäuse nahe brachte, die Außenseite des Gehäuses in einer halben Stunde um fast 1° C., und man fand die kleinen Kugeln um 14 Skalenteile abgelenkt, statt wie vorher um 3. Durch Abkühlen der großen Kugeln mit Eis bis auf 3 bis 4° unter die Temperatur des Gehäuses, bevor man sie nahe an die Seiten heranbrachte, wurde die entgegengesetzte Wirkung erzielt, in einer Stunde eine Abnahme um $2^1/_2$ Skalenteile. Waren die Kugeln erwärmt worden, so mußte ein aufsteigender Luftstrom auf den Seiten der Kügelchen b und b anstoßend an B und B und ein absteigender Luftstrom auf der anderen Seite entstehen mit einem Überschuß an Druck auf der letzteren Seite gegenüber der ersteren; und in den mit abgekühlten Kugeln angestellten Experimenten mußte der gegenteilige Fall eintreten.

Poynting macht in diesem Zusammenhange auf einige wichtige Beobachtungen und einen Einwand von Crookes aufmerksam. Im Verlaufe seiner Experimente über die Wirkungen von Körpern in hohen Vakua bemerkte Crookes, daß, wenn eine große Masse nahe an eine empfindlich aufgehängte leichte Kugel in Luft von gewöhnlicher Dichte herangebracht wurde, „die Masse, wenn sie kälter ist als die Kugel, diese abstößt, wenn sie wärmer ist als die Kugel, sie anzieht", und daß die entgegengesetzten Wirkungen hervorgerufen wurden, wenn sich das Kügelchen in einem Vakuum befand. Er beobachtete auch, daß es einen mittleren Druck gab, bei dem Temperaturunterschiede nur geringen oder gar keinen störenden Einfluß ausübten, und bemerkte, daß „beim Experimentieren bei diesem kritischen Druck eine Wirkung von der Art, wie sie von Cavendish, Reich und Baily erhalten worden war, konstatiert werden könnte".

547. Wiederholungen des Experiments von Cavendish. Reichsche Versuche. Nach dieser Methode sind von verschiedenen Beobachtern, u. a. von Reich[1]), Baily[2]), Cornu und Baille[3]), Boys[4]), Bestimmungen gemacht worden, die in ein oder zwei Fällen noch nicht endgültig abgeschlossen sind. Bei den Reichschen Experimenten waren die Anordnungen den von Cavendish getroffenen sehr ähnlich. Nur wurde von den anziehenden Kugeln immer nur eine auf einmal benutzt. Die von Rädern, welche auf Schienen an der Zimmerdecke liefen, an einem Messingdraht herabhängende Kugel konnte von der Mittellage oder der Lage, wo das Kräftepaar null war, losgelassen und in die Lage gegenüber der an jedem Ende des Torsionsbalkens aufgehängten Kugel gebracht werden. Es wurden vier aufeinander folgende äußerste Lagen des Torsionsbalkens in seiner Schwingung beobachtet, und, wenn die Ablesungen für diese a, b, c, d waren, wurde $\frac{1}{8}(a + 3b + 3c + d)$ als Ablesung für das mittlere Zentrum der Schwingungsweite genommen. Dann wurde die Masse plötzlich in die Mittellage gebracht und auch für diese vier Ablesungen gemacht. Die letzte, d, der vorigen Reihe wurde als erste der neuen Reihe genommen, und dies ist, wie von Cornu und Baille hervorgehoben wurde, nicht einwandfrei, da die Lagenänderung der anziehenden Kugel nicht als momentan angesehen werden kann. Dann wurde die Kugel wieder in die anziehende Lage von vorher gebracht, und die Beobachtungen wurden wiederholt. Dieselben Manipulationen wurden mit der anderen anziehenden Kugel in den entsprechenden Lagen auf der anderen Seite des Torsionsbalkens vorgenommen.

---

[1]) Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde. Freiburg 1838; Neue Versuche u. s. w. Pogg. Ann. **85** (1852). — [2]) Mem. Roy. Ast. Soc. **14** (1842). — [3]) Comptes Rendus **76** (1873); **86** (1878). — [4]) Proc. Roy. Soc. **46** (1889); Nature **1** (1894).

Das nach schließlicher Berechnung erhaltene Ergebnis der mittleren Dichte war 5,49.

Reich wiederholte seinen Versuch mit einer Anordnung, bei der nur eine anziehende Kugel benutzt wurde, die auf einem drehbaren Tisch befestigt war, mittels dessen die Kugel auf jede Seite einer kleinen von einem Ende des Torsionsbalkens herunterhängenden Kugel gebracht werden konnte. Der Tisch drehte sich um eine Röhre, in der die Kugel hing, so daß die Anziehung des Drehtisches auf die hängende Kugel in allen Lagen die gleiche und die Korrektion für die Anziehung der Messingdrähte erledigt war. Auch zog Reich den aus der magnetischen Wirkung erzeugten möglichen Irrtum in Betracht. Eine diamagnetische angezogene Wismutkugel ergab als Mittelwert aus 10 Bestimmungen 5,5266, eine angezogene Eisenkugel als Mittel aus 12 Bestimmungen 5,6887. Er schrieb den Unterschied einer diamagnetischen Abstoßung zwischen der Bleimasse und dem Wismut zu.

548. Experimente von Baily. Die Bailyschen Versuche waren sehr umfassend und galten lange als die zuverlässigsten unter allen, die veröffentlicht worden waren. Ein kurzer Bericht über diese Versuche und die in späteren Jahren ihnen zu teil gewordene Kritik wird für den angehenden Physiker lehrreich sein.

Das Torsionsgehäuse war an der Zimmerdecke befestigt, innen mit Metallfolie ausgeschlagen, außen in Flanell eingepackt und schließlich mit einem äußeren Gehäuse versehen, das vergoldet war, um so weit als möglich Erwärmung durch Strahlung von außen zu vermeiden. Die anziehenden Kugeln waren von Blei, 380 Pfund schwer, und so exakt wie möglich abgedreht; sie befanden sich auf einem Drehtisch, der auf einem senkrechten auf dem Fußboden des Zimmers befestigten Zapfen angebracht war. Der Drehtisch wurde mittels Seilen von einer Ecke des Zimmers aus bewegt, von der aus die Lagen des Torsionsbalkens mit Hilfe eines Teleskops beobachtet wurden.

Baily benutzte Kugeln von verschiedenem Material und verschiedenen Größen, mit verschiedenen Aufhängungsarten und von 200 bis zu 1000 Sekunden variierenden Perioden. Die Entfernung einer anziehenden Kugel vom gegenüberliegenden angezogenen Kügelchen betrug ungefähr 11 Zoll, während die Mittelpunkte der anziehenden Kugeln um 80 Zoll auseinander lagen.

Am Anfang einer Beobachtungsreihe wurde durch wiederholte Drehung der anziehenden Kugeln erst auf die eine, dann auf die andere Seite des Torsionsbalkens eine hinreichende Schwingung erzeugt. War dies geschehen, so wurde der Umkehrpunkt der Schwingung notiert, und die anziehenden Kugeln wurden in die entgegengesetzte Lage herumgedreht. Baily nahm, ebenso wie Reich, an, daß dieser Wechsel als momentan vor sich gehend gedacht werden könne, so daß die

zuletzt gemachte Ablesung von vorhin zugleich als die erste der neuen Reihe von vier Ablesungen gelten konnte. Die Beobachtungen wurden dann in der uns schon bekannten Weise kombiniert, um das Schwingungszentrum zu ergeben, nämlich durch Berechnung von $\frac{1}{8}(a + 3b + 3c + d)$. Der so gefundene Wert sei mit r_1 bezeichnet.

Alsdann wurden die anziehenden Kugeln in die entgegengesetzte Lage herübergebracht, die immer so war, daß sie durch die Anziehung die Bewegung des hängenden Systems aus der durch die Ablesung d bezeichneten Lage unterstützte, und es wurden, wie vorher, vier Drehlagen genommen, als deren erste die letzte von der vorigen Seite galt. Diese ergaben einen Wert für den Schwingungsmittelpunkt auf der anderen Seite des Nullpunktes. Dieser Wert sei r_2 genannt, und die Lagen seien derart angenommen, daß $r_2 > r_1$ ist. Dann wurden die anziehenden Massen in die erste Lage zurückgebracht und die Beobachtungen wiederholt, die einen Wert, der r_3 heißen möge, für den Mittelpunkt ergab. Als Ablenkung wurde schließlich die Größe

$$\frac{1}{2}\left[r_2 - \frac{r_1 + r_3}{2}\right]$$

betrachtet. Der Zweck dieser Prozedur war, die Wirkung der Lagenänderung des Schwingungsmittelpunktes zu eliminieren, eine Änderung, die beinahe fortwährend, gewöhnlich in derselben Richtung fortschritt; unter der Annahme, daß diese Änderung mit gleichförmiger Geschwindigkeit stattgefunden hatte, war die Korrektion exakt, andernfalls mindestens sehr annähernd.

Die Schwingungsperiode wurde dadurch gefunden, daß man bei jeder Reihe von Ablenkungsbeobachtungen die Durchgangsmomente derjenigen beiden aufeinander folgenden Teilstriche der Skala beobachtete, zwischen denen, wie sich aus vorläufigen Beobachtungen ergab, der Schwingungsmittelpunkt lag, und aus diesen der Durchgangsmoment des Schwingungsmittelpunktes berechnet. Die nach der Formel $\frac{1}{4}(t_1 + 2t_2 + t_3)$ — wo t_1, t_2, t_3 sich auf drei aufeinander folgende Beobachtungsreihen beziehen — berechnete Schwingungsdauer wurde als frei von der Wirkung der Verschiebung des Mittelpunktes angenommen.

Die Abstände zwischen dem Mittelpunkte jeder anziehenden Kugel und einem angenommenen Mittelstriche wurden mit Hilfe eines Mikroskopes für jede der beiden Lagen der anziehenden Kugel gemessen, und das Mittel daraus wurde als der Abstand zwischen den Mittelpunkten der anziehenden und angezogenen Kugeln angesehen.

Es sind gegen die Baily sche Versuchsmethode verschiedene Einwände erhoben worden. Erstens wurde von Cornu und Baille darauf hingewiesen, daß die Annahme, man könne den zur Umkehrung des Drehtisches benutzten Zeitraum vernachlässigen, zu erheblichem Irrtum Anlaß gebe. Da die Kugeln rasch herumgeschleudert wurden, gleich

nachdem der letzte Ausschlag einer Reihe von vier abgelesen worden war, und zwar in diejenige Lage, in welcher sie durch ihre Anziehung die nächste Halbschwingung unterstützten, so wurde angenommen, daß diese Ablesung, z. B. *d*, als erste einer Gruppe von vier Ablesungen für die neue Lage gelten könne. Da aber die für die Übertragung der Kugeln in die neue Lage notwendige Zeit für die Anziehung nicht voll in Betracht kommt, so ging das schwingende System durch eine Gleichgewichtslage hindurch, welche einer kleineren Ablenkung als *d* entsprach. Also mußte *d* eine zu kleine Ablenkung vom Drehpunkte bis zur folgenden Ablesung ergeben und lieferte eine zur vorherigen Lage der anziehenden Kugel zu nahe mittlere Lage, und dies wiederholte sich auf beiden Seiten. Also ergab sich die Ablenkung ein wenig zu klein in jedem Falle und ergab einen zu großen Wert der mittleren Erddichte.

Baily beobachtete, ohne sie erklären zu können, die Tatsache, daß die gefundene mittlere Dichte abnahm, wenn die Masse der angezogenen Kugeln zunahm. Dies ist vielleicht der eben erwähnten Fehlerquelle zuzuschreiben; die Zunahme der Masse der angezogenen Kugeln muß das Trägheitsmoment des hängenden Systems erhöhen, somit wird die Periode zunehmen, und der Verlust an Anziehung während der zur Lagenänderung der anziehenden Massen notwendigen Zeit wird von geringerer Bedeutung sein.

Eine Prüfung der Baily schen Versuche durch Cornu und Baille rechtfertigte ihren Verdacht, daß die Beibehaltung der letzten Schwingung jeder Reihe als erster der nächsten Reihe zu ernsthaften Fehlern leite. Baily s endgültiges Ergebnis war 5,6747 ± 0,0038. Aber zehn seiner aufs Geratewohl von Cornu und Baille herausgegriffenen Versuche ergeben eine Dichte von 5,731, was durch Ausscheidung der ersten Schwingung auf 5,615 reduziert wurde. Das im selben Verhältnis reduzierte Endergebnis würde 5,55 werden.

Es gibt andere Anomalien in den Baily schen Ergebnissen, welche anzeigen, daß es Störungen gab, die nicht genügend in Rechnung gezogen waren oder gegen die man sich nicht genug geschützt hatte. Hicks hat darauf hingewiesen, daß nach den Ergebnissen die mittlere Dichte fast gleichförmig fällt, wenn die Temperatur, bei der die Experimente gemacht werden, steigt. Auch scheint Baily nicht berücksichtigt zu haben, daß die Annäherung des Apparates so nahe, daß man den Abstand der Kugeln von der angenommenen mittleren Lage mit einem Mikroskop ablesen kann, ernstliche Störungen der Temperatur hereinbringen müßte, wenn nicht geeignete Vorsichtsmaßregeln getroffen werden.

Wie oben § 544 erwähnt wurde, sollten die in Rechnung gezogenen Massen der Kugeln die durch Wägung in Luft bestimmten Massen sein. Tatsächlich aber wurden die Gewichte für die verdrängte Luft korrigiert, ein prinzipieller Irrtum, der indessen die Ergebnisse nicht in irgend merklichem Grade beeinflußt.

549. Experimente von Cornu und Baille. Diese Untersuchung, die, wie es scheint, noch nicht endgültig abgeschlossen ist, wurde mit Hilfe einer Torsionswage ausgeführt, die die Störungen vermeiden sollte, denen die nach dem Modell von Cavendish gebauten Apparate unterworfen waren. Die anziehenden Massen sind Quecksilberkugeln, 12 kg schwer, in gußeisernen Schalen in fester Stellung eingeschlossen. Die Lageänderung der Massen wird durch Umgießung des Quecksilbers durch Röhren besorgt, was vollständig die mit dem Gebrauch eines Drehtisches verbundene Schwingungsstörung verhindert und zur Erhaltung gleichförmiger Temperatur beiträgt. Die angezogenen Kugeln sind von Kupfer, jede 109 g schwer und werden von einem leichten, nur 50 cm langen Aluminiumröhrchen getragen. Der ganze Apparat wird auf diese Weise viel kleiner, was sowohl im Hinblick auf Empfindlichkeit als auf Vermeidung von Temperaturstörungen von Vorteil ist. Die Schwingungen werden elektrisch registriert, um ein vollständiges Bild der Bewegung mit Zeitmarken auf demselben Streifen zu gewähren.

In den Jahren 1872 und 1873 wurden zwei mittlere Ergebnisse für ρ gefunden, nämlich 5,56 und 5,50, von denen das erste als zuverlässiger galt, da man eine leichte Durchbiegung des Hebels entdeckte, die wahrscheinlich an den niedrigeren Werten der zweiten Reihe von Versuchen schuld war. Im Jahre 1878 war die Wage verbessert worden und funktionierte so gut, daß die Schwingungsdauer ein Jahr lang fast genau bei 408 Sekunden verblieb. Das mit der verbesserten Anordnung gefundene mittlere Ergebnis war wiederum 5,56 für die mittlere Erddichte.

550. Apparat und Versuche von Boys. In betreff der von Cornu und Baille vorgenommenen Verkürzung des Balkens sei bemerkt, daß, wenn die anderen Dimensionen ungeändert bleiben, das Trägheitsmoment im Quadrat des Abnahmegrades der Länge sich verringert; also daß, wenn die Länge im Verhältnis n zu 1 abnimmt, das Trägheitsmoment sich im Verhältnis $n^2 : 1$ ändert. Wird dann die Periode unverändert erhalten, so muß μ/K (§ 544) ebenso bleiben wie vorher, d. h. auch μ muß sich im Verhältnis $n^2 : 1$ ändern. Also ist für eine gegebene Ablenkung θ das durch die Anziehung angreifende Kräftepaar gleich dem früheren Betrage mal n^2; aber im gleichen Abstande wie vorher ist das Kräftepaar gleich dem früheren mal n. Die Empfindlichkeit ist daher, da $n < 1$ ist, im Verhältnis von $1 : n$ gewachsen. Der Balken kann demnach unter entsprechender Verkleinerung von μ und steigender Empfindlichkeit verkürzt werden, solange er nur stark genug bleibt, um die ganze aufgehängte Masse zu tragen.

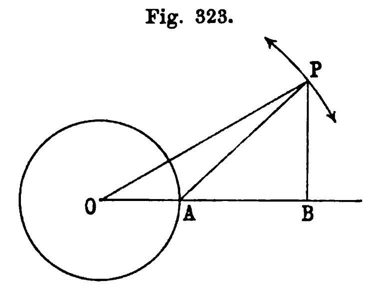
Auch die Verlängerung des Aufhängefadens oder Drahtes ohne Verringerung des Querschnittes ergibt, wie bemerkt werden muß, eine verhältnismäßige Verringerung des Wertes von μ, so daß es möglich

ist, durch Verlängerung des Fadens seine Festigkeit unverändert zu erhalten.

Fortgesetzte Verkürzung des Balkens hat freilich, wie man einsehen wird, den Nachteil, das entgegenwirkende Kräftepaar, das von der Anziehung jeder großen Kugel auf das entfernter hängende Kügelchen zu stärken, was sehr störend werden kann, wenn die Länge stark gekürzt wird.

Wenn jede Dimension des Apparates verkleinert wird, während der Aufhängedraht so geändert wird, daß die Periode konstant erhalten wird, so ändert sich die auf das hängende Kügelchen ausgeübte Anziehung im Verhältnis n^6/n^2 oder $n^4/1$; daher ändert sich das Kräftepaar im Verhältnis $n^5 : 1$; aber das Trägheitsmoment ändert sich im Verhältnis $n^3 \times n^2$, also $n^5 : 1$. Folglich muß sich für dieselbe Periode der Wert von μ im Verhältnis $n^5 : 1$ ändern. Die Torsionsstarrheit ändert sich also im selben Verhältnis wie das Kräftepaar in dem verringerten Abstande von den Kugeln, und es wird aus diesem Grunde dieselbe Winkelablenkung des Balkens mit den Massen in dieser Lage erzeugt werden. Die Empfindlichkeit bleibt also ungeändert.

Fig. 323.



Diese Ergebnisse der Dimensionsänderung wurden von Boys in der schon erwähnten Mitteilung (vergl. § 547) dargelegt und von ihm zur Konstruktion eines Apparates von sehr kleinen Dimensionen benutzt, bei dem seine wichtige Erfindung sehr dünner und dabei tragfähiger Quarzfäden verwertet ist, um einen Aufhängefaden von genügend kleiner Torsionsstarrheit zu liefern.

Auch wurde durch Boys erwiesen, daß, wenn man die Mittelpunkte der anziehenden und angezogenen Massen in die Lagen P und A auf einer Linie AP bringt, welche in einem gewissen Winkel PAB (der kleiner als 90^0 ist) gegen die vertikale Ebene durch die Zentren der angezogenen Massen geneigt ist, das Moment der anziehenden Kräfte auf die Wage (unter Vernachlässigung des von den entfernten Massen herrührenden entgegengesetzten Kräftepaares) für eine gegebene Entfernung c des Mittelpunktes der anziehenden Masse von der Axe O und eine feste Lage von A im Maximum werden kann. Daß dieses Maximum existiert, kann ohne Rechnung eingesehen werden; der Leser kann leicht die genaue Lage finden. Wenn OP, OA, AB (Fig. 323) durch c, a, x bezeichnet werden und M und m die anziehenden und angezogenen Massen bezeichnen, so ist die Anziehung, die längs AP stattfindet,

$$kM \frac{m}{x^2 + c^2 - (a + x)^2},$$

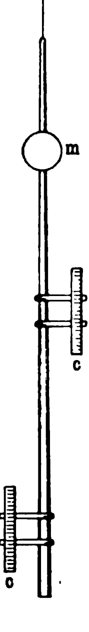
davon ist das Moment um O dieser Ausdruck, multipliziert mit c $\sin OPA$, d. h. mit

$$a \frac{\sqrt{c^2 - (a + x)^2}}{\sqrt{x^2 + c^2 - (a + x)^2}},$$

und daher ist das Quadrat des Momentes proportional mit

$$\frac{c^2 - (a + x)^2}{[x^2 + c^2 - (a + x)^2]^3}.$$

Fig. 324.



Es kann bewiesen werden, daß dies ein Maximum für konstantes a und c hat, wenn

$$a x^2 + (3 a^2 + c^2)\, x - 2 a\, (c^2 - a^2) = 0$$

ist, oder wenn (θ der Winkel POB)

$$c a \cos^2 \theta + (c^2 + a^2) \cos \theta - 3 c a = 0$$

ist.

Um das entgegengesetzte Kräftepaar aus den entfernten Massen aufzuheben, schlug Boys vor, die angezogenen Massen auf verschiedene Niveaus zu bringen; aus diesem Grunde nahm er in dem von ihm konstruierten und in seiner ersten Abhandlung beschriebenen Apparate die in Fig. 324 gezeigte Form der Torsionswage an.

An Stelle von zwei Kügelchen werden zwei kleine Bleizylinder, die nur 11,3 mm lang und vom Durchmesser 3 mm sind, und die an einem konischen Glasrohre durch leichte Metallarme an verschiedenen Stellen und nach entgegengesetzten Seiten befestigt sind, als angezogene Massen benutzt. Die Mitten der Zylinder sind auf verschiedenen Niveaus von 50,8 mm Abstand, während der Abstand von der Axe 13 mm beträgt. Am oberen spitzen Ende des Glasstabes ist ein Quarzfaden befestigt, der von einem Torsionskopfe herabreicht. Ein Spiegel, den die Glasröhre trägt, ermöglicht es, die Ablenkungen der Wage auf dem gewöhnlichen Wege durch einen reflektierten Strahl einer Lampe abzulesen, der auf eine ungefähr $10^1/_2$ m vom Spiegel entfernte Skala fällt. Ein ebenes Glasfenster in der die Torsionswage schützenden Glasröhre erlaubte dem Lichte den Durchgang.

Die Wage ist also so klein, daß sie in einem engen Metallrohre (in Fig. 324 nicht sichtbar) eingeschlossen ist, welches den Torsionskopf trägt und dazu dient, den Apparat vor Luftzug zu schützen und seine Temperatur konstant zu erhalten.

Die anziehenden Massen sind zwei Bleizylinder, 50,8 mm in Durchmesser und Länge, deren Mittelpunkte auf der Höhe der kleinen Zylinder sind. Sie sind mit Schrauben an der Innenseite eines äußeren, mit dem hängenden Systeme koaxialen Metallzylinders befestigt, so daß

ihre Axen in einem Hauptschnitte der Röhre liegen. Der Zylinder steht auf einer nivellierten ebenen Basis (die auch die Röhre mit der Torsionswage trägt) und kann um seine eigene Axe gedreht werden um jeden beliebigen Winkel, so daß die anziehenden Massen dahin gebracht werden können, in denjenigen Lagen auf die kleinen Zylinder zu wirken, in welchen das größte ablenkende Kräftepaar in einer von den beiden Richtungen um die Axe der Wage ausgeübt wird.

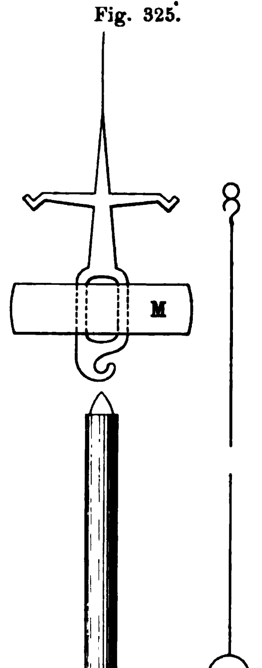
Boys sagt, daß das Ergebnis seiner vorläufigen Experimente mit diesem Apparate „vollständig und befriedigend" gewesen ist. „Als Vorlesungsexperiment kann die Anziehung zwischen kleinen Massen leicht und sicher gezeigt werden, obgleich die die Bewegung veranlassende Kraft nicht größer ist als ein zweihundert Tausendstel einer Dyne, und noch dazu mit der verhältnismäßig kurzen Periode von 80 Sekunden." Er fährt fort: „Ich beabsichtige, wenn ich einen für meine Beobachtungen geeigneten Ort erhalten kann, einen Apparat eigens für absolute Bestimmungen herzustellen. Die Dimensionen werden vergrößert werden müssen, so daß die Längen mindestens bis zu einem Zehntausendstel bestimmt werden können. Ich denke, beide Massenpaare müßten an Fäden oder Drähten aufgehängt werden, so daß die Entfernung ihrer Mittelpunkte von der Axe genau gemessen werden kann, und so, daß im Falle der kleinen Massen das Trägheitsmoment des Balkens, Spiegels u. s. w. gefunden werden kann, indem man abwechselnd die Periode mit und ohne angezogene Massen messen kann. Die unausgeglichenen Anziehungen zwischen dem Balken u. s. w. und den großen Massen einerseits und zwischen den kleinen Massen und etwaigen unsymmetrischen Dingen bei der Unterlage der großen Massen anderseits wird wahrscheinlich experimentell genauer als durch Rechnung, durch Beobachtung der Ablenkungen, wenn die großen und die kleinen Massen der Reihe nach entfernt werden, bestimmt werden können."

Boys hat die Untersuchung mit einem solchen Apparate wie dem hier angedeuteten im Clarendon-Laboratorium in Oxford ausgeführt. Es wurden mit zwei Paaren von anziehenden Bleikugeln, einem von $4^1/_4$ Zoll, dem anderen von $2^1/_4$ Zoll Durchmesser, Experimente gemacht. Als angezogene Massen wurden bei verschiedenen Experimenten ein Paar Goldkügelchen von 0,25 Zoll, ein anderes Paar von 0,2 Zoll Durchmesser und ein Paar Goldzylinder von 0,25 Zoll Durchmesser und Länge benutzt. Alle diese Massen wurden mit allen Vorsichtsmaßregeln zur Vermeidung von Inhomogenität hergestellt: es wurde z. B. darauf geachtet, daß sie ganz blasenfrei waren; die Bleikugeln wurden nach der Erstarrung hydraulischem Drucke unterworfen, und die Goldkugeln wurden in Stahlklötzchen eingeschlagen. Die Bleikugeln wurden an Fäden von Phosphorbronze an Ständern aufgehängt, die auf einem Deckel über dem Gehäuse standen, und durch Gewichte ausgeglichen, so daß der Deckel mit den anziehenden Massen aus einer

anziehenden Stellung in die andere vermittelst eines für diesen Zweck angebrachten Mechanismus mit nur geringer Reibung herübergebracht werden konnte.

Die angezogenen Massen wurden an Quarzfäden 0,2 Zoll voneinander entfernt aufgehängt, und zwar durch Haken an den Enden der Arme eines Kreuzes aus vergoldetem Kupfer befestigt. Dieses Kreuz mit dem zur Messung der Ablenkung durch einen reflektierten Lichtstrahl daran befestigten Spiegel *M* bildete den Hauptteil der Wage, wie die beigegebene Zeichnung (Fig. 325) zeigt. Der Spiegel war der übrig gebliebene Streifen von einem Kreisspiegel von vollendeter Konstruktion, von dessen beiden Seiten zwei gleiche Segmente abgeschnitten worden waren, und hatte auf seiner Rückseite zwei mikroskopisch feine vertikale Rinnen eingeritzt, die die vom Arme oben herunterhängenden Fäden aufnehmen.

Fig. 325.



An einem Haken unter dem Mittelpunkte des Spiegels konnte ein Silberzylinder, dessen Gewicht gerade den vereinten Gewichten zweier Goldkügelchen gleich war, befestigt werden. Dadurch wurden die Beobachtungen der Schwingungsperiode des Apparates mit diesen Kügelchen und mit dem Zylinder ohne Änderung der streckenden Kraft und damit die Elimination des unbekannten Trägheitsmomentes des Kreuzes und befestigten Spiegels ermöglicht.

Die Einzelheiten des Apparates und die Beobachtungsmethode sind sehr wichtig und lehrreich für den Experimentator; sie sind in der Boysschen Abhandlung (Phil. Trans. R. Soc. 1895 und Nature, 1894) ausführlich einzusehen. Obgleich die zu messenden Kräfte außerordentlich klein waren, nämlich bei einigen Untersuchungen nur der fünfmillionte Teil des Gewichtes eines Gran, kann doch keinerlei Zweifel an der großen Genauigkeit der Arbeit aufkommen. Die erhaltenen Werte waren: Gravitationskonstante $k = 6{,}6576 \times 10^{-8}$ in CGS-Einheiten, und die mittlere Erddichte $\varrho = 5{,}527$ mal die Dichte des Wassers.

Eine andere, kürzlich vollendete, sehr genaue Bestimmung durch die Methode der Torsionswage verdient Beachtung [1]). Um die Störung durch Luftzug so weit als möglich auf null zu reduzieren, hat C. Braun

[1]) Denkschr. d. Math. Kl. d. Akad. d. Wiss., Wien 1896, **64**; auch Naturwiss. Rundschau 1897.

eine in ein ziemlich hohes Vakuum (ungefähr $^1/_{200}$ Atmosphäre) eingeschlossene Torsionswage ersonnen und zu einem beträchtlichen Teile auch eigenhändig hergestellt. Sein Apparat ist viel größer als der von Boys, da der Wagebalken 9 Zoll lang, jede der anziehenden Massen 5 oder 9 kg schwer und die angezogenen Massen 54 g schwer sind. Der Aufhängefaden war von Metall, wird aber bei einer im Gange befindlichen Wiederholung des Experimentes durch einen Quarzfaden ersetzt. Das für die Dichte erhaltene Ergebnis ist $5{,}527 \pm 0{,}0014$, also fast genau das von Boys.

551. Bestimmungen mit der gewöhnlichen Wage. An Stelle der Torsionswage kann eine gewöhnliche chemische Wage zur Messung des durch die anziehenden Massen ausgeübten Zuges benutzt werden. Denken wir uns eine kleine Kugel vom einen Ende des Balkens einer feinen Wage herabhängend und durch Gewichte in einer Wagschale am anderen Ende des Balkens aufgewogen, dann eine große Kugel so darunter gebracht, daß die Mittelpunkte beider Kugeln sich in einem bekannten vertikalen Abstande befinden. Das Gleichgewicht wird dadurch gestört werden, und zu seiner Wiederherstellung wird man ein Ergänzungsgewicht m' zu den Gewichten in der Wagschale hinzufügen müssen. Die Massen der großen und kleinen Kugeln seien M bezw. m, die Entfernung zwischen ihren Mittelpunkten sei r. Der zwischen den Kugeln statthabende Zug ist kMm/r^2, und dies ist gleich dem Gewichte von m', also gleich $m'g$. Folglich hat man

$$k = g\,\frac{m'}{Mm}\,r^2$$

und für die mittlere Erddichte den durch Einsetzung dieses Wertes von k in Gl. (3) sich ergebenden Wert. Vernachlässigt man dabei fürs erste die in Gl. (3) berücksichtigten Korrektionen, nennt die Entfernung des Erdmittelpunktes von der angezogenen Kugel R und die Masse der Erde E, so kann man auch unmittelbar die Gleichung $Er^2/MR^2 = m/m'$ hinschreiben und erhält:

$$E = \frac{m}{m'}\,\frac{R^2}{r^2}\,M;$$

schließlich braucht man nur mit dem bekannten Volumen der Erde zu dividieren, um die mittlere Erddichte ϱ zu erhalten.

Diese Methode ist in Deutschland von Jolly[1]) sowie neuerdings von König, Richarz und Krigar-Menzel[2]), in England von Poynting angewandt worden; diese beiden letztgenannten Arbeiten stellen nach Sorgfalt und Bedeutung den Höhepunkt der Untersuchungen auf unserem Gebiete dar.

[1]) Wied. Ann. 14, 1881. — [2]) Wied. Ann. 24, 1885; Nature 31, 1884—85; Wied. Ann. 51, 559, 1894; Abh. Berl. Akad. 1898; Wied. Ann. 66, 177, 1898.

Die Untersuchung von **Richarz** und **Krigar-Menzel** (denn **König** steht nur mit den Vorarbeiten dazu im Zusammenhange) ist von beträchtlicher Wichtigkeit und großem Wert durch die systematische Sorgfalt, mit der jeder Teil davon durchgeführt worden ist. Die Experimente wurden in einer erdegedeckten Kasematte von Spandau vorgenommen, wo man gegen tägliche Temperaturschwankungen und Störungen durch Eisenbahnzüge oder sonstige Fahrzeuge sehr gut gesichert war. In kurzen Zügen war die Methode die folgende: An den Enden des Balkens einer empfindlichen Wage waren zwei Fäden aufgehängt, deren jeder zwei Wagschalen in etwa 2 m vertikalem Abstande trug, so zwar, daß die eine Wagschale links und die eine rechts auf gleichem (hohem) und ebenso die beiden anderen auf gleichem (tiefem) Niveau waren. Nun wurde ein Kilogrammgewicht in die obere Wagschale an dem einen Drahte und ein anderes Kilogramm in die untere Wagschale an dem anderen Drahte getan und die Lage des Balkens beobachtet. Dann wurde jedes der Kilogramme auf die andere Schale von gleichem Niveau gebracht und die Lage des Balkens von neuem beobachtet. Die Ablenkung ergab offenbar das Vierfache der Gewichtsdifferenzen aus der Niveauverschiedenheit der Massen in den Wagschalen.

Dann wurde ein großer Bleiklotz, etwa 2 cbm, aus Bleistücken aufgebaut, und es wurden die an der Wage befestigten Drähte mittels vertikaler Durchlochungen so durch den Bleiklotz hindurchgeführt, daß die oberen Schalen über, die unteren unter dem Klotze hingen; nunmehr wurden die oben beschriebenen Versuche wiederholt. Infolge des Bleiklotzes erfuhr das Gewicht in der tieferen Wagschale jetzt, in Verstärkung der früheren Kräfte, einen Zug nach oben und das Gewicht in der oberen Wagschale einen Zug nach unten. Mit einer Berichtigung für die schon beobachtete Gewichtsdifferenz ergab die Ablenkung das Vierfache des auf jedes Gewicht von dem Bleiklotze ausgeübten Zuges, und daraus konnte man die Gravitationskonstante und die mittlere Erddichte ableiten. Das Ergebnis war:

$$k = (6{,}685 \pm 0{,}011)\,10^{-8}$$

in CGS-Einheiten und

$$\varrho = 5{,}505 \pm 0{,}009.$$

552. Experimente von Poynting. Im Poyntingschen Experimente wurde die Wage — eine große Goldwage mit einem Balken von 4 Fuß — mit einem Drehtische benutzt, durch den eine große anziehende Kugel zuerst unterhalb der einen, dann unterhalb der anderen von zwei gleichen in gleicher Höhe von den Enden des Wagebalkens herabhängenden Kugeln gebracht werden konnte. Um den Drehtisch auszubalancieren, wurde eine Masse, halb so groß als die große anziehende, in der doppelten Entfernung von der Axe auf die andere Seite

gebracht und ihre Anziehung auf die hängenden Gewichte in Rechnung gezogen. Um den auf den Balken ausgeübten Zug u. s. w. zu eliminieren, wurden die Versuche für zwei verschiedene Niveaus der hängenden Massen gemacht.

Die Ablenkungen der Wage wurden durch einen Spiegel in bifilarer Aufhängung vergrößert, von dessen Fäden der eine an einem festen Punkte, der andere am Ende eines kleinen Armes befestigt war, den der Zeiger der Wage trug. Dadurch wurde, wenn die Wage eine Ablenkung erfuhr, das obere Ende des einen Fadens mit dem Zeiger bewegt, und der Spiegel wurde in eine neue Ebene herumgedreht. Die Empfindlichkeit dieser Anordnung ist offenbar umgekehrt proportional mit dem Abstande zwischen den Fäden und kann daher sehr groß gemacht werden. Unterhalb des Spiegels schleppten einige Fähnchen, die, in ein Gefäß mit Öl eingetaucht, die Schwingungen dämpften. Die Ablenkungen wurden durch ein Teleskop aus einem Zimmer über demjenigen, in welchem die Wage aufgestellt war, abgelesen.

Für die Einzelheiten der Messung, die verschiedenen beobachteten Vorsichtsmaßregeln und die Umrechnung der Beobachtungen muß der Leser auf den Poyntingschen Aufsatz verwiesen werden. Seine Schlußergebnisse sind:

$$k = 6{,}6984 \times 10^{-8}, \quad \varrho = 5{,}4934.$$

Stellt man alle neueren einwandfreien Ergebnisse zusammen und bildet den Mittelwert, so erhält man für die Gravitationskonste k und für die Erddichte die auf ein- bis zweitausendstel genauen Werte:

$$k = 66{,}8 \times 10^{-9}, \quad \varrho = 5{,}52.$$

Da die Dichte der dem Menschen zugänglichen Erdkruste nur etwa 2,7 beträgt, ist die Dichte des Erdinnern fast doppelt so groß.

553. Pendelmethoden. Newton war, wenigstens zeitweilig, der Meinung, daß die Anziehung zwischen irdischen Körpern zu klein wäre, um gemessen werden zu können; er sprach tatsächlich die Ansicht aus, daß ein halbkugelförmiger Berg von 3 Meilen Radius die Lotlinie nicht um 2 Winkelminuten aus der vertikalen Lage ablenken würde (De Mundi Systemate, Bd. 3). Diese Meinung war irrig, sie beweist aber, daß Newton mit der Möglichkeit, die Anziehung zwischen gewöhnlichen Körpern zu messen, gerechnet hatte. Die Methoden, die mittlere Erddichte durch die von einem Berge hervorgerufenen Pendelablenkungen oder durch Vergleichung der Perioden eines Pendels am oberen und unteren Ende des Schachtes einer tiefen Grube zu bestimmen, sind, wenn auch in mancher Hinsicht interessant, doch nicht fähig, Ergebnisse zu liefern, die sich im Hinblick auf Genauigkeit mit den mittels der Wage in einer oder der anderen Form gefundenen messen könnten. Im ersten Falle macht sich die Schwierigkeit geltend, den Umriß eines Berges genau festzustellen, sein Volumen und seine Gestalt

40*

zu finden, und hinsichtlich seiner Masse besteht, wie gut auch immer die geologische Formation und die Schichtenlagerung erkannt sein möge, doch stets eine beträchtliche Unsicherheit; im zweiten Falle wirkt die Ungewißheit über die Schichtenlagerung in der entlegeneren Nachbarschaft des Schachtes störend. Aus alledem leuchtet ein, daß diese Methoden nicht so zuverlässige Werte liefern können wie die durch direktes Experiment mit Massen von genau bekannter Konstitution gewonnenen.

Es ist aber vor 160 Jahren von Bouguer eine Schätzung des Wertes von ϱ gemacht worden, die, obgleich roh, doch deutlich zeigte. daß ϱ bedeutend größer war als die Dichte der Erdrinde; Bouguer machte in Peru Beobachtungen, indem er ein Pendel 1. am Meeresspiegel, 2. in Quito auf einem Hochplateau von 3000 m über dem Meeresspiegel und auf dem Gipfel eines um 2000 m höheren Berges in Schwingung versetzte.

554. Durch die Flut hervorgerufene Niveauänderungen einer Quecksilberoberfläche. Boscowich und nach ihm Cavendish hatten den Gedanken, die durch die Fluterhebung des Wassers in einem Meeresarme hervorgerufene Ablenkung der Lotlinie zu beobachten. und Robison wies in seiner Mechanical Philosophy 1804 darauf hin. daß die Flut in der Fundybai eine merkliche Ablenkung eines Senkbleis in der Nachbarschaft hervorruft und so eine Bestimmung der Erddichte ermöglichen könnte [1]). In mancher Hinsicht erscheint es sicherlich aussichtsreicher, sich um die Beobachtung von Niveauänderungen einer Quecksilberoberfläche zu bemühen gegenüber einem langen, nahezu geraden Kanal, der durch Flut und Ebbe bis zu beträchtlicher Tiefe gefüllt und geleert wird, als an der von einem Berge ausgeübten Anziehung, dessen Masse doch nie nach Oberflächenproben irgend genau bestimmt werden kann, Beobachtungen zu machen. Allerdings konnte die Masse des Wassers mit einer Genauigkeit bestimmt werden, die im Falle des Berges oder der Grube nicht annähernd erreicht werden könnte; aber es scheint, daß die Verwerfungen des Grundes, die nach seismometrischen Beobachtungen so überraschend große Dimensionen annehmen, große Schwierigkeiten bereiten würden.

So fand d'Abbadie am Ufer der Bucht von Biscaya durch Vergleichung eines festen Striches mit seinem durch Reflexion im Quecksilberspiegel erzeugten Bilde, daß eine Ablenkung der Oberfläche in einer Richtung durch das Steigen der Flut und eine entgegengesetzte Ablenkung durch ihr Fallen bewirkt wurde. In etwa zwei Drittel einer langen Reihe von Beobachtungen war die Oberfläche bei Flut nach der See hin geneigt und bei Ebbe umgekehrt, verglichen mit ihrer Lage, wenn der Meeresspiegel mittlere Höhe hatte; in einem gewissen Bruch-

[1]) Thomson u. Tait, Theoret. Physik 1, 2. Teil, § 818.

teile der Beobachtungen zeigte das Niveau keine Veränderung, und bei noch anderen war die Änderung der in Peru erwarteten entgegengesetzt.

Lord Kelvin hat eine Schätzung der Wirkung eines Wasserbeckens von 80 km Länge, 80 km Breite und 3 m Tiefe auf ein gegenüber der Mitte einer der Beckenseiten in einer Entfernung von 100 m aufgehängtes Pendel vorgenommen, und gefunden, daß die Ablenkung ungefähr $^1/_{20}$ Winkelsekunde betragen würde. Der Leser mag sich davon nach der oben § 461 angegebenen Formel überzeugen. Dieses Wasserbecken stellt in roher Annäherung die Flut bei St. Albans Head dar. Offenbar müßte man für die Beobachtung einer so kleinen Ablenkung eine optische Methode oder vielleicht die eben erwähnte Methode eines Spiegels mit bifilarer Aufhängung anwenden.

555. Das Schiehallienexperiment. Das im Jahre 1774 von Maskelyne begonnene Experiment auf dem Schiehallien verdient Erwähnung. Der Berg ist ein Grat in Perthshire in Schottland, fast genau von Osten nach Westen gerichtet und aus nahezu vertikalen Schichten bestehend. Der scheinbare Breitenunterschied zwischen zwei Stationen auf demselben Meridian (aber nicht auf gleicher Höhe), eine auf der Nord-, die andere auf der Südseite des Berges, wurde durch astronomische Beobachtungen bestimmt, in denen natürlich die scheinbaren Seehöhen an beiden Orten benutzt wurden. Dies wurde mit dem wirklichen Breitenunterschiede, wie er aus den Lagen der Stationen sich ergab, verglichen. Der Breitenunterschied 49,94″ fand sich durch die Anziehung des Berges um 11,6″ vermehrt.

Später zeichnete Hutton eine sorgfältige Karte vom Umriß des Berges, schätzte auf Grund derselben die Verteilung der anziehenden Materie und leitete so von Maskelynes Beobachtungen den Wert der mittleren Erddichte ab. Seine erste Schätzung war 4,5, aber die Ergebnisse einer später von Playfair ausgeführten Kontrolle veranlaßten ihn, den Wert 4,95 anzunehmen.

556. Das Experiment in der Hartongrube. Das wichtigste unter den vorgenommenen Pendelexperimenten ist zweifellos das von Airy im Hartonkohlenbergwerke in Durhamshire ausgeführte, das schließlich den Wert 6,565 ergab. Die elementare Theorie dieser Methode sei hier mitgeteilt.

Es sei R der Radius der Erde, die als rotationslose Kugel mit symmetrischer Verteilung der Materie (mittlere Dichte ϱ) um den Mittelpunkt angenommen wird. Ihre Masse ist $\frac{4}{3}\pi\varrho R^3$, und ihre Anziehung auf ein Teilchen an der Oberfläche ist $\frac{4}{3}\pi k \varrho R$. Die Anziehung der Erde auf ein Teilchen in der Tiefe h unter der Oberfläche ist, wenn ϱ' die Dichte der Kugelschale von der Dicke h ist:

$$4\pi k \frac{\frac{1}{3}\varrho R^3 - \varrho' R^2 h}{(R-h)^2}.$$

Folglich ist, wenn g der Wert der Schwerkraft an der Oberfläche und g' ihr Wert in der Tiefe h ist,

$$\frac{g'}{g} = \frac{\varrho R^2 - 3\varrho' R h}{\varrho (R - h)^2} = 1 + 2\frac{h}{R} - 3\frac{\varrho' h}{\varrho R},$$

da h klein ist im Vergleich mit R.

Diese Theorie läßt sich nicht genau anwenden, da die Schale von der Dicke h nicht notwendig diejenige mittlere Dichte besitzt, welche die Schichten am Orte des Experimentes aufweisen. Indessen ist die zur Berechnung benutzte Formel die eben mit dieser letzteren Dichte als Wert von ϱ' erhaltene.

Für die Einzelheiten dieses sowie vieler verdienstlicher Pendel- und Kontrollversuche, die hier nicht erwähnt werden können, sei auf die Monographie von Poynting verwiesen, die auch ein wertvolles Verzeichnis der Arbeiten über die mittlere Erddichte enthält.

557. Die Frage der Anziehung von Kristallen und der Gravitationspermeabilität. Einige andere interessante Fragen, die die Gravitation betreffen, sind in letzter Zeit untersucht worden. Die Tatsache, daß keine hervorragende Verschiedenheit zwischen unter verschiedenen Umständen vorgenommenen Wägungen bezw. zwischen von solchen Wägungen abhängigen Ergebnissen merkbar geworden war zeigt, daß wahrscheinlich die Kristalle dieselbe Anziehungskraft erfahren, gleichviel wie ihre Axen mit Bezug auf die Erde orientiert sein mögen, und daß die Anziehung zwischen zwei Körpern durch die Zwischenschaltung anderer Materie zwischen sie nicht wahrnehmbar beeinflußt wird. Es ist wohlbekannt, daß bei einer kleinen Quarzkugel, die in ein elektrisches Feld gebracht und durch elektrische Kraft bewegt wird, die Wirkung von der Axenrichtung des Kristalles im Felde abhängt. Ferner wird, wenn zwischen zwei in entgegengesetztem Sinne elektrisierte leitende Kugeln in Luft eine Schicht, etwa von Glas, zwischengestellt wird, die Anziehung zwischen ihnen vermehrt; die Kraftlinien im Felde, die, wenn das Medium unbegrenzt und gleichförmig ist, in einer bestimmten Weise um die Kugeln verteilt sind, nehmen eine neue Verteilung an, wenn das Glas eingeschoben wird, drängen sich enger in dem Raume zwischen den Kugeln zusammen, und es findet eine größere Anziehung der einen von ihnen auf die andere statt. Die Tatsachen und Theorien dieser Wirkung werden unter „Elektrizität“ erklärt werden; aber keine Erscheinung ähnlicher Art ist je in einem Gravitationskraftfelde beobachtet worden.

Experimente über die Zugkraft zwischen einer Bleikugel und einer Kugel aus Kalkspat, deren Axe in verschiedene Richtungen gegen die Bleikugel gebracht wurde, sind 1895 von Mackenzie (Phys. Rev. 2, 1895) mit einer Torsionswage angestellt worden, aber ohne positive Ergebnisse. Poynting und P. L. Gray haben ebenfalls über die An-

ziehung zwischen zwei Quarzkugeln experimentiert, nicht direkt über den Zug zwischen ihnen in verschiedenen Lagen, sondern um zu finden, was der Wahrscheinlichkeit nach vorhanden sein müßte, wenn die Anziehung zwischen den Kugeln mit parallelen Axen nicht dieselbe ist wie mit gekreuzten Axen, nämlich ein Kräftepaar, das sich der Drehung aus einer Lage größerer Kraft in eine kleinerer Kraft widersetzt. Denn die Lage größerer Kraft ist die kleinerer potentieller Anziehungsenergie. Die Experimente sind in den Trans. R. S. **192**, A, 1899 und in Nature, 23. August 1900 beschrieben. Die angewandte Methode bestand darin, einem Torsionspendel das zu erteilen, was, wenn die Wirkung vorhanden wäre, eine Folge von Impulsen in der freien Periode des Pendels sein würde und damit durch Häufung der Wirkungen eine Schwingung des Pendels durch eine merkliche Weite bewirken müßte.

Es mag hier bemerkt werden, daß schon vor langer Zeit durch Le Sage aus Genf eine Gravitationstheorie aufgestellt worden ist, des Inhalts, daß überall durch den Raum gleichmäßig nach allen Richtungen unzählige kleine Teilchen fliegen, und daß gewöhnliche Materie hochgradige, aber nicht vollkommene Permeabilität für diese Teilchen besitzt. Ein kleiner Teil von diesen Teilchen wird, wenn sie auf einen beliebigen Körper fallen, angehalten, und welcher Teil, das muß von der Struktur des Körpers abhängen. Ein einzelner Körper im Raume würde gar keine Kraft, nach keiner Richtung, erfahren, aber zwei Körper, wie Sonne und Jupiter, würden durch die Schutzwirkung des einen auf den anderen eine Kraft längs der ihre Zentren verbindenden Linie erfahren, und wenn das Verhältnis der zum Stillstand gebrachten Teilchen klein genug ist, würde die Kraft, wie sie es wirklich ist, umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung zwischen den Körpern und direkt proportional dem Produkte der Massen sein.

Nach dieser Theorie müßte aber das Gewicht eines Kristalles von seiner Orientierung mit Bezug auf die Erde abhängen, und dies ist, nachdem schon vorher die Erfahrung es als höchst unwahrscheinlich gezeigt hatte, durch die Experimente von Poynting und Gray im negativen Sinne entschieden worden.

Austin und Thwing haben in der Physical Review 5, 1897 Experimente über die Permeabilität verschiedener Arten von Materie für Gravitationskraftlinien veröffentlicht. Schirme von Blei, Zink, Quecksilber, Alkohol und Glycerin wurden zwischen die angezogenen Kugeln und die anziehenden Massen einer Torsionswage eingeführt, ohne indessen die Ablenkung merklich zu beeinflussen.

Außer dem Einflusse des Mediums auf die Größe einer sogenannten Fernwirkung gibt es für die Anschauung, die man sich für deren Wesen zu bilden hat, bekanntlich noch zwei weitere entscheidende Fragen, nämlich die der ersten gewissermaßen entgegengesetzte, ob das Medium seinerseits durch die Wirkung beeinflußt werde (z. B. in Span-

nung gerate), und dann die Frage, ob die Wirkung Zeit in Anspruch nehme. Auch diese Fragen sind für gewisse elektrische Wirkungen seit den Arbeiten von Faraday und Maxwell, Boltzmann und Hertz zu bejahen, und deshalb können diese Wirkungen gegenwärtig nicht mehr als Fernwirkungen bezeichnet werden. Für die Gravitation sind jene Fragen aber nach wie vor zu verneinen, und es liegt daher für den Physiker kein Anlaß vor, das die Erscheinungen in wunderbarer Weise umfassende Newtonsche Gesetz gegenüber anderen Theorien in den Hintergrund zu rücken.

Immerhin bieten die zahlreichen, im Laufe der Zeit entwickelten Hypothesen über das Wesen der Gravitation manches Interesse dar, und es sei in dieser Hinsicht auf das Buch von Isenkrahe, „Das Rätsel der Schwerkraft“, verwiesen.

Vierzehntes Kapitel.

Die Gezeiten (Ebbe und Flut).

558. Gleichgewichtstheorie der Gezeiten. Die Erde selbst ist nicht starr, und die Gewässer der Ozeane und Meere auf ihr sind beweglich. Die von Sonne und Mond auf gleiche Mengen von Materie an verschiedenen Stellen der Erdoberfläche ausgeübte Anziehung ist nach Größe und Richtung verschieden. Es entstehen dadurch Verschiebungen der festen Erde und, in unvergleichlich stärkerem Maße, Schwankungen des Meeresspiegels und Flutströmungen, die wir als Gezeiten zu bezeichnen pflegen. Es kann hier nicht der Versuch unternommen werden, das ganze ausgedehnte Gebiet der Gezeitentheorie und -Erscheinungen zu durchmessen, aber es ist wünschenswert, aufzuzeigen, wie Gezeitenkräfte entstehen, ihre Beträge zu berechnen und eine ungefähre Vorstellung ihrer Wirkungen zu geben. Es wird auf diese Weise dem Leser möglich sein, von der sogenannten Gleichgewichtstheorie der Gezeiten und von der Art und Weise, in der die aus dieser Theorie gewonnenen Schlüsse durch die Erdrotation und durch die Trägheit und Reibung der bewegten Materie modifiziert werden, eine gewisse Anschauung zu bekommen.

Wenn die Rotation der Erde gehemmt würde und Sonne, Erde und Mond in den Stellungen, die sie in irgend einem Augenblick inne haben, stehen blieben, so würde eine Konfiguration der Körper eintreten, in der die störenden Kräfte der Sonne und des Mondes durch diejenigen Kräfte ausbalanciert sein würden, die durch die Änderungen der relativen Lage der Erd- und Wasserteilchen wachgerufen werden würden. Wenn man nur die Änderung der Konfiguration der Gewässer auf der Erdoberfläche betrachtet, so würde ein Flutgleichgewicht entstehen, das sich so lange unverändert erhalten würde, wie die relativen Stellungen der drei Weltkörper sich nicht änderten.

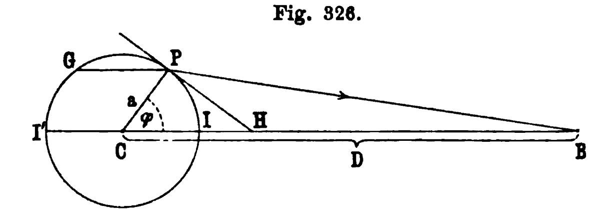
Nehmen wir jetzt an, daß sich die Erde um ihre Axe drehe und daß Sonne und Mond der Reihe nach diejenigen Stellungen relativ zur Erde einnehmen, welche sie in Wirklichkeit einnehmen, daß dies alles aber so langsam geschehe, daß der jeder Konfiguration, für den Fall, daß sie bestehen bliebe, zugehörige Zustand statischen Gleichgewichts

auch wirklich entstehe; dann werden die Gezeiten in jedem Augenblick die in der Gleichgewichtstheorie betrachteten Beträge haben. Indessen werden die Ergebnisse dieser Theorie, so viel Aufschluß sie auch über den tatsächlichen Verlauf der Gezeiten gibt, doch durch die Geschwindigkeit der Erdrotation stark beeinträchtigt, und die sogenannte dynamische (oder richtiger kinetische) Gezeitentheorie wird zur Erklärung der Erscheinungen notwendig.

Wir werden die von der Wirkung von Mond und Sonne herrührenden Flutkräfte berechnen und dann die Gleichgewichtsform der Oberfläche des Wassers auf der Erde betrachten. Wir werden der Einfachheit halber zunächst die ganze Erde als mit Wasser bedeckt annehmen und dann zu erklären versuchen, wie die unter dieser Annahme gezogenen Schlüsse verwandelt werden müssen, um dem Vorhandensein von Kontinenten und Inseln und ihrer Konfiguration Rechnung zu tragen.

559. Berechnung der fluterzeugenden Kräfte. Horizontale und vertikale Komponenten. Es sei C in Fig. 326 der Erdmittel-

Fig. 326.



punkt, J, P, J' Punkte auf ihrer Oberfläche, B die Lage des Mondmittelpunktes und, in Übereinstimmung mit einer bei diesem Gegenstand üblichen Bezeichnung, D die Enfernung CB und M die Masse des Mondes. Der durch die Masse des Mondes auf ein Teilchen von der Masse eins in C ausgeübte Zug ist kM/D^2. Wäre die vom Monde ausgeübte Kraft auf jedes Einheitsteilchen in der Erde nach Größe und Richtung dasselbe wie dieses hier, so würde jedes Teilchen eine Beschleunigung von genau diesem selben Betrage erfahren, es gäbe dann keine Deformation der Erde oder Änderung der relativen Lage der beweglichen Materie auf ihrer Oberfläche. Ferner ist es klar, daß, wenn die Erde aus einem Gemengsel von Teilchen von gleicher Masse bestände und jedem dieser Teilchen irgend eine Kraft P, für jedes Teilchen dieselbe in Größe und Richtung, erteilt würde, keine Änderung der relativen Lage der Teile der Erde erfolgen würde. Das Ergebnis würde nur das sein, über jede schon vorher vorhandene Beschleunigung genau dieselbe Beschleunigung aller Teile zu superponieren. Es werde deshalb angenommen, daß auf jedes Teilchen eine Kraft vom Betrage kM/D^2 pro Masseneinheit in der CB entgegengesetzten Richtung wirke; diese hebt die Beschleunigung der Teilchen in C oder

in seiner Nachbarschaft auf; und somit ist die Resultante dieser Kraft und der Anziehung des Mondes die die Änderung der relativen Konfiguration erzeugende Kraft.

Kurz gesagt, wir machen die der Erde als Ganzem vom Monde erteilte Verschiebung durch eine Gegenverschiebung wieder rückgängig, um nur ihre Deformation um ihren Mittelpunkt als festen Punkt übrig zu behalten.

Die vom Monde auf ein Einheitsteilchen in P ausgeübte Kraft wirkt längs PB und ist vom Betrage

$$\frac{kM}{BP^2} = \frac{kM}{D^2 + a^2 - 2\,Da\cos\varphi},$$

wenn a die Strecke CP (Erdradius) bedeutet. Außerdem muß man eine Kraft kM/D^2 längs PG parallel mit BC wirksam annehmen. Die Resultante hat eine horizontale Komponente, d. h. eine Komponente längs PH, wo H der Schnittpunkt von BC mit der Tangente in P an den Schnittkreis der Ebene BPC mit der Erde ist, und eine vertikale Komponente, d. h. eine Komponente längs dem Radius CP. Wir können diese Komponenten ausrechnen, indem wir die beiden Kräfte kM/BP^2 und kM/D^2, die soeben als in P wirksam aufgeführt wurden, nach diesen beiden Richtungen auflösen. Die Komponente von $kM/(BP)^2$ längs PH ist $\frac{kM}{(BP)^2}\cos(PBH)$. Da aber

$$\angle\,(HPC) = \frac{\pi}{2}$$

ist, so ist

$$\cos(BPH) = \sin(BPC) = \frac{D\sin\varphi}{(BP)}.$$

Folglich ist

$$\frac{kM\cos(BPH)}{(BP)^2} = \frac{kMD\sin\varphi}{\sqrt{(D^2 + a^2 - 2\,Da\cos\varphi)^3}}.$$

Ferner ist die Komponente der anderen Kraft längs PH gleich $-\,kM\sin\varphi/D^2$. Somit ist die ganze horizontale Kraft von P bis H

$$kM\left[\frac{D}{\sqrt{(D^2 + a^2 - 2\,Da\cos\varphi)^3}} - \frac{1}{D^2}\right]\sin\varphi$$
$$= \frac{kM\sin\varphi}{D^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{D^2} - 2\,\frac{a}{D}\cos\varphi\right)^3}} - 1\right]$$
$$= \frac{3\,kMa\sin\varphi\cos\varphi}{D^3},$$

da a im Vergleich mit D klein ist. Nennt man diese Größe F, so ergibt sich als Gleichung der horizontalen fluterzeugenden Kraft:

$$F = 3\,kM\frac{a}{D^3}\sin\varphi\cos\varphi \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die vertikale Komponente R, in der Richtung von C nach P genommen, ist

$$kM\left[\frac{-\cos(BPC)}{(BP)^2} - \frac{\cos\varphi}{D^2}\right].$$

Nun ist aber $-\cos(BPC) = \sin(BPH)$ und

$$\frac{\sin(BPH)}{\sin(CHP)} = \frac{\sin(BPH)}{\cos\varphi} = \frac{(BH)}{(BP)} = \frac{D - \frac{a}{\cos\varphi}}{(BP)},$$

so daß

$$\sin(BPH) = \frac{D\cos\varphi - a}{(BP)}$$

wird. Ebenso ist annähernd

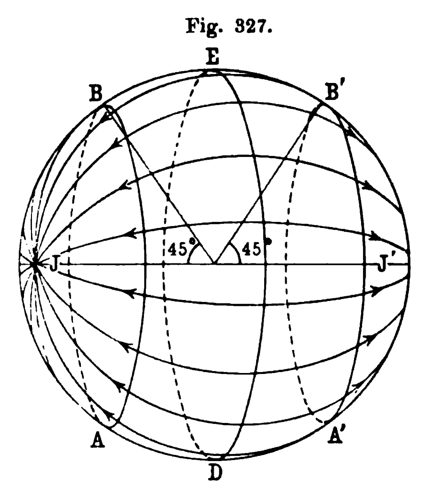
$$\frac{1}{(BP)^3} = \frac{1 + \frac{3a}{D}\cos\varphi}{D^3}.$$

Somit ergibt sich, wenn Glieder in a^2 vernachlässigt werden:

$$R = kM\left[\frac{D\cos\varphi - a}{(BP)^3} - \frac{\cos\varphi}{D^2}\right] = \frac{kMa}{D^3}(3\cos^2\varphi - 1) \quad . \; . \quad (2)$$

560. Änderung der Flutkräfte längs der Erdoberfläche. Die horizontale Kraft F hat also für jeden Punkt irgend eines die Linie JJ' als Axe umgebenden Kreises denselben Wert. Auch ist sie in jedem Punkte dieser Kreise längs dem größten Kreis durch diesen Punkt und JJ' gerichtet, wie in Fig. 327, und zwar ist sie (nach dem hier angenommenen Annäherungsgrad) vom gleichen numerischen Betrage, aber von entgegengesetztem Vorzeichen für Supplementwerte von φ ($\angle J'CP$ in Fig. 326). Tatsächlich sind die Flutkräfte unter dem Mond in J ungefähr um 5 Proz. größer als die entgegengesetzt gerichteten in dem diametral entgegengesetzten Punkt J', da die relative Differenz der Kräfte sehr annähernd $3a/D$ ist, $(a/D = 1:60)$. Die Horizontalkraft hat Nullwerte in JJ' und in dem Kreise DE (Fig. 327), und ihren Maximalwert, wenn $\sin\varphi\cos\varphi$, d. h. wenn $\sin 2\varphi$ ein Maximum ist. Nun hat aber $\sin 2\varphi$ seinen größten Wert, wenn $2\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ist, so daß F ein Maximum ist, wenn $\varphi = \pi/4$ ist. Der Maximalwert ist $\frac{3}{2}kMa/D^3$. Die Linien AB, $A'B'$ in Fig. 327 bedeuten rund um die

Fig. 327.



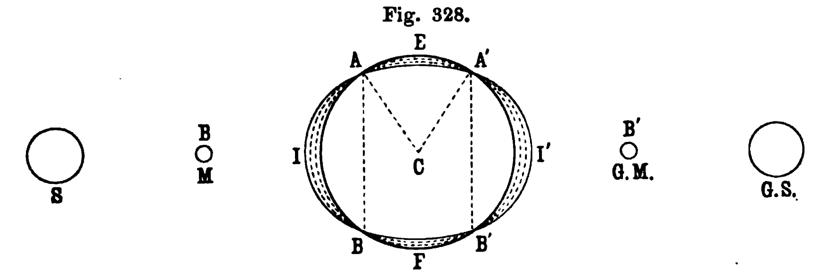
Erde senkrecht zu der Linie JJ' gezogene Kreise, die so gelegt sind, daß ein vom Mittelpunkt C nach irgend einem Punkt in AB gezogener Radius einen Winkel $\pi/4 = 45^0$ mit CJ, und ein von C nach irgend einem Punkt in $A'B'$ gezogener Radius denselben Winkel mit CJ' bildet. Die Linie DE stellt einen die Kugeloberfläche in zwei Hälften teilenden Kreis vor. Die horizontale Kraft ist, wie gesagt, null in allen Punkten von DE; in allen Punkten rechts von DE ist die Kraft nach J zu gerichtet; in allen Punkten links von DE ist sie nach J' zu gerichtet.

Die vertikale Kraft R ist nach außen längs CP gerichtet für diejenigen Werte von φ, für welche $3\cos^2\varphi > 1$ ist, und in der Richtung PC, wenn $3\cos^2\varphi < 1$ ist. Die erste Ungleichheit gilt für Werte von φ zwischen 0^0 und $54^0 44' 8''$ einerseits und zwischen $125^0 15' 52''$ und 180^0 anderseits; die zweite für Werte von φ zwischen $54^0 44' 8''$ und $125^0 15' 52''$. Also ist R sowohl in J als in J' nach außen gerichtet und hat in jedem dieser Punkte seinen Maximalwert $2kMa/D^3$. Der Maximalwert für R nach innen besteht in allen Punkten, für welche $\varphi = \pi/2$ ist; er ist die Hälfte des positiven Maximalwertes. Also ist der Maximalwert von F drei Viertel von dem von R.

Man wird später sehen, daß die Erhebung des Wassers über einen gewissen festgesetzten mittleren Spiegel der Hälfte desjenigen Bruchteils des Erdradius, welchen die vertikale Flutkraft von der Schwere bildet, gleichkommt.

561. Mond und Gegenmond. Halbtägige Mondfluten. Würde die Masse des Mondes von M auf $^1/_2\,M$ vermindert, so würden sämt-

Fig. 328.



liche Kräfte auf ihren halben Wert herunterkommen; nach den eben gemachten Angaben wird man einsehen (Fig. 328), daß die vollen Werte der Flutkräfte wieder hergestellt würden, wenn, außer der halben Mondmasse in B, noch eine andere Masse $^1/_2\,M$ an einen Punkt B' auf der Linie BC gebracht würde, derart daß $BC = CB'$ wäre. Daher sind die fluterzeugenden Kräfte dieselben, die sie sein würden, wenn statt des Mondes im Punkte B „ein Mond und ein Gegenmond“, jeder von der Masse $^1/_2\,M$ in B und B' vorhanden wäre. So ergibt sich die von ungenügend mit dem Stoff vertrauten Leuten

oft für paradox angesehene Tatsache, daß gleichzeitig unter dem Mond und auf der dem Monde abgewandten Erdhälfte hohe Flut entsteht, und daß an jedem Orte an jedem Mondtage, d. h. während einer Umdrehung der Erde relativ zum Monde (nahezu 24 Stunden 50 Minuten) zweimal Hochflut stattfindet. Diese Fluten heißen halbtägige Fluten. Es ist eine Tatsache gewöhnlichster Beobachtung, daß diese beiden Fluten, allgemein gesprochen, nicht von gleicher Höhe sind; es besteht in Wahrheit ein Unterschied zwischen ihnen, den man in Rechnung ziehen kann, wenn man eine ganztägige Flut, d. h. eine Flut von der Periode eines Mondtages den halbtägigen Fluten superponiert annimmt.

562. Sonnenflut. Springflut und Nippflut. Die genau gleichen Wirkungen werden durch die Anziehung der Sonne hervorgerufen, und ebenso kann die Sonne in der eben für den Mond besprochenen Weise durch Sonne und Gegensonne ersetzt werden. Danach wird der Leser im großen und ganzen verstehen, wie die Fluthöhe im Verlaufe eines Monats wechselt. Es gibt zwei halbtägige Sonnenfluten in genau 24 Stunden, und so überholen in den Eintrittszeiten allmählich die Sonnenfluten die Mondfluten, die erst in 24 Stunden 50 Minuten zweimal eintreten, und gehen ihnen voran. Bei Neumond, wenn Sonne und Mond an derselben Seite des Himmels stehen wie M und S, Fig. 328, und bei Vollmond, wenn sie einander entgegengesetzt stehen wie M und $G.S$, wirken Sonnen- und Mondfluten zusammen, und es entstehen die Springgezeiten, d. h. starke Flut (Springflut) und tiefe Ebbe, die zweimal während eines Mondumlaufes eintreten. Zwischen je zwei aufeinander folgende Springfluten fällt eine Zeit, wo Sonne und Mond, wie man sagt, in Quadratur stehen, d. h. (von der Erde aus gesehen) einen Winkel von 90° miteinander bilden. Dann fällt die Sonnenebbe mit der Mondflut zusammen; und da die letztere stärker ist, so wird die Sonnenflut von der Mondflut abgezogen. So entstehen zweimal im Monat die Nippgezeiten, die einen vergleichsweise geringen Unterschied zwischen Ebbe und Flut (Nippflut) aufweisen.

Fig. 328, die in betreff der Dimensionen und Abstände der Körper keinen Maßstab bietet, zeigt diese Wirkungen, natürlich mit bedeutender Übertreibung. Das punktierte Sphäroid dicht an der Kugeloberfläche stellt die Oberflächenform unter der als durch S und $G.S$ erzeugt angesehenen Sonnenflut dar, das andere gestrichelte Sphäroid ist die Oberfläche unter der Mondflut (etwas mehr als das Doppelte der Sonnenflut), die als durch M und $G.M$ hervorgerufen betrachtet werden kann. Das durch die ausgezogene Linie $JAA'J'$ bezeichnete Sphäroid zeigt die Oberfläche unter beiden gleichzeitig herrschenden Fluten. Wie man sieht, ist die Erhebungsfläche, die aus den beiden Kappen AJB und $A'J'B'$ besteht, von der Senkungsfläche durch zwei (durch AB und $A'B'$ dargestellte) Kreise getrennt, die senkrecht zu JJ' und so gelegen sind, daß jeder der Winkel JCA,

$J'CA'$ fast gleich $54^0\,44'$ ist. Also verstärken sich die beiden Fluten, und die Steigungen und Senkungen an irgend einem Orte werden einfach addiert.

Die Zeichnung kann leicht zur Erläuterung der Nippfluten umgeändert werden, indem man die Verbindungslinie zwischen Mond und Gegenmond um einen rechten Winkel um C in der Ebene der Zeichnung dreht und sie die Mondflut mit sich führen läßt. Dann wird man die resultierende Fluthöhe finden, indem man die Fluten addiert, wo sie sich unterstützen, und dort, wo sie einander entgegenwirken, die Differenz von Hebung oder Senkung nimmt. Das Ergebnis wird in jedem Fall die Abweichung von der mittleren Höhe sein.

563. Stärke der fluterzeugenden Kräfte. Es ist interessant, die Stärke der fluterzeugenden Kräfte von Sonne und Mond mit Kräften von bekannten Beträgen zu vergleichen. Die von der Erde auf einen Körper von der Masse eins auf ihrer Oberfläche ausgeübte Anziehung ist kE/a^2, wo E die Masse der Erde ist. Das Verhältnis der maximalen horizontal gerichteten fluterzeugenden Kraft zu jener Erdanziehung ist

$$\frac{3}{2}\,\frac{Ma^3}{ED^3},$$

oder:

$$\frac{3}{2}\,\frac{M}{E}\left(\frac{a}{D}\right)^3.$$

Nun ist M/E ungefähr 1/83 und a/D ungefähr 1/60. Folglich ist das Verhältnis in erster Annäherung 1/12000000. Die horizontale auf eine Menge Materie wirksame Flutkraft ist also äußerst gering im Vergleich mit ihrem Gewicht. Die Wirkung der vertikalen Flutkraft anderseits ist, wenn sie positiv ist, die, die Schwere zu vermindern, und sie zu vergrößern, wenn sie negativ ist. Da der größte positive Wert der vertikal gerichteten Kraft 4/3 der größten horizontal gerichteten ist, so ist der größte Betrag, um den die Schwere durch die Flutkraft vermindert wird, nur 1/9000000 ihres wirklichen Wertes, und die stärkste Vermehrung der Schwere aus demselben Grunde beträgt 1/18000000.

Die Masse der Sonne ist ungefähr das 332000 fache der Erdmasse oder nahezu das 27000000 fache der Mondmasse, und die Entfernung der Sonne ist ungefähr 386 mal so groß wie die des Mondes. Folglich ist, da der Kubus von 386 gleich $57{,}5 \times 10^6$ ist, die fluterzeugende Kraft der Sonne etwas weniger als halb so groß wie die des Mondes.

564. Höhe der statischen Flut. Es soll jetzt bei dem Versuch, die Höhe des Wassers über dem mittleren Meeresspiegel aufzufinden, angenommen werden, daß die in Ruhe befindliche Oberfläche eine

Kugel von einem gewissen, alsbald näher zu definierenden Radius a sei, und es soll nur die durch reine Flutkräfte bewirkte Abweichung von der Kugelgestalt betrachtet werden unter der Annahme, daß diese Flutkräfte auf eine einen festen, starren Kern umgebende Wasserschicht wirken. Natürlich gibt es außerdem eine durch die Rotation der Erde um ihre Axe hervorgerufene Abweichung von der Kugelgestalt, aber diese bleibt an jedem Orte die gleiche, und man wird. ohne sie in Rechnung zu ziehen, die gewöhnliche Fluthebung und Senkung annähernd richtig finden. Die Rechnung soll ausgeführt werden unter der Annahme, daß der gewählte mittlere Radius a klein ist im Vergleich mit der Entfernung D zwischen dem Mittelpunkt der Erde und dem des Mondes, so daß man a^3/D^3 u. s. w. im Vergleich mit a/D oder a^2/D^2 vernachlässigen kann.

Auch ist beim angenäherten Verfahren zu bemerken, daß die von der Verschiebung der Wassermassen selbst herrührende Änderung im Kraftfelde vernachlässigt wird; das aus der Materie der Erde herrührende Potential an jedem beliebigen Oberflächenpunkt wird so genommen, als ob die gesamte Materie im Mittelpunkt C vereinigt wäre. In einer strengen Erörterung müßte das Potential der Oberflächenschicht in ihrer neuen Verteilung mit in Rechnung gezogen werden [1]).

Angenommen nun, die fluterzeugenden Kräfte rührten von Mond und Gegenmond (jeder von der Masse $\frac{1}{2}M$) auf entgegengesetzten Seiten der Erde, wie in § 561 gesagt wurde, her, so sei V das Potential an einem Oberflächenpunkt der Erde, dessen Entfernung von C gleich r ist und dessen Winkelabstand von der Verbindungslinie der Mittelpunkte von Erde und Mond φ ist, und E sei die Masse der Erde. Dann ist

$$-V=\frac{kE}{r}+\frac{1}{2}kM\left[\frac{1}{\sqrt{D^2+r^2-2Dr\cos\varphi}}+\frac{1}{\sqrt{D^2+r^2+2Dr\cos\varphi}}\right].$$

Entwickelt man dies bis zu Gliedern von der Ordnung r^2/D^2 (da die von der Ordnung r/D verschwinden), so ergibt sich als Gleichung der Oberfläche gleichen Potentials, mit der die Wasseroberfläche zusammenfällt:

$$\frac{E}{r}+\frac{M}{D}\left[1+\frac{1}{2}\frac{r^2}{D^2}(3\cos^2\varphi-1)\right]=const. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Wird jetzt mit a derjenige Wert von r bezeichnet, für welchen $\cos^2\varphi = {}^1/_3$ ist, so wird die linke Seite und somit auch der Wert der Konstanten: $E/a + M/D$. Nimmt man dann a als Entfernung des mittleren Niveaus vom Mittelpunkt, so ergibt sich:

$$E\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\frac{Mr^2}{D^3}(3\cos^2\varphi-1)=0.$$

[1]) S. Thomson u. Tait, Theoret. Physik 1, 2. Teil, § 815.

Schreibt man nun $r = a(1 + u)$, so wird u numerisch klein im Vergleich mit der Einheit sein, und es ergibt sich daher durch Vernachlässigung der Glieder mit u^2 an Stelle der letzten Gleichung:

$$u = \frac{1}{2} \frac{Ma^3}{ED^3} (3 \cos^2 \varphi - 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Es wird bemerkt werden, daß die Größe auf der rechten Seite nach Gl. (2) das halbe Verhältnis der vertikal gerichteten Flutkraft zum Wert der Schwere ist.

Die Höhe über dem oben definierten mittleren Stand ist hiernach au. Der Wert von u verschwindet auf den durch

$$\varphi = \arccos \sqrt{\frac{1}{3}}$$

definierten und schon in § 560 erwähnten Kreisen. Die größte Erhebung findet in J und J', der tiefste Abfall in Punkten des Kreises CD statt. Im ersteren Fall wird $au = Ma^4/ED^3$, im letzteren $\frac{1}{2} Ma^4/ED^3$. Der ganze Umfang vom höchsten bis zum tiefsten Stand ist also

$$\frac{3}{2} \frac{Ma^4}{ED^3} \text{ oder } \frac{3}{2} \frac{M}{E} \cdot \left(\frac{a}{D}\right)^3 \cdot a.$$

Rechnet man dies für den Mond mit runden Zahlen aus, so findet man in Metern:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{83} \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^3 \cdot 6370000 = 0{,}53.$$

Für die Sonne würde sich etwa die Hälfte ergeben, und folglich wird die Höhendifferenz zwischen Springflut und Springebbe rund 0,80 m.

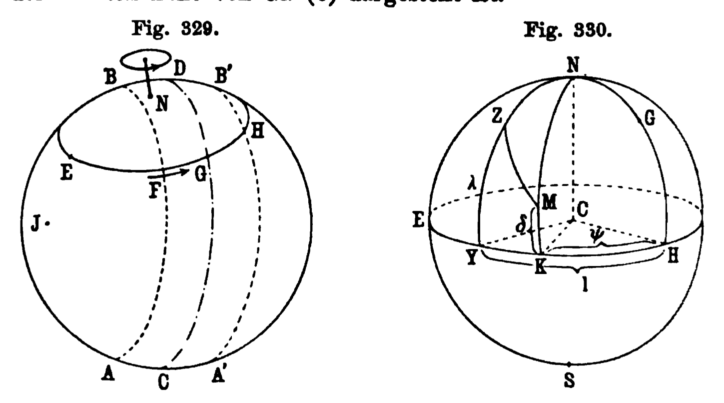
565. Gang der Höhenänderung des Meeresspiegels während eines Mondtages. In den Fig. 329 u. 330 (a. f. S.) stellt J den Punkt vor, in dem die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Erde und des fluterzeugenden Körpers, es sei hier der Mond, die Erdoberfläche schneidet. Dieselbe Linie, vom Mittelpunkt aus nach hinten verlängert, schneidet die Oberfläche in einem zweiten Punkt J'. J und J' sind die Punkte höchster Flut. Um die Erde herum gezogene Kreise, die diese Linie zur Axe haben, sind Kreise gleicher Fluthöhe über dem Meeresspiegel. So sind z. B. AB und $A'B'$ (Fig. 329) Kreise von der Niveauänderung null, CD ist der Kreis tiefsten Standes. An allen Punkten der Oberfläche zwischen J und dem Kreis AB und zwischen dem Kreis $A'B'$ und J' ist das Wasser über, an allen Punkten zwischen AB und $A'B'$ ist es unter dem mittleren Stand.

Betrachten wir jetzt die Erde als sich um ihre Axe durch N drehend, während die Oberflächenverschiebung durch die Flut relativ zum Monde festgehalten wird. Ein Beobachter auf einem festen Punkt der Erdoberfläche wird längs dem kleinen Kreis EGH im Raume

herumgeführt. Wenn er nach E kommt, ist der Mond auf seinem Meridian, und er beobachtet, daß alsdann an seinem Orte höchste Flut ist. Wenn er sich nach F zu weiter bewegt, sieht er, daß die Fluthöhe abnimmt, bis er sie bei F auf null findet. Wenn er sich von F fortbewegt, sieht er Ebbe eintreten, die ihr Maximum erreicht, wenn er in der Stellung G angelangt ist. Diese Ebbe beginnt wieder zu weichen, wenn sein Ort im Raume sich H nähert, wo das Meer wieder den mittleren Wasserstand erreicht hat. Wird der Beobachter mit der Erde von H fortgeführt, so steigt der Meeresspiegel wieder und erreicht ein Maximum, wenn er im Meridian JJ' bei einem (in der Figur nicht sichtbaren) Punkte K zwischen N und J' anlangt. Hat der Beobachter den Punkt K passiert, so nimmt die Fluthöhe wieder ab und und wird null, wenn er von neuem den Kreis $A'B'$ schneidet. Dann beginnt wiederum die Ebbe und setzt sich fort, bis der Kreis AB erreicht ist.

Das Maximum bei K ist, wie zu beachten ist, kleiner als das Maximum bei G, da der Punkt K weiter von J' entfernt ist als G von J. Dieser Unterschied rührt von der ganztägigen Flut her, die in der zweiten Zeile von Gl. (6) dargestellt ist.

Fig. 329. Fig. 330.



566. Steigen und Fallen der Flut, ausgedrückt durch die Koordinaten von Mond und Beobachtungsort. Es bleibt noch übrig, den Wert des Steigens oder Fallens der Flut über bezw. unter den mittleren Stand in den Koordinaten des Beobachtungsortes und des Mondes auszudrücken. Die Lage des Ortes auf der Erdoberfläche wird durch seine geographische Breite und Länge bestimmt, die des Mondes durch den Winkel, um den sich die Erde um ihre Axe gedreht hat, seit der Mond im Meridian von Greenwich stand, oder durch den sogenannten Stundenwinkel des Mondes und den Winkel, den die von C nach dem Mond gezogene Linie mit der Äquatorebene bildet, d. h. die Deklination des Mondes. Es mögen die (westliche) Länge und die (nördliche) Breite, HY und YZ in Fig. 330 mit l und λ bezeichnet

werden; der Stundenwinkel HK und die Deklination MK mit ψ und δ. Unsere Aufgabe ist, $\cos\varphi$ in diesen Koordinaten auszudrücken.

Offenbar ist φ der wahre Zenitabstand des Mondes, d. h. der Winkel, den die Vertikale an dem betreffenden Orte mit der von C nach dem Mittelpunkte des Mondes gezogenen Linie bildet. Es möge Fig. 329 die Himmelskugel darstellen, N und S die Pole, EHE den Äquator und M, G und Z die Punkte, in denen die von C nach dem Monde, nach Greenwich und nach dem Beobachtungsort P gezogenen Radien die Himmelskugel schneiden. Man schlage größte Kreise von N durch G, M und Z, die den Äquator in H, K und Y schneiden, und man verbinde MZ durch einen größten Kreisbogen. MZ stellt den Zenitabstand φ des Mondes vor.

Betrachten wir jetzt das sphärische Dreieck NMZ. Der Winkel bei N wird durch KY, also durch $HY - HK$ oder $l - \psi$, gemessen. Ferner sind NM und NZ, die Seiten dieses Dreiecks, $\pi/2 - \delta$ bezw. $\pi/2 - \lambda$. Die fundamentale Elementarformel der sphärischen Trigonometrie ergibt

$$\cos MZ = \cos NM \cos NZ + \sin NM \sin NZ \cos KY$$

oder

$$\cos\varphi = \sin\lambda \sin\delta + \cos\lambda \cos\delta \cos(l-\psi),$$

und daraus

$$\begin{aligned} 3\cos^2\varphi - 1 &= 3[\sin^2\lambda \sin^2\delta + \cos^2\lambda \cos^2\delta \cos^2(l-\psi) \\ &\qquad + 2\cos\lambda\cos\delta\sin\lambda\sin\delta\cos(l-\psi)] - 1 \\ &= \frac{3}{2}\cos^2\lambda\cos^2\delta\cos 2(l-\psi) + 6\cos\lambda\sin\lambda\cos\delta\sin\delta\cos(l-\psi) \\ &\qquad + \frac{1}{2}(3\sin^2\delta - 1)(3\sin^2\lambda - 1) \qquad (5) \end{aligned}$$

Also hat man, wenn man $\mathfrak{H}$ für $\frac{3}{2}Ma^4/ED^3$ setzt, für das gesamte Steigen oder Fallen au:

$$\left.\begin{aligned} au = \frac{1}{2}\mathfrak{H}\cos^2\lambda\cos^2\delta(\cos 2l\cos 2\psi + \sin 2l \sin 2\psi) \\ + \frac{1}{2}\mathfrak{H}\sin 2\lambda\sin 2\delta(\cos l\cos\psi + \sin l\sin\psi) \\ + \frac{1}{12}\mathfrak{H}(1 - 3\cos 2\delta)(3\sin^2\lambda - 1) \end{aligned}\right\} \cdot \qquad (6)$$

Ein genau analoger Ausdruck gilt für die Höhe der Sonnenflut. Die den Mond und die Erde betreffenden Zahlen werden durch die entsprechenden, Sonne und Erde betreffenden Zahlen ersetzt, die Fluthöhe wird ausgerechnet und zu der Mondflut für denselben Augenblick hinzugezählt, um die gesamte Erhebung bezw. Ebbe des Wasserstandes zu ergeben.

Die erste Zeile des Ausdrucks auf der rechten Seite stellt die halbtägige Flut, die zweite die ganztägige Flut dar, die dritte Zeile stellt die sogenannte Deklinationsflut dar.

Wenn dS ein Element der Erdoberfläche bezeichnet, dann ist, wie leicht bewiesen werden kann, $\int dS$ über die Oberfläche gleich null, d. h. das aus der Ebberegion verdrängte Volumen ist gleich dem über den gewählten mittleren Stand in die Region der Fluterhebung gestiegenen Volumen. Allerdings würde dies nur für einen die ganze Erde bedeckenden Ozean gelten. Wenn die Erde nur teilweise davon bedeckt ist, muß in Gl. (6) für den Ausdruck für au eine Größe au' hinzugefügt werden, die die Bedingung erfüllt, daß $\int a(u + u')dS$, über die ganze Wasserfläche genommen, null ist.

567. Diskussion der Glieder in der Formel für Flut und Ebbe. Die halbtägige Flut ändert sich für einen Ort von null bis zu einem Maximalwert und wieder auf null zurück, dann auf einen negativen Maximalwert und wieder auf null zurück, während der Stundenwinkel ψ sich um 180^0 ändert. Abgesehen von der sich ändernden Amplitude ist der Wechsel eine einfache harmonische Schwingung, die in dem Zeitraume zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen des Mondes durch den Meridian in derselben Richtung alle ihre Phasen zweimal durchläuft. Die Amplitude ändert sich wie das Quadrat des Kosinus der Deklination des fluterzeugenden Körpers und auch wie das Quadrat der Breite des Ortes, sie ist also null an den Polen und ein Maximum am Äquator. Die Deklination variiert im Falle der Sonne von null bis zur Schiefe der Ekliptik ω ($= 23^0\ 27'\ 10''$) nördlich oder südlich, im Falle des Mondes mit veränderlicher Weite auf beiden Seiten von null, die niemals größer als $\omega + i$ oder kleiner als $\omega - i$ sein kann, wo i die Neigung der Mondbahn gegen die Äquatorebene ist. Also variiert die Amplitude von Flut und Ebbe mit der Änderung des Wertes der Deklination von einem Maximal- zu einem Minimalwerte, ohne zu verschwinden, und ist am größten, wenn die Deklination null ist.

Die Deklination durchläuft in einer Umdrehung eine ganze Reihe von Werten, da sie in der einen Hälfte der Periode des Himmelskörpers negativ, in der anderen positiv ist. Es ist eine sehr häufig beobachtete Tatsache, daß der Mond, wenn er z. B. gegen Ende des ersten Viertels sehr tief steht, am Ende des dritten Viertels entsprechend hoch steht.

Die beiden Hochwasser und beiden Niedrigwasser, die in je 24 Mondstunden und die in je 24 Sonnenstunden eintreten, sind verschieden hoch infolge der durch die zweite Zeile dargestellten Flut, die alle ihre Werte durchläuft, während ψ sich von 0 auf 360^0 ändert. Diese Komponente heißt die ganztägige Flut. Sie ändert sich wie der Sinus der zweifachen Deklination und verschwindet daher, wenn der fluterzeugende Himmelskörper auf dem Äquator ist. Dies ist bei der Sonne nur der Fall in den Äquinoktien, für den Mond, wenn er auf dem einen oder dem anderen der Knoten seiner Bahn um die Erde

ist. Die Amplitude ist daher positiv von einer Äquinoktie (bezw. Knoten) zur nächsten und negativ in der anderen Hälfte der tropischen Periode des Himmelskörpers, d. h. in der Periode von einer Äquinoktie (bezw. Knoten) zur übernächsten.

Ferner verschwindet die ganztägige Flut sowohl am Äquator als an den Polen infolge des in der Amplitude vorkommenden Faktors $\sin 2\lambda$.

Die dritte Zeile stellt die Deklinationsflut dar, d. h. für den Mond die 14 tägige, für die Sonne die halbjährige Flut. Sie verschwindet, aber nicht infolge des Faktors $1 - 3\cos 2\delta$, denn δ erreicht nie den Wert, für den $\cos 2\delta = {}^1/_3$ wird, sondern sie ist infolge des Faktors $3\sin^2\lambda - 1$ null für Punkte von der Breite $35^0\ 15'\ 52''$ oder rund $35^0\ 16'$. Wenn sich der Körper auf dem Himmelsäquator befindet, hat das Glied einen maximalen positiven Wert für eine gegebene Breite von weniger als $35^0\ 16'$ und einen maximalen negativen Wert für eine gegebene Breite von mehr als $35^0\ 16'$; denn dann hat $1 - 3\cos 2\delta$ den Wert -2, während $3\sin^2\lambda - 1$ am Äquator den Wert -1 und an den Polen den Wert 2 hat und für $\lambda = \arcsin\sqrt{{}^1/_3}$ verschwindet.

Da die Größe, soweit sie von der Deklination abhängt, unabhängig von deren Nord- oder Südrichtung ist und mit ψ nichts zu tun hat, so kann man sich die Deklinationsflut als von zwei Kreisen von Materie erzeugt denken, die im Falle des Mondes aus Mond und Gegenmond zusammengesetzt sind, deren jeder gleichförmig um den zu dem Äquator parallelen Kreis, auf dem er liegt, verteilt ist. Diese Kreise liegen daher in gleichen Abständen auf den beiden Seiten des Äquators, und sie nähern sich einander mehr und mehr mit vom äußersten Wert auf null abnehmender Deklination, bis sie in der Äquatorebene sich zu einem Kreise verbinden. Ein analoges Verhalten gilt für die halbjährige Flut.

568. Fluten von langer Periode. Die Knotenlinie der Mondbahn dreht sich in einer Periode von 19 Jahren einmal herum, so daß die Grenzen der Deklination in dieser Zeit eine vollständige Reihe von Änderungen von $\omega + i$ bis $\omega - i$ und wieder zurück durchlaufen. Infolgedessen ändern sich alle drei Fluten unter diesem Einfluß, und zwar in einer 19 jährigen Periode.

Auch die Entfernung des Himmelskörpers erfährt eine vollständige Reihe von Änderungen in einer Umdrehungsperiode infolge der Elliptizität der Bahn. Dies ergibt die monatlichen und jährlichen sogenannten elliptischen Fluten.

569. Das Vorhandensein von Kontinenten von großem Einfluß auf Flut und Ebbe. Es ist mit Nachdruck darauf hinzuweisen, daß, selbst vom Standpunkte der Gleichgewichtstheorie aus, jede der hier erörterten Fluten durch die Tatsache, daß die Erde nur teilweise mit Wasser bedeckt ist, stark modifiziert wird. Der Leser

sei auf die sehr ausführliche Behandlung der Frage in Thomson und Taits Theoretischer Physik oder auf G. H. Darwins Artikel über die Gezeiten in der Encyclopaedia Britannica (19. Auflage) verwiesen; nur das sei hier gesagt, daß, wenn die Theorie dadurch korrigiert ist (was nur in unvollkommenem Maße geschehen kann), daß die Verteilung von Land und Wasser in Rechnung gezogen wird, für keinen Ort mehr notwendigerweise Flut oder Ebbe dann eintritt, wenn er in der durch den Mittelpunkt der Erde und das fluterzeugende Gestirn hindurchgehenden Ebene sich befindet; sondern es kann alsdann der Zeitpunkt der halbtägigen sowohl als der ganztägigen Flut vor oder nach diesem Augenblick eintreffen.

Die halbtägige Flut verschwindet ferner alsdann nicht an den Polen, wie der obige Ausdruck besagt. Die ganztägige Flut ist weder am Äquator noch an den Polen null. Ferner verschwindet die 14 tägige Mond- und die halbjährige Sonnenflut nach der Formel, wie wir wissen, in der Breite $\lambda = arcsin\ 1/\sqrt{3} = 35^0\ 16'$, was in der korrigierten Theorie nicht der Fall ist. Es kann gezeigt werden, daß der korrigierte Wert der Verschwindungsbreite der Deklinationsflut $arcsin \sqrt{(1+E)/3}$ ist, wo E der mittlere Wert von $3\, sin^2 \lambda - 1$ für den mit Wasser bedeckten Teil der Erde ist. G. H. Darwin hat für $arcsin \sqrt{(1+E)/3}$ den Wert $34^0\ 40'$ bezw. $34^0\ 57'$ gefunden, je nachdem ein gewisser mutmaßlicher antarktischer Kontinent in Rechnung gezogen wird oder nicht. Es wird also vom Wert $35^0\ 16'$ nur wenig abgewichen. Etwas stärker abweichende Werte erhält man, wenn man für die beiden Halbkugeln gesondert rechnet, nämlich rund 32^0 für die nördliche, rund 37^0 für die südliche.

570. Wirkung des Nachgebens der inneren Teile der Erde. Es ist angenommen worden, daß der innerhalb der Wasserschicht befindliche Teil der Erde starr sei, und daß Flut und Ebbe lediglich die Folge der relativen Verschiebung des Wassers seien. Wenn der innere Teil der Erde so leicht nachgäbe, als ob er flüssig wäre, wenn er z. B. aus einer Flüssigkeit bestände, die von der äußeren Flüssigkeitsschicht durch eine biegsame Decke getrennt wäre, so würde die Umwandlung in die Sphäroidgestalt fast gänzlich auf Rechnung der Verschiebung der Flüssigkeit innerhalb der Decke und nur sehr wenig davon auf das Steigen und Fallen des Oberflächenwassers relativ zur Decke entfallen. Die flüssige Oberfläche würde sich sehr ähnlich verhalten wie eine dünne Ölschicht auf der Oberfläche des Meeres; ihre Dicke würde sich kaum ändern.

Anderseits sind Flut und Ebbe zweifellos geringer, als sie sein würden, wenn die innere, anscheinend feste Materie ganz starr wäre, um wieviel geringer, ist nicht sicher. Die Frage ist von Lord Kelvin behandelt worden, der zu dem Schluß gekommen ist, daß die Nachgiebigkeit der Erde, wenn sie aus einem Material von der Starrheit

des Glases bestände, die ozeanischen Gezeiten auf $^2/_5$ von denen herabmindern würde, die stattfinden müßten, wenn die Erde absolut starr wäre. Wäre die Erdkugel so starr wie Stahl, so würden die Gezeiten $^2/_3$ von denen des Ozeans einer vollkommen starren Erde ausmachen. Lord Kelvin glaubt, daß die ozeanische Flut sicherlich größer ist als die Hälfte der Flut auf einer starren Erde, und vielleicht eher kleiner als die Flut, die entstehen würde, wenn die Materie des Erdinnern so starr wie Stahl wäre, und er schließt, daß die Starrheit sicherlich größer ist als die des Glases und möglicherweise kleiner als die des Stahls.

Lord Kelvin nimmt also an, daß die Erde im Innern fest ist, und schließt aus der Tatsache, daß die Elliptizität ihrer Oberfläche fast der augenblicklichen Rotationsgeschwindigkeit entspricht, daß sie sich erst verhältnismäßig kürzlich gefestigt haben müsse, als die Rotationsgeschwindigkeit annähernd dieselbe war wie jetzt. Eine bedeutende Wahrscheinlichkeit, die noch durch andere Betrachtungen verstärkt wird, ergibt sich daraus für die Annahme, daß die Erde nicht aus einem flüssigen inneren Teil besteht, der durch eine feste Kruste von einem äußeren, teilweise mit Wasser bedeckten Teil getrennt ist. Eine feste Kruste, selbst eine von einer Dicke von mehreren Meilen, würde den Schwingungen der eingeschlossenen Flüssigkeit vollständig nachgeben, und es würden nur sehr geringe Änderungen der Meerestiefe eintreten.

571. Die Ergebnisse der Gleichgewichtstheorie werden durch die tatsächlichen Gezeiten nicht bestätigt. Frage der 14 tägigen Fluten. Die statische Fluttheorie ist als Ganzes keineswegs eine richtige Gezeitentheorie. Die für ihre Richtigkeit notwendigen Bedingungen sind nicht einmal annähernd erfüllt: Die Erde dreht sich mit solcher Geschwindigkeit um ihre Axe, daß keine Zeit zur Annahme der Form eines, mit Bezug auf den fluterzeugenden Himmelskörper stationären, Flutensphäroids vorhanden ist, und daß, was vielmehr herauskommt, ein System erzwungener Schwingungen des die Erde bedeckenden Wassers ist, Schwingungen, die erstens durch die Reibung und zweitens durch die Gestalt der die Oberflächenschicht des Wassers begrenzenden Kontinente und Inseln beeinflußt werden. Die statische Fluttheorie ist immerhin wertvoll wegen des allgemeinen Einblicks, den sie in den Gegenstand gewährt, und wegen der Zerlegung in Flutkomponenten, zu denen sie Veranlassung gibt; überdies repräsentieren die aus ihr sich ergebenden 14 tägigen Mond- und halbjährigen Sonnenfluten mit ziemlicher Annäherung die tatsächlich sich ereignenden Fluten. Laplace hat bemerkt, daß diese letzteren Fluten infolge der Reibung möglicherweise die Gleichgewichtsform annehmen können; aber G. H. Darwin hat darauf hingewiesen, daß die Periode nicht lang genug ist, als daß diese Anordnung sich vollziehen könnte, zum mindesten für die 14 tägigen Fluten. Denn (siehe § 574) jede durch eine mit der Geschwindigkeit proportionale Reibung verzögerte

Bewegung des Wassers würde in einer Zeit t im Verhältnis des Faktors $e^{-kt/2}$ zu eins abnehmen, und es würde von dem Wert von t abhängen, der nötig wäre um $kt/2 = 1$ zu ergeben, ob die Reibung in dieser Weise wirksam wäre oder nicht. Je kleiner der Wert von t — d. h. von $2/k$ — d. h. je größer k ist, desto wirksamer ist die Reibung; und t müßte klein sein im Verhältnis zur halben Flutperiode — d. h. im Vergleich mit einer Woche, um die Bemerkung von Laplace zu rechtfertigen.

Wäre der Gesichtspunkt von Laplace richtig, so müßte es möglich sein, durch Vergleichung des beobachteten Betrages der 14 tägigen Flut mit dem theoretischen Betrage sich eine Schätzung von der Flutnachgiebigkeit der festen Erde zu bilden; aber obzwar der beobachtete Wert dem theoretischen nicht entspricht, ist man doch aus dem eben festgestellten Grunde nicht berechtigt, eine solche Schätzung zu machen. Der aus der Beobachtung gefundene Betrag der halbjährigen Fluten ist zu unsicher, um eine Grundlage für eine Schätzung solcher Art zu gewähren.

572. Abschweifung über freie und erzwungene Schwingungen. Der Ausdruck erzwungene Schwingung hat eine bestimmte sachliche Bedeutung. Er bezeichnet eine Schwingung, die ein System ausführt, wenn es der Einwirkung periodischer Kräfte unterliegt, die von dem schwingenden System unabhängig sind. Wenn z. B. ein Pendel abgelenkt und dann sich selbst überlassen wird, führt es das aus, was man freie Schwingungen nennt. Wenn aber eine periodische Kraft von einer von der Bewegung verschiedenen Periode von außen auf das Pendel wirksam ist — d. h. eine Kraft noch außer der periodischen Kraft, die aus seiner Bewegung relativ zur Erde resultiert —, so ist das Pendel gezwungen, in der Periode der Kraft zu schwingen. Betrachten wir z. B. ein Pendel, das Schwingungen von sehr geringer Weite ausführt, und nehmen wir an, daß die periodische Kraft ihre Wirkung beginne und damit fortfahre. Die freie Schwingung wird durch die Gleichung

$$x = a\cos(nt - \varepsilon) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

charakterisiert, wo x die Abweichung von der mittleren Lage zur Zeit t, ferner $2\pi/n$ die Periode, ε die Phase und a die Amplitude (§ 43) der Bewegung ist. Die Differentialgleichung ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0,$$

und Gl. (7) ist ihre vollständige Lösung.

Wenn jetzt eine Kraft $A\cos mt$ auf den Pendelkörper wirkt, so ist die Differentialgleichung der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = A\cos mt \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

unter Vernachlässigung der Reibung. Um diese Gleichung zu lösen, sei $x = B\cos mt$ angenommen und substituiert. Man erhält die Bedingung

$$B = \frac{A}{n^2 - m^2}.$$

Folglich wird Gl. (8) durch denjenigen Wert von x befriedigt, welcher in dem Ausdruck

$$x = \frac{A}{n^2 - m^2}\cos mt \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

gegeben ist.

Dieses ist zwar eine teilweise Lösung der Gleichung, aber nicht die vollständige. Diese erhält man, indem man zu diesem Werte von x den durch Gl. (7) gegebenen hinzufügt, so daß

$$x = \frac{A}{n^2 - m^2}\cos mt + a\cos(nt - \varepsilon) \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

herauskommt. Denn es ist klar, daß das zweite Glied den Wert der linken Seite von Gl. (8) nicht verändert, und daß es zwei willkürliche Konstanten a und ε einführt, welche nach der Theorie dieser Art von Differentialgleichungen für die vollständige Lösung gebraucht werden.

Der erste Teil stellt die erzwungene Schwingung dar, der zweite eine ihr superponierte, freie Schwingung. Wenn die Bewegung stationär geworden ist, ist die freie Schwingung nicht mehr wahrnehmbar; in der Wirklichkeit wird sie durch Reibungswiderstände erstickt, und es bleibt nur das erste Glied übrig. Im allgemeinen erkennt man die freie Schwingung nur, wenn die Bewegung angeht oder gehemmt wird oder wenn eine Veränderung von der erzwungenen Schwingung aus stattfindet.

Wenn wir dann nur die erzwungene Schwingung betrachten, sehen wir, daß, wenn $n^2 > m^2$ ist, die Ablenkung x und die Kraft gleiches Vorzeichen haben, und daß sie, wenn $n^2 < m^2$ ist, entgegengesetzte Vorzeichen haben. Im ersteren Falle nennt man die Schwingung eine direkte, im letzteren eine inverse. Die Kraft und die Ablenkung haben immer größte Zahlenwerte im selben Augenblicke. Ferner ist, wenn n^2 fast gleich m^2 ist, die Amplitude der erzwungenen Schwingung sehr groß — d. h. die Anwendung einer periodischen Kraft, die sehr annähernd die freie Periode (wie sie oft genannt wird) des Systems hat, ergibt eine große Schwingungsweite. Wenn geradezu $n = m$ ist, besagt Gl. (9), daß die Amplitude

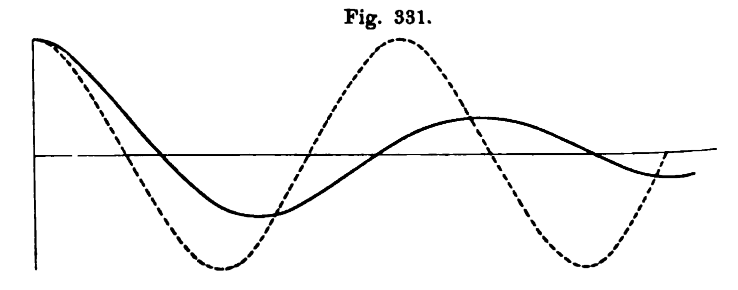
$$\frac{A}{n^2 - m^2}$$

unendlich ist; man muß aber bedenken, daß, wenn die Amplitude groß geworden ist, Kräfte ins Spiel getreten sein werden, die in der Differentialgleichung nicht berücksichtigt worden sind, und diese werden der Bewegung Grenzen auferlegen, so daß sie, statt unendlich stark zu werden, endlich, wenn auch sehr stark bleibt.

573. Beispiele erzwungener Schwingungen. Es gibt im wirklichen Leben viele Beispiele für die großen Schwingungsweiten, welche von Impulsen herrühren, die in der natürlichen Periode des Systems erteilt werden. Das Rollen eines Schiffes in einem Seegang, worin die Periode der Wellen der freien Rollperiode annähernd gleich ist, ist ein Fall dieser Art. Das Schiff wird in großer Gefahr sein, über den Grenzwinkel, innerhalb dessen das Reibungsmoment positiv ist (§ 417), hinaus zu kippen, wenn es nicht längsseits senkrecht gegen die Wellenkämme gestellt wird, so daß sie nur noch Stampfen hervorrufen, wofür das Schiff eine viel längere Periode hat. Eine periodische Kraft, selbst von kleinem Betrage, kann, wenn sie während einer beträchtlichen Zeitdauer wirkt, in einer massiven Konstruktion, z. B. einer Hängebrücke, eine große Abweichung von der Gleichgewichtslage hervorbringen, vorausgesetzt, daß die Kraft in oder annähernd in der Periode der freien Schwingung des Systems wirkt. So vermeidet man es gewöhnlich, einen Truppenkörper, der über eine Hängebrücke marschiert, in gleichem Schritt gehen zu lassen, damit die gehäufte Wirkung der dem Bau erteilten periodischen Impulse nicht eine gefahrbringende Abweichung der Brücke aus ihrer gewöhnlichen Ruhelage hervorrufe.

574. Erzwungene Schwingungen eines der Reibung unterworfenen Systems. Erzwungene Schwingungen werden in wesent-

Fig. 331.



licher Art durch die Reibung beeinflußt. Die erregten Schwingungen seien durch eine der Geschwindigkeit des bewegten Körpers proportionale Reibung verzögert. Dann ist die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + n^2x = A\cos mt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Die Lösung der Gleichung, welche aus dieser hervorgeht, wenn rechts null geschrieben wird, lautet:

$$x = ae^{-\frac{1}{2}kt}\cos\left(\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}k^2}\,.\,t - \varepsilon\right) \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Die Periode wird also durch die Wirkung der Reibung im Verhältnis von $n : \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}k^2}$ vergrößert, während die Amplitude infolge des Faktors $e^{-\frac{1}{2}kt}$ in geometrischer Progression in dem Maße abnimmt,

wie die Zeit in arithmetischer Progression zunimmt. Diese Art der Änderung der Amplituden wird durch Fig. 331, in anderer Weise aber durch Fig. 332 (vergl. auch S. 53) veranschaulicht. Es möge sich der Radiusvektor OP mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit in der Richtung dem Pfeil entgegen um O drehen. Die Länge von OP wird, dem hier ausgesprochenen Gesetze entsprechend, mit einem Wert von k abnehmen, der von dem konstanten Werte der Neigung der Kurve gegen den Radiusvektor abhängt.

Fig. 332.

Nun gehen wir zur erzwungenen Schwingung, also zur Gl. (11) über; eine spezielle Lösung von ihr sei

$$x = B \cos(mt - \varphi);$$

durch Substitution in Gl. (11) erhalten wir

$$B(n^2 - m^2) \cos(mt - \varphi) - km B \sin(mt - \varphi) = A \cos mt.$$

Wird diese Gleichung entwickelt und werden die Koeffizienten von $\cos mt$ und $\sin mt$ auf den beiden Seiten gleichgesetzt, so ergibt sich

$$B = \frac{A \sin \varphi}{mk}$$

und folglich

$$x = \frac{A \sin \varphi}{mk} \cos(mt - \varphi) \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

wo

$$tg\, \varphi = \frac{mk}{n^2 - m^2}$$

ist. Also können wir für die erzwungene Schwingung den Ausdruck aufstellen:

$$x = \frac{A \cos(mt - \varphi)}{\sqrt{n^4 + m^4 - 2 m^2 (n^2 - \frac{1}{2} k^2)}} \quad \ldots \ldots \quad (13\,\text{a})$$

Die vollständige Lösung erhält man durch Addition dieser zu der in Gl. (12) enthaltenen Lösung der entsprechenden Differentialgleichung für die freie Schwingung.

Es folgt aus Gl. (13 a), daß, wenn k nicht groß ist, der Wert von x sehr groß ist, wenn m annähernd gleich n ist. Auch ist alsdann φ gleich $\pi/2$, so daß die Schwingung um eine viertel Periode in der Phase hinter der Kraft zurück ist.

Ist k genau null, so gelangen wir zu den schon gefundenen Lösungen zurück.

575. Die Gezeiten als System erzwungener Schwingungen betrachtet. Fortpflanzung von Wellen. Um diese Betrachtungen

auf die Gezeiten anzuwenden, sei zunächst bemerkt, daß die relativen Stellungen von Erde, Sonne und Mond sich fortwährend periodisch ändern. Blieben Sonne und Mond relativ zum Erdmittelpunkte fest, so würde die an einem bestimmten Orte der Erdoberfläche einwirkende Flutkraft sich periodisch mit der die ganztägigen und halbtägigen Fluten erzeugenden Erdrotation ändern. Aber diese Himmelskörper ändern ihre Stellungen in ihren eigenen Perioden: Die Rektaszension der Sonne durchläuft alle ihre Werte an einem Sonnentage, die des Mondes in einem Mondtage (dem Zeitraume zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen des Mondes durch den Meridian in derselben Richtung); die Deklination der Sonne und die Entfernung der Sonne haben eine jährliche, die Deklination und Entfernung des Mondes eine monatliche Periode, und außerdem gibt es oben erwähnte Änderungen von noch längeren Perioden.

Die Erde und ihre Gewässer sind demnach periodischen Flutkräften unterworfen, und diesen entspricht nicht die Gleichgewichtstheorie, sondern die eines Systems, welches bestimmte natürliche Arten freier Schwingungen hat und außerdem der Reibung unterworfen ist. Um die Natur dieser Schwingungsarten zu verstehen, stellen wir uns vor, der Wasserspiegel in einem Kanal finge an am einen Ende Hebungen und Senkungen nach dem einfachen harmonischen Gesetze auszuführen, d. h. so, daß die Höhe η über dem mittleren Stande durch die Gleichung

$$\eta = a \cos nt$$

gegeben ist. Nach dem Beginn dieser Störung wird der Wasserspiegel an einer anderen Stelle gestört werden und die Störung sich den Kanal entlang mit einer bestimmten Geschwindigkeit fortpflanzen. Nach einer gewissen Zeit wird, wenn der Kanal lang genug ist, die Störung eine gewisse Strecke im Kanal zurückgelegt haben, und jenseits dieser Strecke wird das Wasser in Ruhe bleiben. Nahe bei der Erregungsquelle folgt die Schwingung dem einfachen harmonischen Gesetze sowohl was die Änderung der Höhe mit der Zeit an einer bestimmten Stelle, als was die Änderung der Höhe mit fortschreitendem Abstande von der Quelle in einem bestimmten Augenblicke betrifft. Also wird — unter Vernachlässigung der Reibung — das Wellenprofil zu irgend einer Zeit an beliebiger Stelle schließlich durch den Ausdruck

$$\eta = a \cos (nt - mx) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

gegeben sein, so daß, wenn $x = 0$, $\eta = a \cos nt$ ist, und wenn $t = 0$ ist, $\eta = a \cos mx$ ist, oder wenn t einen beliebigen Wert hat, so daß $nt = \varepsilon$ ist, $\eta = a \cos (mx - \varepsilon)$ ist. Jeder Wert, den η zu einer Zeit t in der Entfernung x von der Quelle hat, wird nach einem Zeitraume τ in einem um ξ größeren Abstand von der Quelle durch die Gleichung

$$nt - mx = n(t + \tau) - m(x + \xi)$$

gegeben sein, so daß

$$\xi = \frac{\tau n}{m}$$

ist. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V der Störung ist somit n/m. Dieselben Werte von η wiederholen sich längs der Störung in Abständen von $2\pi/m$. Diese Entfernung heißt die Wellenlänge der Störung und wird allgemein mit λ bezeichnet.

Also ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{m},$$

und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist

$$V = \frac{n\lambda}{2\pi}.$$

Die Wellenlänge ist die von der Störung in einer Periode, d. h. in der Zeit $2\pi/n$ oder T zurückgelegte Strecke. Also stehen Periode, Wellenlänge und Geschwindigkeit zueinander in der Beziehung

$$V = \frac{\lambda}{T}.$$

576. Wellen in einem Kanal. Lösung für Wellen in einem Kanal von endlicher Länge. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle im Kanal hängt von der Tiefe des Wassers ab, falls die Wellenlänge groß ist im Vergleich zur Tiefe. Es mögen zwei Querschnitte des Kanals in den Abständen x und $x + dx$ von einem gewählten Anfangspunkte für x betrachtet werden. Der erste Querschnitt möge der linke heißen, und die Welle möge sich von links nach rechts bewegen. Wenn p der Druck im ersten Querschnitt in irgend einer Höhe über dem Grunde des Kanals ist, so ist der Druck in derselben Höhe des anderen Querschnittes (wenn der Wert von η und daher die Bewegung überall sehr klein ist):

$$p + \frac{\partial p}{\partial x}dx = p + g\varrho\frac{\partial \eta}{\partial x}dx.$$

Auch ergibt sich, da die ganze Bewegung in der x-Richtung stattfindet (da die vertikale Komponente vernachlässigt wird) für die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

oder, da

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\varrho\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

ist,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Nun ist aber der Zuwachs an Tiefe über die mittlere Tiefe hinaus zwischen den betrachteten beiden Querschnitten gleich η, und das Flüssigkeitsvolumen über dem Durchschnittsstande ist $\eta b dx$, wenn b die Breite des Kanals ist. Die in der Sekunde durchtretende Flüssigkeit ist für den linken Querschnitt hbu, für den rechten Querschnitt

$$hb\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right).$$

Die für den Raum zwischen den Querschnitten in Betracht kommende Differenz beider Größen ist

$$-bh \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Dies muß gleich dem zeitlichen Zunahmegrad von $b\eta dx$, also

$$b \frac{\partial \eta}{\partial t} dx$$

sein. Folglich ist

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -h \frac{\partial u}{\partial x},$$

oder, wenn der zeitliche Änderungsgrad beider Seiten genommen wird:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -h \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial t}}{\partial x}.$$

Eliminiert man hieraus

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial t}}{\partial x}$$

mit Hilfe der oben gegebenen Bewegungsgleichung, so ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

die Gleichung der Wellenfortpflanzung in einem geraden Kanal mit senkrechten Wänden und von gleichförmiger Tiefe.

Setzt man

$$\eta = f_1(x - Vt) + f_2(x + Vt) \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

wo f_1 und f_2 willkürliche Funktionen sind und

$$V = \sqrt{gh} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16a)$$

ist, so ist die Gleichung befriedigt. Die Funktionen f_1 und f_2 können so gewählt werden, daß sie jede mögliche Bedingung oder Wellenform befriedigen. Sie stellen zwei mit der Geschwindigkeit V den Kanal der Länge nach, aber in entgegengesetzten Richtungen durchmessende Wellen dar. Denn wenn x um eine Größe ξ und t um τ vergrößert wird, wo $V\tau = \xi$ ist, so wird man sehen, daß der Wert von f_1 ungeändert geblieben ist. Wenn anderseits f_2 ungeändert bleiben soll, so muß sich x um $-V\tau$ ändern, wenn t sich um τ ändert.

Ebenso kann, wenn ξ die horizontale Verschiebung des Wassers an irgend einer Stelle im Kanal bedeutet, gezeigt werden, daß die Gleichung einer freien ungehinderten Welle

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

lautet, wo c^2 für gh gesetzt ist. Sie hat dieselbe Lösungsform wie die schon gefundene Gleichung für η. Unter der Annahme, daß die Welle in der zeitlichen Änderung von ξ einfach harmonisch ist, können wir setzen:

$$\xi = f(x) \cos(nt + \varepsilon) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

wo $f(x)$ diejenige Funktion bezeichnet, welche den Wert von ξ für verschiedene Werte von x gibt. Demnach erhält man durch Substitution in Gl. (17) die neue Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{n^2}{c^2} f = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und als ihre Lösung

$$f = A \cos \frac{n}{c} x + B \sin \frac{n}{c} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

wo n nach den Grenzbedingungen des Kanals bestimmt werden muß. Es ist demnach

$$\xi = \left(A \cos \frac{n}{c} x + B \sin \frac{n}{c} x\right) \cos(nt + \varepsilon) \quad . \quad . \quad (21)$$

Die allgemeinste Lösung gewinnt man durch Addition aller möglichen Lösungen von dieser Form.

Betrachten wir z. B. einen Kanal von der Länge l mit senkrechten Enden. Der Anfang sei am einen Ende; es muß für alle Werte von t dann $\xi = 0$ sein, wenn $x = 0$ und wenn $x = l$ ist. Das ergibt $A = 0$ und $B \sin(nl/c) = 0$ oder

$$n = k\pi \frac{c}{l},$$

wo k eine ganze Zahl ist. Es ist daher für diesen Fall die allgemeine Lösung:

$$\xi = \sum B_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos\left(\frac{k\pi ct}{l} + \varepsilon_k\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

wo $\sum$ Summation für sämtliche Werte von k bezeichnet.

577. Erzwungene Wellen in einem Kanal. Betrachten wir jetzt eine erzwungene Welle in einem Kanal. Ihre Differentialgleichung lautet:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + X \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

wo X eine periodisch wirkende Kraft ist.

Wir setzen in Gl. (23)

$$X = C \cos (nt + mx + \varphi)$$

ein und versuchen als Lösung den Ausdruck

$$\xi = D \cos (nt + mx + \varphi).$$

Durch Substitution in Gl. (23) erhält man

$$D = -\frac{C}{n^2 - c^2 m^2}$$

und folglich

$$\xi = -\frac{C}{n^2 - c^2 m^2} \cos (nt + mx + \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Die Welle ist demnach direkt oder invers, d. h. sie hat die Phase der Kraft oder die entgegengesetzte Phase, je nachdem $c^2 >$ oder $< n^2/m^2$ ist. Die Geschwindigkeit c ist die einer freien Welle, und n/m ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der periodischen Kraft und der erzwungenen Welle. Die erzwungene Welle ist also direkt oder invers, je nachdem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kraft kleiner oder größer ist als die Geschwindigkeit einer freien Welle.

578. Wellen in einem Äquatorialkanal. Nun sei der Kanal mit senkrechten Wänden und gleichförmiger Tiefe um den ganzen Äquator herumgeführt. Er kann dann als ein gerader Kanal gelten, und die oben für die Fortpflanzung von Wellen gefundenen Formeln können auf ihn Anwendung finden unter der Voraussetzung, daß g für die Wirkung der Erdrotation korrigiert wird, wie in § 281. Die wirksame periodische Kraft kann als von Mond und Gegenmond (s. § 561), beide im Himmelsäquator gedacht, herrührend angesehen werden. Daher muß die Periode der Kraft die Hälfte der Rotationsperiode der Erde relativ zum Monde betragen. Der Punkt des Kanales, um den es sich handelt, liege in einer Entfernung x von einem Bezugsmeridian nach Osten; der Winkel zwischen diesem Meridian und dem Meridian durch den Mond, vom letzteren aus nach Osten gemessen (NH und YN in Fig. 330), sei $n't$, so daß n' die Winkelgeschwindigkeit der Erde relativ zum Monde bedeutet. Der ganze Winkel, um den sich der nach dem betrachteten Punkte gezogene Radius von der Mondrichtung weg gedreht hat, ist $n't + x/a$, wo a der Erdradius ist. Da nun die Kraft X während einer Erddrehung relativ zum Monde zwei Perioden durchmacht, und in Ansehung des Umstandes, daß die Horizontalkraft unter dem Monde null und an allen Punkten auf beiden Seiten von dieser Lage nach ihm zu gerichtet ist, können wir den Ansatz machen:

$$X = -4 C \sin 2\left(n't + \frac{x}{a}\right).$$

Somit ergibt sich für die horizontale Verschiebung des Wassers in der erzwungenen Gezeit:

$$\xi = \frac{C a^2}{n'^2 a^2 - c^2} \sin 2 \left(n' t + \frac{x}{a} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Infolge der Verschiebung ξ hat die Breite einer vertikalen Schicht sich von dx in

$$dx\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

verwandelt und von h auf $h + \eta$ an Tiefe zugenommen. Da das Volumen dasselbe sein muß wie vorher, so ergibt dies

$$\eta + h \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0,$$

welches der oben in § 575 gebrauchten Beziehung

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - h \frac{\partial u}{\partial x}$$

äquivalent ist. Demnach findet sich nach Gl. (25)

$$\eta = - \frac{2 C h a}{n'^2 a^2 - c^2} \cos 2 \left(n' t + \frac{x}{a} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Wenn $\mathfrak{H}$ den äußersten Unterschied zwischen Flut und Ebbe der halbtägigen Gezeiten nach der Gleichgewichtstheorie bezeichnet, so ist in § 564 gezeigt worden, daß

$$\mathfrak{H} = \frac{3}{2} \frac{M a^4}{E D^3}$$

ist; und da nach Gl. (1) annähernd

$$4 C = \frac{3}{2} k \frac{M a}{D^3}$$

und

$$g = k \frac{E}{a^2}$$

ist, so ergibt sich

$$2 C h a = \frac{3}{4} \frac{M a^4 g h}{E D^3} = \frac{1}{2} \mathfrak{H} c^2.$$

Also kann die Gl. (26) in der Form

$$\eta = - \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{H} c^2}{n'^2 a^2 - c^2} \cos 2 \left(n t' + \frac{x}{a} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

geschrieben werden.

Die Gezeit ist also direkt oder invers, je nachdem $c^2 > $ oder $< n'^2 a^2$ ist. Im ersten Falle ist die Geschwindigkeit der erzwungenen Welle geringer als die der freien, und es herrscht Flut unter dem Monde; im zweiten ist die Geschwindigkeit der erzwungenen Welle größer als die der freien, und es herrscht Ebbe unter dem Monde.

Die Zeit, die eine freie Welle brauchen würde, um den ganzen Kanal rund herum zu durchwandern, ergibt sich nach Gl. (16 a) durch die Formel

$$V = \frac{L}{T}, \quad \text{also} \quad T = \frac{L}{V} = \frac{L}{\sqrt{gh}},$$

wo L die Länge und h die Tiefe des Kanals, beides in cm, und T die Zeit in sec ist; in Stunden wird also

$$T = \frac{L}{3600\sqrt{gh}}.$$

Damit also die Welle den Weg um den Kanal herum in 24 Sonnenstunden zurückzulegen imstande sei, müßte

$$\sqrt{h} = \frac{L}{3600\sqrt{g}.24} = \frac{4.10^9}{3600.31,31.24},$$

also

$$h = 2\,180\,000 \text{ cm}$$

sein, d. h. die Tiefe 21.8 km betragen, was die Meerestiefe selbst an den tiefsten Stellen bedeutend übertrifft.

579. Kanaltheorie der Gezeiten. Es geht aus dem Vorangegangenen klar hervor, daß — da die Erde sich unter der von der Sonne herrührenden Flutkraft dreht — eine erzwungene Flutwelle auf jeder Seite der Erde vorhanden ist und in 12 Sonnenstunden halb um sie herum wandert. Danach entsteht an jedem Punkte eine halbtägige Flut. Ist die Tiefe geringer als $22\frac{1}{2}$ km, so ist die Periode der erzwungenen Sonnenflut kleiner als die freie Periode, und die Gezeiten kehren sich um, es ist niedriges Wasser unter der Sonne.

Ein gleiches Ergebnis gilt für die von der Flutkraft des Mondes in der Periode von 12 Mondstunden herrührenden Mondflut. Für eine zwischen der kritischen Tiefe für die Mondflut und der für die Sonnenflut liegenden Tiefe würde Umkehrung der Sonnenflut stattfinden, während die Mondflut direkt verlaufen würde. Auch würden infolge des Umstandes, daß freie und erzwungene Perioden beinahe zusammenfallen, beide Fluten sehr stark sein.

Wenn also der Ozean aus einem Kanal rund um den Äquator bestände, so würden wir bei einer der Wirklichkeit entsprechenden Tiefe des Wassers eine inverse halbtägige Flut haben, d. h. es würde senkrecht unter dem Monde niedriges Wasser sein.

Für einen dem Äquator parallelen Kanal in der geographischen Breite θ liegt die Sache anders. An Stelle des Gliedes x/a in der wirksamen periodischen Kraft tritt ein Glied $x/(a\cos\theta)$ auf, und man gewinnt die Formel für die erzwungene Flut in diesem Falle durch Einsetzung von $a\cos\theta$ für a. Also wird die Flut direkt oder invers sein, je nachdem $c^2 >$ oder $< n'^2 a^2 \cos^2\theta$ ist. Für $c > n'a$ würde die Flut immer direkt sein, und für $c < n'a$ würde sie nur dann invers sein, wenn $n'a\cos\theta$ nicht unter den Wert von c sänke.

Also würde es nach der Kanaltheorie für eine gewisse Wasser-

tiefe — die kleiner ist als die kritische für den Äquator — eine Breite geben, jenseits deren die Flut im Kanal direkt sein würde. Läge der Kanal in minderer Breite, so würde die Flut invers sein; und bestände der Ozean aus einer Reihe von gleich tiefen, voneinander durch Scheidewände parallel dem Äquator getrennten Kanälen, und bedeckte er die ganze Erde, so würden alle Fluten in höheren Breiten direkt und in niederen invers sein.

580. Allgemeines Gezeitenproblem. Die Schwierigkeit des Gezeitenproblems nimmt ganz ungemein zu, wenn man sich diese Scheidewände weg denkt, und es ist unmöglich, hier eine auch nur einigermaßen befriedigende Darstellung davon zu geben. Die Scheidewände hatten die Bewegung des Wassers auf Hin- und Herschwingungen längs des Kanals beschränkt, es ist aber einleuchtend, daß in dem eben angenommenen allgemeineren Falle ebensogut eine Strömung in den Süd- und Nordrichtungen stattfinden muß. Ferner kommt das von den Polen nach dem Äquator zu fließende Wasser in eine Region größerer Geschwindigkeit längs der Oberfläche und fließt, relativ zur Erde, in westlicher Richtung, während das vom Äquator nach den Polen zu fließende Wasser eine nach Osten gerichtete Geschwindigkeit relativ zur Erde annimmt. Alles das macht die Bewegungen sehr kompliziert, und es ist ganz unmöglich, hier auch nur eine Andeutung des Systems von Flutströmungen zu geben, das in einem solchen Ozean existieren würde.

Indessen ist der allgemeine Schluß richtig, daß die Fluten in niederen Breiten invers, in hohen direkt sind. Es könnte scheinen, daß in der Übergangsbreite von inverser zu direkter Flut unendlich starke Flut herrschen müßte. Dem ist aber nicht so; im Gegenteil zeigt eine vollständige Erörterung des Gegenstandes, daß die Übergangsbreite eine solche ist, in welcher das Wasser weder steigt noch fällt. Hierauf kann jedoch, wie gesagt, nicht eingegangen werden; der Leser sei zu weiterer Belehrung auf die Mécanique céleste von Laplace und auf G. H. Darwins Artikel über die Gezeiten in der 19. Auflage der Encyclopaedia Britannica verwiesen. Der letztere Autor hat den Gegenstand neuerdings auch in einem besonderen gemeinverständlichen Buche „Ebbe und Flut“ (deutsche Ausgabe, Leipzig 1902) dargestellt.

581. Harmonische Gezeitenanalyse. Beobachtung durch Flutmesser. Das Problem wird noch unendlich mehr, selbst als eben angedeutet wurde, durch die Verteilung von Land und Wasser kompliziert, und die Möglichkeit, Flut und Ebbe des Wassers an einem Orte vorherzusagen, beruht nur auf der Beobachtung von Ebbe und Flut mittels eines selbstregistrierenden Apparates an eben diesem Orte während einer langen Zeitdauer und Auflösung der periodischen Änderungen in die einfachen Sinuslinien, aus denen sie sich zusammen-

setzen. Mit einer ganz kurzen Darstellung dieser Auflösung und der Art der Vorhersage sei die vorliegende Erörterung geschlossen.

Es werden in allen Haupthäfen mittels Flutmessern Flutkurven gezeichnet. Diese Kurven kann man betrachten als zusammengesetzt aus einer Anzahl von einfach harmonischen Schwankungen der Wasserhöhen von verschiedenen Perioden; es sind das die von den wirksamen Flutkräften erzeugten erzwungenen Schwingungen. Die Ordinaten sind Fluthöhen selbst oder ihnen proportional, die Abscissen sind Zeiten von einem gewählten Nullpunkte ab gerechnet. Aus diesen Kurven können durch Messung einer genügend großen Zahl von Ordinaten diejenigen Daten gefunden werden, welche zur Bestimmung von Amplitude, Periode und Phase jeder dieser Komponenten notwendig sind. Dann sind diese Daten zur Berechnung zukünftiger Fluten und zur Bildung von Fluttabellen für die betreffenden Häfen benutzbar.

Ein Apparat — Flutanalysator genannt — der als Ergänzung zu dem alsbald hier in der Beschreibung folgenden Flutvorhersager betrachtet werden kann, ist von Lord Kelvin erfunden worden. Man braucht nur die Niederschrift des Flutmessers auf einen Zylinder zu ziehen und die Kurve mit einer Zeichenspitze am Apparate zu verfolgen, so kann man die Konstanten der verschiedenen konstituierenden Sinuslinien vom Apparate ablesen. Die Beschreibung findet man in Thomson u. Tait, Theoret. Physik, Bd. I, 1. Teil.

582. Flutankündiger. Man sieht ein, daß man die Kombination der Fluthöhen dadurch erreichen kann, daß man die Kurven aller Komponenten auf derselben Skala von Zeit und Höhe aufzeichnet, sie längs derselben Datumlinie in den richtigen Lagen, wie sie durch die Phasen bestimmt sind, aufträgt, und dann die Höhen für jede Abscisse zusammenaddiert, um die dort resultierende Höhe und die resultierende Kurve für alle Abscissen zu erhalten. Folglich ist es theoretisch möglich, einen Apparat zu konstruieren, der die resultierende Kurve zeichnet. Man braucht dazu nur eine Anzahl einfach harmonischer Bewegungen, die von untereinander verbundenen, durch eine Kurbel oder ein Triebgewicht betriebenen Spitzen des Apparates ausgeführt werden.

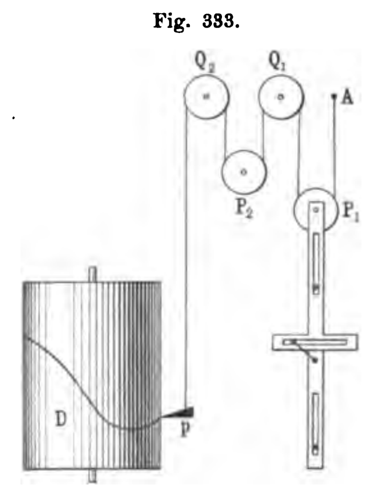
Wie man also einerseits durch Analyse die empirisch verzeichneten Wasserstände in ein System von Sinusschwingungen auflösen kann, so kann man anderseits durch Synthese theoretisch gegebene Sinusschwingungen zu einem komplizierten Systeme künftiger Wasserstände vereinigen.

Einen solchen Apparat hat Lord Kelvin konstruiert, und die beifolgende Zeichnung (Fig. 333) erläutert seine Wirkungsart. Eine kreuzförmige Schlitzvorrichtung zur Erzeugung von Sinusschwingungen von der auf S. 39 beschriebenen Art wird durch eine Kurbel in Gang gesetzt, deren Ausladung die halbe Amplitude von einer der durch den

Flutmesser gelieferten Flutkomponenten hat. Der Schlitz trägt an seinem oberen Ende eine Rolle P_1, deren gesamte vertikale Bewegungsweite natürlich das Doppelte der Kurbellänge ist. Eine am einen Ende an einem festen Punkte A befestigte Schnur geht um P_1 herum, über die feste Rolle Q_1, um die Rolle P_2, über die feste Rolle Q_2, um die Rolle P_3 u. s. w., und ist schließlich, nachdem sie zuletzt über eine feste Rolle gelaufen ist, an einem Schreibstifte p befestigt, der einen gleitenden Papierstreifen berührt. Gleichzeitig wird dieser Papierstreifen von einer Trommel ab- und auf eine andere aufgerollt, und zwar im gleichen Geschwindigkeitsgrade, mit dem die Trommeloberfläche sich bewegt.

Wenn die Rollen P_2, P_3 u. s. w. alle fest sind, so stellt die Bewegung von P_1 eine einzelne Flutkomponente dar. Wenn aber P_2, P_3 u. s. w. alle von „Sinusschlitzen" getragen werden, die mit der Treibkurbel von P_1 verbunden sind, so daß, während P_1 seine Bewegung beschreibt, P_2, P_3 u. s. w. andere Komponenten von Flut und Ebbe in richtiger Periode und richtiger Phase beschreiben, so wird das Schnurende mit dem Schreibstift in jedem Augenblicke eine Verrückung erfahren, welche das Doppelte der algebraischen Summe der Verschiebungen der Rollen P_1, P_2, P_3 u. s. w. ist. Gleichzeitig werden die das Papier in Bewegung setzenden Trommeln mit einer Geschwindigkeit betrieben, die derjenigen proportional ist, mit welcher die Kurbel des Apparates getrieben wird. Darum stellt jedesmal der dem Schreibstift geradeüber stehende Punkt des Papiers einen einzelnen Zeitmoment dar, und die Länge des Papierstreifens, die alsdann, seit eine bestimmte vertikale Linie der Spitze gegenüber war, an dem Schreibstifte vorbeigeglitten ist, stellt den Zeitraum zwischen einem gewählten Nullpunkte der Rechnung und dem in Rede stehenden Augenblick dar.

Fig. 333.

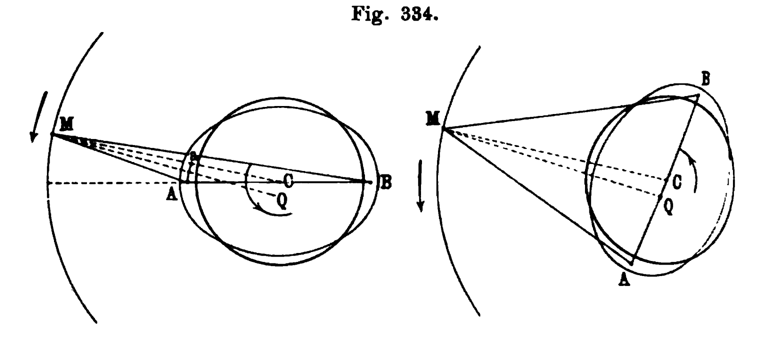


Es sei denn also eine genügende Anzahl von Rollen P_1, P_2, P_3 u. s. w. vorhanden, um die hauptsächlichsten Flutkomponenten darzustellen; sie seien mit Hilfe der durch Flutaufzeichnungen an Ort und Stelle erhaltenen Information so aufgestellt, daß sie zu einer gegebenen Zeit die richtigen Verschiebungen und Bewegungsrichtungen ausführen, und so verbunden, daß sie in den richtigen relativen Geschwindigkeitsverhältnissen betrieben werden. Der Schreibstift wird sich so auf und ab bewegen, daß er sich in der geeigneten Entfernung vom mittleren

Niveau befindet, um Anschwellen oder Abfall der Flut für denjenigen Zeitmoment darzustellen, welcher durch das der Spitze geradeüber befindliche Stück des Papierstreifens bezeichnet ist. Auf diese Weise wird also die Flutkurve für die Zukunft gezeichnet, und man kann durch Messung ihrer Ordinaten und Eintragung ihrer Längen Fluttabellen für den betreffenden Ort konstruieren.

583. Flutreibung. Auf die Erde wirksames verzögerndes Kräftepaar. Wir betrachten jetzt ganz kurz die Wirkung der Flutreibung auf die Bewegungen von Erde und Mond. An erster Stelle geht nach den in § 574 bis § 579 gefundenen Ergebnissen die Wirkung der Reibung dahin, wenn die erzwungene Flutwelle direkt ist, die lange Axe dessen, was wir weiter das Flutsphäroid nennen wollen, vorwärts zu drehen, in der Richtung der Erdrotation jenseits der Linie CM vom Erdmittelpunkte nach dem Monde (linke Seite der Fig. 334). Während

Fig. 334.



sich die Erde dreht, bleibt das Flutsphäroid fest in seiner Stellung relativ zum Monde. Die von dem näheren Teile der Flutschwellung auf den Mond ausgeübte Kraft ist größer als die vom entfernteren Teile ausgeübte, infolgedessen liegt die resultierende Kraft auf den Mond in der Linie MQ statt in der Richtung MC. Dies verursacht eine auf den Mond wirksame Kraft gegen den Erdmittelpunkt C zu und eine tangentiale Komponente in der Richtung der Bahnbewegung des Mondes. Auf die Erde wirkt, wie wir sehen werden, eine Kraft längs der Linie CM und ein die Erddrehung verzögerndes Kräftepaar, das eine Zerstreuung der Rotationsenergie der Erde erzeugt.

Anderseits, wenn die Flutwelle der Kraftrichtung entgegen, also invers ist, so geht die Wirkung der Reibung dahin, die Flutschwellung zurückzuwerfen (rechte Seite von Fig. 334), und wie vorher bleibt das Flutsphäroid fest in seiner Stellung relativ zum Monde. Würde das Sphäroid nach vorn geworfen, so würde die im ersten Falle auftretende Energiezerstreuung hier durch einen Zuwachs der Erde an kinetischer Energie ersetzt werden, und der Mond würde sich nach innen bewegen. In diesem Falle wirkt wiederum ein Kräftepaar auf die Erde

in dem Sinne, die Erdrotation zu verzögern und Energiezerstreuung zu verursachen, und eine Tangentialkraft auf den Mond in der Richtung seiner Bahnbewegung. Die Wirkung ist also die gleiche, ob die Welle direkt oder invers ist; es ist die Flutdeformation in den äquatorialen Regionen, welche in der oben beschriebenen Art am wirksamsten ist. Es wird also, um auf die Ergebnisse näher einzugehen, genügen, den auf der linken Seite von Fig. 334 dargestellten Fall zu betrachten.

Um denn zunächst zur Berechnung der tangentialen Kraft auf den Mond und des eben erwähnten Kräftepaares zu gelangen, so wird es, anstatt das ganze Sphäroid zu betrachten, für ein richtiges Verständnis des Gegenstandes genügen, das Kräftepaar zu betrachten, das von den Anziehungen des Mondes auf Teilchen von der Masse 1 in A und B herrührt, und anderseits die von der Anziehung dieser Teilchen auf M herrührende Tangentialkraft.

Bezeichnet man den Winkel ACM mit θ, die Strecke CA mit a und CM mit r, so gilt annähernd

$$(AM)^3 = r^3\left(1 - 3\frac{a}{r}\cos\theta\right), \quad (BM)^3 = r^3\left(1 + 3\frac{a}{r}\cos\theta\right)$$

$$\cos AMC = \frac{r - a\cos\theta}{(AM)}, \quad \cos BMC = \frac{r - a\cos\theta}{(BM)}$$

$$\sin AMC = \frac{a\sin\theta}{(AM)}, \quad \sin BMC = \frac{a\sin\theta}{(BM)}.$$

Jetzt sei auf jedes Erdteilchen von der Masse 1 eine Kraft vom Betrage kM/r^2 in der Richtung MC wirksam gedacht; dann wirkt auf das Teilchen von der Masse 1 in A eine Kraft $kM/(AM)^2$ in der Richtung nach M und eine Kraft kM/r^2 parallel mit (MC). Auf das Teilchen in B wirken gleichfalls $kM/(BM)^2$ nach M zu und kM/r^2 parallel mit (MC). Durch Auflösung längs (CM) und senkrecht zu (CM) (d. h. parallel mit Aa) ergibt sich

Kraft in A: Komponente $/\!/ (CM) = \frac{kM}{r^3}\, 2a\cos\theta$

" $/\!/ (Aa) = \frac{kM\sin\theta}{r^4}\, a\,(r + 3a\cos\theta)$.

Kraft in B: " $/\!/ (CM) = -\frac{kM}{r^3}\, 2a\cos\theta$

" $/\!/ (Aa) = -\frac{kM\sin\theta}{r^4}\, a\,(r - 3a\cos\theta)$.

Der Abstand zwischen den Wirkungslinien des ersten Paares paralleler Kräfte ist $2a\sin\theta$, der zwischen den Wirkungslinien des zweiten Paares $2a\cos\theta$. Wenn man die Glieder mit $\cos\theta$ im zweiten

Paare vernachlässigt, erhält man für das ganze auf die beiden Teilchen wirksame Kräftepaar

$$3\,\frac{k M a^2}{r^3}\,\sin 2\,\theta.$$

Anderseits ist die Tangentialkraft auf den Mond augenscheinlich gleich der algebraischen Summe der beiden mit $A a$ parallelen Kräfte. nämlich

$$3\,\frac{k M a}{r^3}\,\sin 2\,\theta.$$

Auf diese Weise kann das von dem ganzen Flutsphäroid herrührende Kräftepaar und Tangentialkraft dadurch gefunden werden. daß man die von Paaren von Teilchen herrührenden bezüglichen Kräfte summiert. Es wird einleuchten, daß das Kräftepaar und die Kraft sich wie die inverse sechste Potenz des Abstandes r ändern. Denn, wie wir sahen, ändert sich das Kräftepaar pro Masseneinheit umgekehrt wie die dritte Potenz, und ebenso ändert sich die gesamte Flut und Ebbe wie die umgekehrte dritte Potenz.

584. Scheinbare „Beschleunigung“ des Mondes. Die Wirkung des Mondes auf die Gezeiten geht also dahin, die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation zu vermindern und daher die Dauer des Tages zu verlängern. Eine in Sonnentagen gemessene Zeit wird alsdann kürzer erscheinen, als sie in Wahrheit ist, und der beobachtete Ort des Mondes wird nach irgend einer beliebigen Zeit demjenigen Orte voraus gefunden werden, welcher unter der Annahme unveränderter Tageslänge für das Ende dieser Zeit berechnet worden war. Es sei n die Winkelgeschwindigkeit der Erde im Bogenmaß pro Sekunde am Anfang eines Zeitraumes T, und $-\dot{n}$ sei der als konstant angenommene Änderungsgrad von n, so daß $\dot{n}$ positiv ist. Nach einem Zeitraume t ist die Winkelgeschwindigkeit im Bogenmaß, bezogen auf die ursprüngliche Sekunde, $n - \dot{n}t$. Darum wird sich die Erde in einem kurzen Zeitelemente dt um einen um einen Betrag

$$\frac{dn}{dt}\,t\,dt$$

kleineren Winkel drehen, als sie sich gedreht hätte, wenn ihre Winkelgeschwindigkeit unverändert geblieben wäre. Folglich dreht sie sich im Zeitraume T um einen um

$$\int_0^T \frac{dn}{dt}\,t\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{dn}{dt}\,T^2$$

kleineren Winkel.

Es könnte also $\dot{n}$ gefunden werden, wenn der Winkel bekannt wäre, um den der Mond infolge der Verzögerung der Erdrotation vor

seinem vorbestimmten Orte voraus ist. (Man erwähnt dies gewöhnlich als „Beschleunigung“ der Mondbewegung. Diese Benennung stimmt aber nicht überein mit der Bedeutung des Ausdruckes Beschleunigung in der Dynamik und würde richtiger das Voraneilen heißen, wie Lord Kelvin vorgeschlagen hat; das Entgegengesetzte würde dann ein Zurückbleiben sein.)

Man könnte nun aber von der Voraneilung keinen Gebrauch machen ohne die Annahme einer Änderung der Winkelgeschwindigkeit der Bahnbewegung des Mondes um die Erde. Es ist oben § 537 gezeigt worden, daß die Wirkung einer tangential gerichteten störenden Kraft den Mond veranlassen muß, von der Erde zurückzuweichen und sich in seiner Bahn um die Erde mit abnehmender linearer Geschwindigkeit zu bewegen. So nimmt also sowohl infolge zunehmender Entfernung als abnehmender Geschwindigkeit die Winkelgeschwindigkeit des Mondes auf seiner Bahn ab, und der Monat wird länger. Indessen ist diese Verzögerung klein im Vergleich mit der von der Verlangsamung der Erde herrührenden scheinbaren Beschleunigung $\dot{n}$. Wäre der Betrag der tangentialen Kraft bekannt, so könnte das ganze Zurückbleiben des Mondes aus dieser Ursache leicht berechnet werden, indem nach der in § 537 angegebenen Weise die Geschwindigkeitsabnahme und Zunahme des Abstandes gefunden wird (s. Thomson und Tait, Theoret. Physik).

585. Moment der Bewegungsgröße des Erde-Mond-Systems. Es muß ferner beachtet werden, daß die Zunahmegrade der Tages- und Monatslänge miteinander in Beziehung stehen. Das Moment der Bewegungsgröße der Erde ist um eine um $23^0\,27'\,10''$ zu einem Lot zur Ebene der Ekliptik geneigte Axe gerichtet; der Mond kann als in der Ebene der Ekliptik fortschreitend angenommen werden. Das Moment der Bewegungsgröße des Systems besteht erstens aus dem von der Bewegung ihrer Zentren und zweitens aus dem von ihren Rotationen herrührenden Momente der Bewegungsgröße. Die Masse E der Erde ist das 81fache der Mondmasse M, und ihre Entfernung vom gemeinsamen Schwerpunkte ist $^1/_{82}$ von der ganzen Entfernung des Mondes von der Erde. Die Winkelgeschwindigkeit der Bahnbewegung des Mondes ist ungefähr $n/27{,}3$, wenn n diejenige der Erdrotation ist. Das von der Bewegung der Zentren, die als in der Ekliptik stattfindend angenommen wird, herrührende Moment der Bewegungsgröße ist rund

$$\frac{E n\, 60^2 a^2}{27{,}3 \times 82};$$

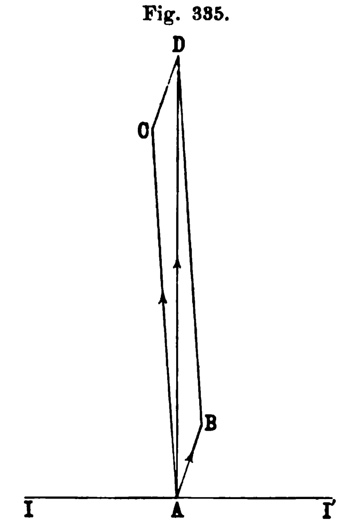
das aus der Erdrotation stammende, die um eine gegen ein Lot zur Ekliptik um $23^0\,27'\,10''$ geneigte Axe stattfindet, ist anderseits

$$\frac{1}{3}\, E a^2 n$$

nach einer Schätzung [1]) der Verteilung der Materie in der Erde. Also ist das Verhältnis des ersten zu dem zweiten Momente der Bewegungsgröße ungefähr 4,8. Das resultierende Moment ist ungefähr das 5,73fache von der Bewegungsgröße der Erdrotation und findet um eine Axe durch den Schwerpunkt von Erde und Mond statt, die in einem Winkel von ungefähr 19° 26′ zur Erdaxe geneigt ist. Fig. 335 erläutert diese Sätze: AB stellt die Bewegungsgröße der Erdrotation, AC das Bahnmoment der Bewegungsgröße dar. Der Winkel BAC stellt den Winkel zwischen der Erdaxe und einem Lot zur Bahnebene dar.

Da also die Bewegungsgröße der Erdrotation infolge der Flutreibung eine Abnahme erfährt, so muß das Moment der Bewegungsgröße der Bewegungen der Zentren dieser Himmelskörper in solchem Grade zunehmen, daß Richtung und Betrag des resultierenden Momentes gerade ungeändert bleiben.

Fig. 335.



Wir werden zunächst annehmen, daß die Ebenen der Mondbahn und des Äquators zusammenfallen. Dies wird die beiden Seiten des Parallelogramms in Fig. 335 in eine Linie bringen, und es wird $AB + AC = AD$ werden. Die Ebene, in der sich die Zentren der beiden Himmelskörper bewegen, wird die unveränderliche Ebene, und das gesamte Moment der Bewegungsgröße wird das 5,8fache der Bewegungsgröße der Erdrotation, was vom tatsächlichen Werte nur unbedeutend abweicht.

586. Zukunft von Erde und Mond. Der Mond weicht weiter und weiter von der Erde zurück unter Überführung des Momentes der Bewegungsgröße von der Rotations- zur Bahnbewegung, bis sich schließlich beide Weltkörper um ihren gemeinsamen Schwerpunkt

[1]) Es ist nämlich von Serret (Annales de l'observatoire de Paris, S. 324, 1859) gefunden worden, daß, wenn C das Trägheitsmoment der Erde um ihre polare Axe und A das um ihre äquatoriale Axe ist,

$$\frac{C - A}{A} = 0{,}00327$$

ist. Dies ergibt nach einer in § 824 von Thomson u. Taits theoretischer Physik gegebenen Tabelle annähernd

$$A = \frac{1}{3}\, E a^2.$$

drehen, als ob sie Teile eines starren Systems wären. Die angenäherte Periode dieser Umdrehung und der Abstand der beiden Himmelskörper voneinander sind leicht zu berechnen. Die Winkelgeschwindigkeit der Bahnbewegung sei n am Anfange der in Betracht stehenden Zeit, und sie sei n' geworden zu der Zeit, wo die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation und die der Bahn einander gleich geworden sind, während der Abstand sich von r auf r' vergrößert hat. Es mögen h und H das Moment der Bahnbewegungsgröße am Anfange und am Ende dieses Zeitraumes bezeichnen. Dann ist H annähernd das gesamte Moment der Bewegungsgröße des Systems. Denn, wie man ohne weiteres einsehen wird, steht das schließliche Moment der Bahnbewegungsgröße der Erde zu dem des Mondes im Verhältnis M/E, d. h. rund $^1/_{81}$. Ferner ist das Moment der Bewegungsgröße der Erdrotation nach dem Ausgleich ungefähr $^1/_3$ des von ihrer Bahnbewegung herrührenden, d. h. ungefähr $^1/_{243}$ von dem von der Bahnbewegung des Mondes herrührenden. Wir wollen daher die Rotationsbewegung der Erde vernachlässigen, wenn wir eine Schätzung der Winkelgeschwindigkeit und des Abstandes der Himmelskörper voneinander vornehmen. Es ist demnach

$$n r^2 \frac{ME}{M+E} = h, \quad n' r'^2 \frac{ME}{M+E} = H,$$

so daß

$$\frac{n^2 r^4}{n'^2 r'^4} = \frac{h^2}{H^2}$$

wird. Ferner ist nach dem dritten Keplerschen Gesetze

$$\frac{n^2}{n'^2} = \frac{r'^3}{r^3} \quad \text{oder} \quad \frac{n^2 r^3}{n'^2 r'^3} = 1,$$

und folglich

$$\frac{r'}{r} = \frac{H^2}{h^2} = \frac{5{,}8^2}{4{,}8^2} = 1{,}46;$$

in Worten: der Abstand der Zentren der beiden Himmelskörper voneinander hat von etwa 60 Erdradien auf etwa 87,6 Erdradien zugenommen.

Ferner ergibt sich

$$\frac{n'^2}{n^2} = \frac{r^3}{r'^3} = \frac{1}{(1{,}46)^3} \quad \text{oder} \quad n' = \frac{n}{1{,}77}.$$

Die Länge des Monats, die, wenn dieser Wechsel vor sich gegangen ist, auch die Länge des Tages ist, ist also das 1,77 fache seiner früheren Länge, d. h. ist gleich rund 48,36 Tagen von früherer Länge. Die lange Axe des Flutsphäroids ist nach dem Monde zu gerichtet, und der Mond erzeugt keine weitere Verzögerung der Rotationsgeschwindigkeit der Erde durch die Gezeiten.

Indessen wird dieser Zustand, wenn er einmal erreicht ist, nicht dauernd sein. Die Wirkung der Sonne auf die Sonnenfluten geht

dahin, die Erdrotation zu verlangsamen und die Rotationsperiode mit der Länge des Jahres in Koinzidenz zu bringen. Aber infolge der größeren Entfernung der Sonne ist diese Wirkung unmerklich im Vergleich mit der des Mondes. Wenn Erde und Mond sich wie ein starrer Körper drehen und die Wirksamkeit des Mondes aufgehört hat, so fährt die der Sonne fort, die Winkelgeschwindigkeit der Erde zu verringern, und so wird die Rotationsperiode der Erde größer als die des Mondes. Der Mond aber dreht immer weiter dieselbe Seite der Erde zu, und seine Bahngeschwindigkeit wird durch die Wirkung der Sonne nicht direkt berührt. Aber das irdische Flutsphäroid befindet sich relativ zum Monde in solcher Lage, daß das von der Anziehung des Mondes erzeugte Flutkräftepaar der Verlangsamung der Erdrotation entgegenwirkt, und daß dem Monde eine seiner Bahnbewegung entgegengesetzte tangentiale Kraft erteilt wird. Infolge dieses Umstandes wird sich der Mond der Erde in einer sehr allmählichen Spirale nähern und schließlich auf sie fallen.

587. Vergangenheit von Erde und Mond. Das Vorliegende ist nur eine sehr flüchtige Andeutung eines Gegenstandes, der in einigen wichtigen Abhandlungen von G. H. Darwin (a. a. O., S. 588) eingehend behandelt worden ist. Es ist dem Verfasser darin gelungen, sowohl die wahrscheinliche Vergangenheit des Systems von Erde und Mond zu enthüllen, als seine zukünftige Konfiguration vorauszusagen. Er fand, daß es zwei Gruppen von Umständen gibt, unter denen die Bewegung der beiden Himmelskörper als eines starren Systems möglich ist, deren eine einem großen, die andere einem verhältnismäßig kleinen Aufwande an Energie entspricht. Die erstere bestand, als der Mond sich um die Erde, fast in Kontakt mit ihrer Oberfläche, in einer Periode von drei bis fünf Stunden drehte; die andere verwirklicht den eben betrachteten Fall, in dem der Mond infolge des Zurückbleibens durch die Flutreibung durch die Reaktion des Flutsphäroids nach außen getrieben worden ist.

Bis zu der früheren Starrheitskonfiguration kann die Geschichte des Mondes an der Hand eines völlig befriedigenden dynamischen Prozesses zurückverfolgt werden, aber jenseits jenes Zeitpunktes gibt es nur noch Spekulation. Die Erde verliert in der gegenwärtigen Zeit in sehr beträchtlichem Grade Wärme aus dem Innern, und das Innere hat eine große Wärme im Vergleich mit der Oberfläche. Dieser Wärmeverlust dauert seit ungeheuren Zeiträumen, also muß die Erde früher einmal so heiß gewesen sein, daß sie in einem plastischen Zustande war, in dem sie deformierenden Kräften leicht nachgab. Denken wir uns also die halb geschmolzene plastische Erde in einer Periode von etwa drei Stunden um eine Axe rotierend, die gegen eine zur Ekliptik senkrechte Axe um 12° geneigt ist. Der unter der Wirkung der Zentrifugalkraft nachgebende Planet wird um den Äquator sehr stark

abgeplattet, und es entstehen Gezeiten unter der Wirkung der Sonne. Es fliegen Stücke von ihm rund um den Äquator ab wie Teile vom Radreifen eines überjagten Schwungrades, und eins von diesen, ein besonders großes oder vielleicht eine aus verschiedenen Stücken zusammengeschmolzene Masse, bildet den Mond. Dann sind Erde und Mond beide vorhanden, drehen sich um ihren gemeinsamen Schwerpunkt und außerdem um ihre betreffenden Axen in fast genau derselben Periode, so daß jedes dem anderen immer fast genau dieselbe Seite zukehrt.

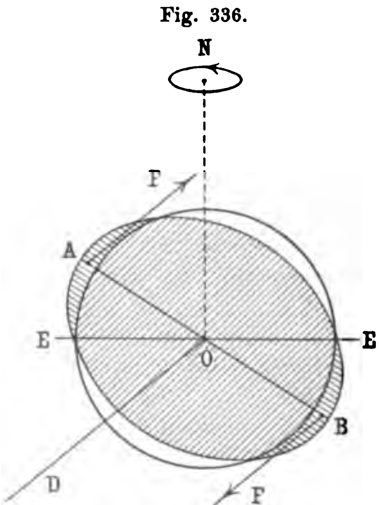
Die direkte Ursache für das Losreißen des Mondes ist ungewiß. Darwin hält aber für möglich, daß die freie Schwingungsperiode der Erde für Gestaltänderung beinahe der Hälfte ihrer Rotationsperiode gleich kam. Die freie Periode einer homogenen Kugel von der Masse der Erde, wenn sie einer Gestaltänderung unterworfen wird, ist für die langsamste Schwingungsart 1 Stunde 34 Minuten. Nun ist die Erde nicht homogen und die Periode wahrscheinlich etwas länger. Wenn also damals die Erde in einer Periode zwischen 3 und 5 Stunden rotierte, würden die halbtägigen Sonnenfluten eine Periode von der Hälfte dieses Betrages gehabt haben, und dies könnte ganz genau die Periode der freien Schwingung des Weltkörpers gewesen sein. Die Gezeiten der Erde würden durch die Übereinstimmung der Perioden, sozusagen durch die Resonanz, bedeutend verstärkt worden und ein Bruch unvermeidlich geworden sein.

Die beiden Weltkörper würden in so enger Nachbarschaft ungeheure Gezeiten ineinander erregen, und ihre Umdrehung mit einander zugekehrten gleichen Seiten würde unstabil sein. Wäre die Periode des Trabanten in seiner Bahn etwas kleiner als die Rotationsperiode des primären Körpers, so würde der Trabant, wie oben auseinandergesetzt wurde, in den primären Körper zurückfallen; wäre das Gegenteil der Fall, so würde sich der Trabant mit abnehmender Bahngeschwindigkeit weiter weg bewegen. Das Vorhandensein des Mondes beweist, daß er, sobald er abgeflogen war, sich in seiner eigenen Bahn in einer etwas größeren Periode als der der Erdrotation gedreht hat. Mit fortschreitender Zeit nahm die Länge des Tages und die Zahl der Tage im Monat beides zu. Die erstere wird indessen weiter zunehmen, bis Tag und Monat gleich sind, die letztere hat ihren Maximalwert (ungefähr 29) bereits überschritten und sinkt gegenwärtig allmählich auf den Wert 1 herab, den sie erreichen wird, wenn Tag und Monat gleich sein werden.

588. Wirkung des von der Flutreibung herrührenden Kräftepaares auf die Richtung der Erdaxe. Es ist möglich, die Wirkung der Flutreibung auf die Richtung der Erdaxe in Betracht zu ziehen. Infolge des Nichtzusammenfallens der langen Axe des Flutsphäroids mit der Äquatorebene wirkt auf die Erde ein Kräftepaar in dem Sinne,

sie um eine Axe in der Äquatorebene rotieren zu lassen, und ein anderes, die Rotation um die Figuraxe verzögerndes Kräftepaar. Denn es möge Fig. 336 einen Schnitt durch die Polaraxe ON und durch die lange Axe AB der sphäroidal angenommenen Flutfigur darstellen. Die Axe AB ist, wie schon erklärt wurde, der Stellung des Mondes voraus; der Mond dreht sich in der gegen den Äquator EE im Winkel ADE geneigten und die Äquatorebene in der Linie OD schneidenden Ebene durch AB. Das als Folge des Mondes wirksame Kräftepaar werde durch die beiden Kräfte F, F dargestellt, die in A und B in der Umdrehungsebene des Mondes angreifen. Dieses Kräftepaar löst sich in zwei Komponenten auf, eine um die Axe OE, die andere um die Rotationsaxe ON. Die Wirkung der letzteren ist, die Erdrotation zu verzögern, die der ersteren die Erzeugung eines Momentes der Bewegungsgröße um OE. Wenn sich der Mond bewegt, so folgt ihm die mittlere Lage des Flutsphäroids, und die Axe OE ändert sich dementsprechend. Aber, wie oben § 260 bewiesen wurde, ist das Ergebnis der Wirkung eines Kräftepaares um eine Axe, die sich wie OE mit dem Körper bewegt, eine Drehung des Körpers um eine Axe zu erzeugen, die sowohl zu OE als zur Rotationsaxe senkrecht ist. Also dreht sich, wie man aus den Richtungen der Rotation und des Kräftepaares einsehen wird, die Axe ON nach OA, d. h. die Neigung des Äquators gegen die Ekliptik nimmt zu.

Fig. 336.



Wenden wir uns jetzt zurück zur Fig. 335 (unter der Annahme, daß AC, die längere der sich in A treffenden Seiten des Parallelogramms, jetzt das Rotationsmoment darstelle), so wird es einleuchten, daß, wenn die Schiefheit der Äquatorebene gegen die unveränderliche Ebene zunimmt, die Neigung der Bahnebene gegen die unveränderliche Ebene ebenfalls zunimmt, es sei denn, daß das Rotationsmoment AC schnell genug abnimmt, um die Wirkung seiner Richtungsänderung aufzuheben. Wenn die Rotationsperiode, wie hier angenommen wird, klein und die Zähigkeit genügend groß ist, so erzeugt das Kräftepaar eine größere Neigung der Axe, und somit wächst auch die Neigung der Bahnebene gegen die unveränderliche Ebene. Das Rotationsmoment AC ist groß und der Winkel BAD klein. Folglich verursacht das Wachstum des Winkels BDA ein Wachstum des Winkels BAD, selbst wenn AC abnimmt. Das Gegenteil wird sich in einem sehr viel späteren Stadium

der Geschichte von Erde und Mond ereignen. Dann wird das Rotationsmoment sehr klein sein im Vergleich mit dem Bahnmoment, welches dann wirklich sehr annähernd dem Gesamtmoment gleich sein wird. Daher wird Abnahme des Rotationsmomentes selbst bei Wachstum des Winkels BDA Abnahme des Winkels BAD bedeuten. Natürlich wird dies alles von der Wirkung der Sonne beeinflußt, deren bisher noch nicht Erwähnung geschehen ist. Hier kann nur gesagt werden, daß die Neigung der Mondbahn zu der von Darwin so genannten „Sonderebene“ (d. h. die Ebene, die an Stelle der unveränderlichen tritt, wenn der Einfluß der Sonne in Rechnung gezogen wird) zuerst zunahm, bis sie ein Maximum erreichte, dann anfing abzunehmen und immer noch abnimmt. Die Abnahme wird dauern, bis beide Weltkörper sich wie ein starres System um ihren gemeinsamen Schwerpunkt drehen.

589. Wirkung der Flutreibung auf die Exzentrizität der Mondbahn. Von weiteren Wirkungen der Flutreibung sei hier noch eine erwähnt: die durch sie erzeugte Änderung der Exzentrizität der Mondbahn. Wenn sich der Mond um die Erde dreht, ändert sich seine Entfernung von ihr und folglich auch die Stärke der durch ihn erzeugten Gezeiten. Im Perigäum, wenn der Mond der Erde am nächsten ist, ist die Gezeit am stärksten, und am schwächsten im Apogäum, wenn er ihr am fernsten ist. Infolgedessen stellt sich die Wirkung der Flutreibung dar als aus einem konstanten Mittelwerte und einem periodischen Teile bestehend, der im Perigäum zu dem konstanten Teile zugezählt und im Apogäum von ihm abgezogen wird. Demnach wirkt auf den Mond, wenn er ins Perigäum hineingeht und aus ihm herausschreitet, eine tangentiale Kraft, die seine Entfernung vergrößert und seine Winkelgeschwindigkeit vermindert, und zwar beides über den Mittelwert hinaus. Wenn der Mond ins Apogäum kommt, ist er daher weiter entfernt, als er sein würde, wenn die mittlere Wirkung erzeugt worden wäre; also ist die apogäische Entfernung vergrößert worden. In derselben Weise wirkt auf den Mond, während er sich im Apogäum befindet, eine tangentiale Kraft, kleiner als die mittlere, der zufolge er ins Perigäum in kleineren Erdabstand herumgeschleudert wird, als der Fall wäre, wenn im Apogäum die mittlere Kraft gewirkt hätte. Insoweit also verringert sich der perigäische Abstand und vergrößert sich der apogäische, d. h. die Exzentrizität nimmt zu.

Man muß aber anderseits bedenken, daß sich der Mond im Perigäum schneller, im Apogäum langsamer als im Durchschnitt bewegt. Ist die Revolutionsperiode des Mondes der Rotationsperiode der Erde gleich, so wird der Mond im Perigäum das irdische Flutsphäroid überholen und im Apogäum dahinter zurückbleiben. Die tangentiale Kraft auf den Mond aber ist gegen die oder mit der Bahndrehung des Mondes, je nachdem der Mond hinter dem Flutsphäroid zurück oder ihm voraus ist. Folglich ist der Mond, wenn er nach der Verzögerung

im Apogäum herumkommt, hinter dem Flutsphäroid zurück, und somit vergrößert sich sein Abstand — d. h. der perigäische Abstand —; auf dieselbe Weise verringert sich der apogäische Abstand, und so nimmt die Exzentrizität ab. Es scheint demnach eine Revolutionsperiode zu geben, für welche die Exzentrizität konstant bleibt.

Es gibt noch andere Ursachen, die die Exzentrizität beeinflussen; es muß aber in betreff ihrer, wie für näheres Eingehen auf die hier nur kurz skizzierten Fragen von neuem auf die schon mehrfach genannten Arbeiten von Darwin verwiesen werden.

590. Betrag der Flutverzögerung der Erdrotation. Was den Betrag der Verzögerung der Erdrotation durch die Flut betrifft, so herrscht darüber noch große Unsicherheit. Die Astronomen sind nicht einig darüber, wieviel die Beschleunigung des Mondes infolge der hundertjährigen Änderungen in der Exzentrizität der Erdbahn ausmacht. Nach J. C. Adams beträgt die Beschleunigung der Bewegung in mittlerer Länge, wie sie sich aus der Berechnung der Zeiten ergibt, zu denen gewisse Verfinsterungen eingetreten sein müssen, deren Beobachtung an bestimmten Orten verzeichnet ist: 11,4 Winkelsekunden pro Jahrhundert, so daß in 100 Jahren die mittlere Länge um 5,7 Sekunden größer ist, als sie ohne diese Beschleunigung gewesen wäre. Dieses Voraneilen ist von Delaunay durch Hinzufügung kleiner Glieder auf 6,1 Winkelsekunden vergrößert worden.

Nun ist aber der beobachtete Wert des Voraneilens ungefähr 12″, also ungefähr das Doppelte des von Adams berechneten theoretischen Wertes. Es wurde zuerst von Delaunay darauf hingewiesen, daß an diesem Unterschiede die Verzögerung der Erdrotation schuld sein könnte; und wenn man dieser Ursache 6″ zuschreibt, so würde nach einer von Adams an Thomson und Tait als Autoren der Theoretischen Physik mitgeteilten Schätzung die Erde in einem Jahrhundert um ungefähr 22 Sekunden hinter einem fehlerlosen Zeitmesser zurückbleiben, der am Anfange des Jahrhunderts auf Einhaltung mittlerer Sonnenzeit genau gerichtet worden wäre. Adams war indessen der Meinung, daß der genaue Betrag der Verzögerung durch die Gezeiten ganz ungewiß wäre (s. Thomson u. Tait, 2. Teil).

Fünfzehntes Kapitel.

Elastizität.

---

591. Einführungsbegriffe und Definitionen. Homogene Deformationen. Der Begriff der Elastizität ist im neunten Kapitel definiert worden, auch sind daselbst Erklärungen in betreff elastischer Kräfte und ihrer Unterscheidung von den aus der Zähigkeit herrührenden Kräften, sowie Definitionen solcher Ausdrücke wie Druck, Deformation, Isotropie, Homogenität u. s. w. gegeben worden, deren Wiederholung hier unnötig wäre. Es soll hier nur eine Skizzierung der Elastizität isotroper Körper gegeben werden, mit deren Hilfe man experimentelle Untersuchungen des Gegenstandes verfolgen kann, während die ausführliche theoretische Darlegung in den Hauptwerken über die mathematische Theorie der Elastizität gesucht werden muß, von denen hier folgende besonders erwähnt seien:

Lamé, Leçons s. l. théorie de l'Élasticité etc. Paris 1852. 2. Aufl., 1866.
Clebsch, Theorie d. Elastizität fester Körper. Leipzig 1862.
Barré de St. Venant, Verschiedene Mémoires.
Fr. Neumann, Vorl. ü. d. Theorie d. Elastizität. Leipzig 1885.
Lord Kelvin, Elasticity. Encycl. Brit. 9. Aufl., Bd. VII. Sonderabdruck: Elasticity and Heat. Edinb. 1880.
A. E. H. Love, Math. Th. of Elasticity.
Todhunter and Pearson, History of math. Th. of Elasticity.
Kirchhoff, Vorl. über Math. Physik. Bd. I.

Von einem elastischen Körper sagt man, daß er eine homogene Deformation erleide, wenn seine Teilchen (nicht die konstituierenden Molekeln, sondern die im Besitz der charakteristischen Eigenschaften des Körpers gedachten kleinsten Elemente) derart verrückt sind, daß durch solche Teilchen in ihnen markierte parallele gerade Linien auch parallele gerade Linien bleiben, und daß alle Entfernungen zwischen Teilchen in ihm, parallel zu irgend einer gewählten Richtung genommen, sich im selben Verhältnis ändern. Dieses Verhältnis nun ist im allgemeinen für verschiedene Richtungen verschieden, ist aber, wenn es für zwei nicht parallele Richtungen, etwa für zwei Richtungen senkrecht zueinander, gegeben ist, natürlich für alle Richtungen parallel zu einer sie ent-

haltenden Ebene gegeben, und wenn es für drei Richtungen, deren keine zwei parallel sind, etwa für drei aufeinander senkrechte Richtungen, gegeben ist, für alle Richtungen im Raume gegeben.

Da parallele Linien parallele Linien bleiben, so bleiben parallele Ebenen auch parallele Ebenen. Ein Kreis wird zur Ellipse, und zwei aufeinander senkrechte Durchmesser eines Kreises werden zu denjenigen Durchmessern der Ellipse deformiert, deren jeder mit der am Ende des anderen Durchmessers an die Ellipse gezogenen Tangente parallel ist; d. h. diese Durchmesser des Kreises werden zu konjugierten Durchmessern der Ellipse deformiert.

Ferner ist einleuchtend, daß die homogene Deformation eine Kugel in ein Ellipsoid verwandelt, und daß beliebige drei aufeinander senkrechte Kugeldurchmesser in drei konjugierte Ellipsoiddurchmesser deformiert werden. Im allgemeinen werden die Winkel zwischen geraden Linien im Körper durch die Deformation verändert, und es wird aus einem rechtwinkligen System gerader Linien ein schiefes System; aber es gibt, wie aus § 593 ersichtlich werden wird, immer im undeformierten Körper drei aufeinander senkrechte gerade Linien, die auch nach der Deformation aufeinander senkrecht bleiben, und die daher den Hauptaxen desjenigen Ellipsoids parallel sind, in welches die Deformation einen sphärischen Teil des Körpers verwandelt. Dieses Ellipsoid heißt Deformationsellipsoid. Ein Ellipsoid bleibt natürlich ein Ellipsoid, den speziellen Fall, daß es in eine Kugel verwandelt wird, eingeschlossen.

Da der Deformationszustand eines Körpers durch Verrückung des Körpers als Ganzes oder durch seine Drehung um eine Axe nicht berührt wird, wird er auch durch die Annahme, daß ein Punkt O des Körpers fest bleibt, nicht berührt werden. Es mögen also die Lagen der Körperteilchen auf rechtwinklige Axen vom festen Punkte O aus als Anfangspunkt bezogen werden. Wenn dann x, y, z die ursprünglichen Koordinaten des Teilchens, x', y', z' seine Koordinaten nach erfolgter Deformation darstellen und die Deformation homogen ist, so müssen x', y', z' lineare Funktionen von x, y, z nach dem Schema

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

sein. Denn diese Gleichungen erfüllen, wie man nach den elementarsten Theoremen der Geometrie leicht einsieht, alle Bedingungen der homogenen Deformation, während keine andere Form von Beziehungen dies tun würde. Z. B. ist die lineare Beziehung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die Gleichung einer in dem Körper gezogenen Ebene, und es erhellt aus Gl. (1), daß eine lineare Beziehung von derselben Form in x', y', z' auch durch die Koordinaten der deformierten Lage der Teilchen

befriedigt wird. Folglich liegen die Teilchen weiter in einer Ebene, und offenbar liegen auch Teilchen, die vor der Deformation in parallelen Ebenen liegen, auch nach der Deformation in parallelen Ebenen, und somit bleiben parallele Linien parallele Linien.

Löst man die Gl. (1) nach x, y, z auf, so erhält man drei Gleichungen von der Form

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' \\ y &= \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z' \\ z &= \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Koeffizienten α_1, β_1 u. s. w. werden entweder nach den von der Theorie der einfachen Gleichungen gelieferten Regeln gebildet oder können direkt für jeden gegebenen Fall bestimmt werden.

592. Deformationsellipsoid. Wir wollen jetzt eine um O als Mittelpunkt in dem undeformierten Körper geschlagene Kugel betrachten. Ihre Gleichung ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Die durch die Koordinaten x', y', z' irgend eines Oberflächenpunktes der Kugel nach der Deformation erfüllte Bedingung ist nach Gl. (2) durch die Gleichung

$$(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z')^2 + \cdots = r^2 \quad \ldots \quad (3)$$

ausgedrückt, welches die Gleichung eines Ellipsoids, und zwar tatsächlich des Deformationsellipsoids ist. Sie kann in der Form

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Dy'z' + 2Ez'x' + 2Fx'y' = r^2. \quad . \quad (4)$$

geschrieben werden, wenn

$$A = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \ldots, \; D = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 \ldots,$$

ist, wo die ... mit entsprechenden Werten für B, C, E, F auszufüllen sind.

593. Hauptaxen des Deformationsellipsoids. Um die Axen dieses Ellipsoids zu finden, muß man beachten, daß die Richtungskosinus einer Normalen mit

$$Ax' + Fy' + Ez', \; Fx' + By' + Dz', \; Ex' + Dy' + Cz'$$

proportional sind und daß die Richtungskosinus eines Radiusvektors es mit x', y', z' sind. Folglich sind, wenn die Normale in einem Oberflächenpunkt mit einem nach diesem Punkte gezogenen Radiusvektor zusammenfällt, die Richtungskosinus der Normale proportional mit x', y', z', das ist z. B.

$$\frac{Ax' + Fy' + Ez'}{x'} = \frac{Fx' + By' + Dz'}{y'} = \frac{Ex' + Dy' + Cz'}{z'} = k.$$

Folglich ist

$$\left.\begin{aligned} (A-k)x' + Fy' + Ez' &= 0 \\ Fx' + (B-k)y' + Dz' &= 0 \\ Ex' + Dy' + (C-k)z' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots (5)$$

was durch Elimination von x', y', z' eine kubische Gleichung für die Bestimmung von k (siehe § 168) ergibt. Diese Gleichung hat, wie leicht gezeigt werden kann, drei reelle Wurzeln, und es gibt daher drei aufeinander senkrechte Richtungen normal zur Oberfläche; die Winkel zwischen ihnen werden durch die Deformation nicht verändert. Nach Gl. (4) ist, da

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

ist,

$$r'^2 - r^2 = (1-A)x'^2 + (1-B)y'^2 + (1-C)z'^2 - 2Dy'z' - 2Ez'x' - 2Fx'y'.$$

Wenn man dann der rechten Seite dieser Gleichung einen konstanten Wert K^2 erteilt, sieht man, daß für alle Radienvektoren der quadratischen Oberfläche

$$\left.\begin{aligned} (1-A)x'^2 + (1-B)y'^2 + (1-C)z'^2 & \\ - 2Dy'z' - 2Ez'x' - 2Fx'y' &= K^2 \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot (6)$$

der Überschuß von r'^2 über r^2 gleich groß ist. Anders geschrieben, wenn

$$\frac{x'}{r'} = l', \quad \frac{y'}{r'} = m', \quad \frac{z'}{r'} = n'$$

gesetzt wird:

$$(1-A)l'^2 + (1-B)m'^2 + (1-C)n'^2 - 2Dm'n' - 2En'l' - 2Fl'm' = \frac{K^2}{r'^2}.$$

Die Größe auf der linken Seite ist

$$\frac{r'^2 - r^2}{r'^2}$$

und die Gleichung besagt, daß von Radius zu Radius der durch Gl. (6) definierten quadratischen Oberfläche sich dieses Verhältnis umgekehrt wie das Quadrat des Radiusvektors ändert.

594. Theorie kleiner Deformationen. Diese Erörterung genügt vielleicht, um die Art der Behandlung endlicher Deformation anzugeben. Es sollen jetzt die Verrückungen relativ zum Punkte O als klein angenommen und nur die veränderten Lagen von Punkten nahe bei O betrachtet werden. Dies wird für die meisten physikalischen Zwecke genügen, auf welche die Theorie angewandt wird. Es mögen u, v, w die Verrückungen eines nahe bei O gelegenen Punktes P bezeichnen, dessen Koordinaten, auf feste Axen durch O bezogen, ξ, η, ζ sind. Die Verrückungen u, v, w nehmen wir als endliche stetige Funktionen von ξ, η, ζ an. Dann ist, da u, v, w in O null sind:

$$\left.\begin{aligned} u &= \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z} \\ v &= \xi\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\frac{dv}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v}{\partial z} \\ w &= \xi\frac{\partial w}{\partial x} + \eta\frac{\partial w}{\partial y} + \zeta\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Die Ausdrücke $\partial u/\partial x$ u. s. w. bedeuten die Werte dieser Größen für den Punkt O und werden als unveränderlich angesehen.

Daher ist die Deformation, die nur der einen Bedingung, klein zu sein, unterworfen wurde, homogen bis zu dem betrachteten Näherungsgrade.

Wenn jetzt ξ', η', ζ' die Koordinaten von P nach der Verrückung bezeichnen, so ist

$$\xi' = \xi + u, \quad \eta' = \eta + v, \quad \zeta' = \zeta + w,$$

und die letzten Gleichungen können in der Form

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \xi\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z} \\ \eta' &= \xi\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \zeta\frac{\partial v}{\partial z} \\ \zeta' &= \xi\frac{\partial w}{\partial x} + \eta\frac{\partial w}{\partial y} + \zeta\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

geschrieben werden.

Da aber ξ, η, ζ und $\partial u/\partial x$ u. s. w. alle klein sind, so sind $\xi\partial u/\partial x$, $\eta\partial u/\partial y, \ldots$ bis auf kleine Größen zweiter Ordnung beziehungsweise gleich $\xi'\partial u/\partial x$ u. s. w., so daß man schreiben kann

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi'\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \eta'\frac{\partial u}{\partial y} - \zeta'\frac{\partial u}{\partial z} \\ \eta &= -\xi'\frac{\partial v}{\partial x} + \eta'\left(1 - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \zeta'\frac{\partial v}{\partial z} \\ \zeta &= -\xi'\frac{\partial w}{\partial x} - \eta'\frac{\partial w}{\partial y} + \zeta'\left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (9)$$

595. Einheitselongation einer Linie oder lineare Dilatation. Elongationsfläche. Wenn $OP = \varrho$ und $OP' = \varrho' = \varrho + \delta\varrho$ gesetzt wird, so ist

$$\varrho\delta\varrho = \xi\delta\xi + \eta\delta\eta + \zeta\delta\zeta;$$

und wenn l, m, n die Richtungskosinus von OP sind, so daß

$$l = \frac{\xi}{\varrho}, \; m = \frac{\eta}{\varrho}, \; n = \frac{\zeta}{\varrho} \quad \ldots \ldots \quad (9a)$$

ist, so ist

$$\frac{\delta\varrho}{\varrho} = l\frac{\delta\xi}{\varrho} + m\frac{\delta\eta}{\varrho} + n\frac{\delta\zeta}{\varrho}.$$

Nun ist aber $\delta\xi = u$, $\delta\eta = v$, $\delta\zeta = w$; nach Gl. (7) und (9a) wird also

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta\varrho}{\varrho} &= l\left(l\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}\right) + m\left(l\frac{\partial v}{\partial x} + m\frac{\partial v}{\partial y} + n\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ &\qquad + n\left(l\frac{\partial w}{\partial x} + m\frac{\partial w}{\partial y} + n\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &= l^2\frac{\partial u}{\partial x} + m^2\frac{\partial v}{\partial y} + n^2\frac{\partial w}{\partial z} \\ &\quad + mn\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + nl\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + lm\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}\right| \quad (10)$$

Dies wird häufig in der Form

$$\frac{\delta\varrho}{\varrho} = el^2 + fm^2 + gn^2 + 2s_1mn + 2s_2nl + 2s_3lm \quad (10a)$$

geschrieben, wo $e, f, g, 2s_1, 2s_2, 2s_3$ die Werte der Koeffizienten von l^2, m^2 u. s. w. in dem vorhergehenden Ausdruck sind, also:

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{\partial u}{\partial x}, & f &= \frac{\partial v}{\partial y}, & g &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ 2s_1 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & 2s_2 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & 2s_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right| \quad (10b)$$

Die Größe $\delta\varrho/\varrho$ ist die Verlängerung der Linie OP in Bruchteilen ihrer ursprünglichen Länge. Sie wird in Deutschland lineare Dilatation, in England aber gewöhnlich Elongation genannt; wir wollen hier den ersteren Ausdruck benutzen. Wenn der Größe $\varrho\delta\varrho$ ein konstanter Wert k^2 erteilt wird, so hat man nach Gl. (10a), wenn man mit ϱ^2 multipliziert,

$$e\xi^2 + f\eta^2 + g\zeta^2 + 2s_1\eta\zeta + 2s_2\zeta\xi + 2s_3\xi\eta = k^2 \quad . \; . \; (11)$$

also die Gleichung einer quadratischen Oberfläche. Für alle Radienvektoren dieser Oberfläche ist $\varrho\delta\varrho$ eine Konstante k^2, und deshalb ist $\delta\varrho/\varrho$ umgekehrt proportional mit ϱ^2. Diese Fläche heißt Dilatationsfläche.

596. Kegel ohne Elongation und Kegel mit konstanter Dilatation. Wenn $\delta\varrho$ für eine bestimmte Reihe von Richtungen negativ ist (wenn z. B. die Substanz längs allen Linien in einer Richtung ausgedehnt und längs allen Linien senkrecht zur ersten komprimiert wird), so wird die konjugierte Fläche

$$e\xi^2 + f\eta^2 + g\zeta^2 + 2s_1\eta\zeta + 2s_2\zeta\xi + 2s_3\xi\eta = -k^2 \quad (12)$$

die (negative) Elongation für diese Richtungen darstellen. Die beiden Regionen sind getrennt durch den Kegel

$$e\xi^2 + f\eta^2 + g\zeta^2 + 2s_1\eta\zeta + 2s_2\zeta\xi + 2s_3\xi\eta = 0 \quad . \; . \; (13)$$

der diese beiden Flächen in einer unendlichen Entfernung von O berührt. Dieser Kegel heißt Kegel ohne Dilatation.

Die Richtungskosinus derjenigen Radienvektoren, für welche die Dilatation einen gegebenen Wert

$$\frac{\delta \varrho}{\varrho} = \varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13a)$$

hat, befriedigen die Gleichung

$$e l^2 + f m^2 + g n^2 + 2 s_1 m n + 2 s_2 n l + 2 s_3 l m = \varepsilon$$

oder, da $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ist,

$$(e - \varepsilon) l^2 + (f - \varepsilon) m^2 + (g - \varepsilon) n^2 + 2 s_1 m n + 2 s_2 n l + 2 s_3 l m = 0.$$

Diese Radienvektoren sind daher Generatoren des Kegels

$$\left.\begin{aligned} (e - \varepsilon)\xi^2 + (f - \varepsilon)\eta^2 + (g - \varepsilon)\zeta^2 \\ + 2 s_1 \eta\zeta + 2 s_2 \zeta\xi + 2 s_3 \xi\eta = 0 \end{aligned}\right\} \cdot \quad (14)$$

597. Änderung der Linienrichtung. Linien ohne Drehung. Werden die Richtungskosinus einer Linie von l, m, n in $l + \delta l$, $m + \delta m$, $n + \delta n$ verwandelt, so hat sich die Linie um einen kleinen Winkel $\delta\theta$ gedreht, der durch den Ausdruck

$$\delta\theta = \sqrt{(\delta l)^2 + (\delta m)^2 + (\delta n)^2} \quad \ldots \quad (15)$$

gegeben ist. Denn nach den Regeln der analytischen Geometrie ist ganz allgemein, d. h. auch für endliche Werte von $\delta\theta$, δl, δm, δn:

$$\cos(\delta\theta) = l(l + \delta l) + m(m + \delta m) + n(n + \delta n);$$

nun ist aber

$$1 - \cos(\delta\theta) = 2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\delta\theta\right),$$

also für kleine Winkel $\delta\theta$:

$$1 - \cos(\delta\theta) = \frac{1}{2}(\delta\theta)^2.$$

Man erhält daher der Reihe nach:

$$\begin{aligned} (\delta\theta)^2 &= 2[1 - l(l + \delta l) - m(m + \delta m) - n(n + \delta n)] \\ &= -2(l\delta l + m\delta m + n\delta n) \\ &= l^2 + m^2 + n^2 - [(l + \delta l)^2 + (m + \delta m)^2 + (n + \delta n)^2] \\ &\qquad + \delta l^2 + \delta m^2 + \delta n^2; \end{aligned}$$

und schließlich, da sowohl

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

als auch

$$(l + \delta l)^2 + (m + \delta m)^2 + (n + \delta n)^2 = 1$$

ist:

$$(\delta\theta)^2 = \delta l^2 + \delta m^2 + \delta n^2.$$

Nun ist, da $l = \xi/\varrho \ldots$, $\delta\xi = u \ldots$ ist, sowie mit Rücksicht auf Gl. (7) und Gl. (13a):

$$\delta l = \delta\left(\frac{\xi}{\varrho}\right) = \frac{\delta\xi}{\varrho} - \xi\frac{\delta\varrho}{\varrho^2} = l\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z} - \varepsilon l$$

und ebenso für δm und δn. Folglich ist

$$\left.\begin{aligned}(\delta\theta)^2 = &\left[l\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon\right) + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}\right]^2 \\ + &\left[l\frac{\partial v}{\partial x} + m\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon\right) + n\frac{\partial v}{\partial z}\right]^2 \\ + &\left[l\frac{\partial w}{\partial x} + m\frac{\partial w}{\partial y} + n\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon\right)\right]^2\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Soll insbesondere $\delta\theta$ verschwinden, so muß jedes von den drei Gliedern der rechten Seite dieser Gleichung verschwinden. Folglich ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}l\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon\right) + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \\ l\frac{\partial v}{\partial x} + m\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon\right) + n\frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\ l\frac{\partial w}{\partial x} + m\frac{\partial w}{\partial y} + n\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon\right) &= 0\end{aligned}\right\}. \quad (17)$$

was zu der Determinante

$$\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon\end{vmatrix} = 0\right\} \quad . \; . \; . \quad (18)$$

d. h. zu einer kubischen Gleichung für die lineare Dilatation ε führt. Diese kubische Gleichung muß natürlich mindestens eine reelle Wurzel haben. Die beiden anderen Wurzeln können entweder beide imaginär oder beide reell sein. Jede Wurzel liefert ein zugehöriges Wertsystem der l, m, n.

Eine Linie, die in ihrer Richtung ungeändert bleibt, heißt eine Linie ohne Drehung. Es gibt immer mindestens eine solche Linie.

598. Superposition kleiner Veränderungen. Wenn ξ, η, ζ der Reihe nach zwei Änderungen u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 unterworfen werden, so ist leicht einzusehen, daß unter Vernachlässigung von Größen, die von höherer Ordnung unendlich klein sind als die hier noch berücksichtigten, die gesamte resultierende Änderung $u_1 + u_2$, $v_1 + v_2$, $w_1 + w_2$ ist, und daß sie von der Reihenfolge, in der die Änderungen vorgenommen werden, unabhängig ist. Der Leser kann sich hiervon leicht überzeugen.

Wir gehen dazu über, eine gewöhnliche kleine Deformation in eine reine Deformation und eine Rotation aufzulösen.

599. Auflösung einer gewöhnlichen kleinen Deformation in eine reine Deformation und eine Drehung.

Einer allgemein üblichen Bezeichnung entsprechend führen wir die Zeichen $2\theta_1$, $2\theta_2$, $2\theta_3$ mit folgender Bedeutung ein:

$$2\theta_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},\ 2\theta_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},\ 2\theta_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y};$$

nach den Ausführungen des § 361 ist dann die Bedeutung von θ_1, θ_2, θ_3 einleuchtend: dort waren u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten, θ_1, θ_2, θ_3 die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit (Wirbelgeschwindigkeit); hier sind u, v, w die Verrückungskomponenten, also θ_1, θ_2, θ_3 entsprechend die Drehungskomponenten.

Mit Rücksicht auf die oben festgesetzten Werte von s_1, s_2, s_3 wird nun:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = s_1 + \theta_1,\quad \frac{\partial u}{\partial z} = s_2 + \theta_2,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = s_3 + \theta_3,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = s_1 - \theta_1,\quad \frac{\partial w}{\partial x} = s_2 - \theta_2,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = s_3 - \theta_3.$$

Also ergibt sich nach Gl. (7):

$$\left.\begin{aligned} u &= (e\xi + s_3\eta + s_2\zeta) + (\theta_2\zeta - \theta_3\eta) \\ v &= (s_3\xi + f\eta + s_1\zeta) + (\theta_3\xi - \theta_1\zeta) \\ w &= (s_2\xi + s_1\eta + g\zeta) + (\theta_1\eta - \theta_2\xi) \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (19)$$

Hiernach setzen sich die u, v, w aus je zwei Teilen zusammen, einem von den e, f, g, s_1, s_2, s_3 abhängigen und einem von den θ_1, θ_2, θ_3 abhängigen. Der letztere aber stellt offenbar diejenige Verrückung dar, welche eine Folge einer für alle mit O benachbarten Teilchen gleichen Winkeldrehung ist. Da hierbei eine Änderung der relativen Lage der Teilchen nicht stattfindet, kommt er für unsere elastischen Fragen nicht in Betracht, und es bleibt nur der erste Teil übrig. Diese ersten Teile der Ausdrücke in Gl. (19) heißen demgemäß die Komponenten der reinen Deformation. Diese letzteren sollen mit u_1, v_1, w_1, die Änderungen durch die Rotation mit u_2, v_2, w_2 bezeichnet werden. Somit ist

$$u = u_1 + u_2,\quad v = v_1 + v_2,\quad w = w_1 + w_2,$$

und diese verschiedenen Teile können in beliebiger Reihenfolge in Anwendung kommen, ohne das Ergebnis zu ändern; für die Komponenten der reinen Deformation aber hat man:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= e\xi + s_3\eta + s_2\zeta \\ v_1 &= s_3\xi + f\eta + s_1\zeta \\ w_1 &= s_2\xi + s_1\eta + g\zeta \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (19a)$$

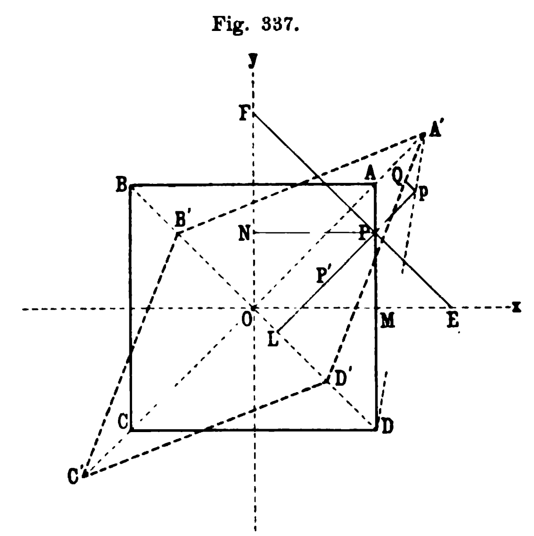
600. Entstehung der reinen Deformation aus drei Dilatationen und drei Scherungen. Bedeutung der Scherungsdefor-

mation. Es ist wichtig, eine reine Deformation als aus sechs Teildeformationen, nach dem folgenden Schema entstanden, zu betrachten (die Indices 1 bis 6 haben mit den obigen 1 und 2 natürlich nichts zu tun):

1. $u_1 = e\xi,\ v_1 = 0,\ w_1 = 0,$ 4. $u_4 = 0,\ v_4 = s_1\zeta,\ w_4 = s_1\eta,$
2. $u_2 = 0,\ v_2 = f\eta,\ w_2 = 0,$ 5. $u_5 = s_2\zeta,\ v_5 = 0,\ w_5 = s_2\xi.$
3. $u_3 = 0,\ v_3 = 0,\ w_3 = g\zeta,$ 6. $u_6 = s_3\eta,\ v_6 = s_3\xi,\ w_6 = 0.$

Die drei ersten partiellen Deformationen stellen einfache lineare Dilatationen des Körpers in den Richtungen der x, y, z-Axe dar. Die Dilatation im ersten Fall ist e, im zweiten f, im dritten g. Wir nennen deshalb die Deformationen einfache Dilatationen von den Beträgen e, f, g. Sie können natürlich positiv oder negativ sein und können im letzteren Falle entweder als „negative Dilatationen" oder als „Kontraktionen" bezeichnet werden.

Fig. 337.



Infolge des Wachstums von ξ, η, ζ ändert sich das Volumen des rechtwinkligen Elementes, das die Kanten ξ, η, ζ hat, von $\xi\eta\zeta$ auf $\xi(1+e)\eta(1+f)\zeta(1+g)$, d. h. es wächst, wenn man Produkte der kleinen Größen e, f, g vernachlässigt, pro Einheit seines früheren Betrages um $e + f + g$.

Denken wir uns den Körper von einer Ebene senkrecht zu Oz durchschnitten, und zwar durch den Punkt P hindurch (in dem die Deformation betrachtet wird), wie es Fig. 337 darstellt. OM, MP stellen ξ, η, die Koordinaten von P dar. Durch P hindurch zeichnen wir das Quadrat $ABCD$, dessen Seiten mit der x- und y-Seite parallel sind, und dessen Mittelpunkt in O liegt. Dasselbe kann als Durchschnitt eines kubischen Teils des Körpers betrachtet werden, dessen Mittelpunkt in dem festen Punkte liegt, der als Anfangspunkt der Koordinaten genommen wird, also im allgemeinen, da P auch eine z-Koordinate hat, nicht in der Papierebene. Indessen können wir P als in der x, y-Ebene gelegen ansehen, so daß der angenommene Durchschnittsmittelpunkt O wirklich der Anfangspunkt ist, ohne daß der Fall etwas von seiner allgemeinen Gültigkeit einbüßt.

Nun ziehen wir durch P eine unter 45° geneigte Linie, welche

die Axen Ox, Oy in E und F trifft, so daß $OE = OF$ wird, und lösen die Verrückungskomponenten $s_3 \eta$, $s_3 \xi$ (also u_6, v_6) von P in neue Komponenten, die eine längs der Linie EF, die andere senkrecht zu ihr auf. Die erstere ergibt

$$s_3 \frac{\eta - \xi}{\sqrt{2}}$$

als Verrückung von P in der Richtung von E nach F. Die zweite Auflösung ergibt

$$s_3 \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}$$

als Verrückung von P parallel mit OA. Nun werde PL parallel mit AO derart gezogen, daß es OD in L trifft; dann sind offenbar die Längen von OL und LP:

$$OL = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}, \ LP = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}};$$

OL und LP stellen dann die gedachten Verrückungskomponenten von P dar: eine Verrückung $s_3 . OL$ in der Richtung von L nach O und eine andere $s_3 . LP$ von L nach P hin. So ist z. B., wenn P in der Diagonale OA liegt, die erstere Verrückung, wenn es auf der Diagonale OD liegt, die letztere gleich null. Die Einheitsverrückung ist, was hervorgehoben werden muß, in jedem Falle s_3.

Dasselbe Ergebnis würde für jede andere Lage von P, etwa P' herauskommen, wenn man dieselbe Konstruktion machte und in derselben Weise vorginge. Also erleidet der Körper um O herum infolge der betrachteten Verrückungen eine lineare Dilatation s_3 längs jeder Linie parallel mit OA und eine ebensolche Kontraktion längs jeder Linie parallel mit OD.

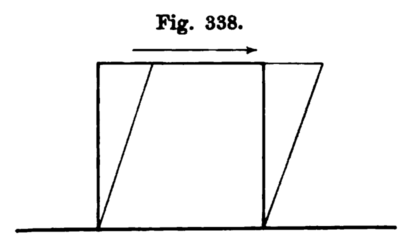
Ein räumlicher Teil des Körpers nimmt die in Fig. 337 durch den Rhombus $A'B'C'D'$ bezeichnete Gestalt an, wobei, um die Veränderung in der Zeichnung kräftig zur Geltung kommen zu lassen, die Wirkung als sehr beträchtlich angenommen ist. Der Punkt P ist durch die Verrückungen Pp, pQ von den durch diese Linien angegebenen Beträgen und Richtungen nach Q verschoben.

Die hier betrachtete Deformation wird Scherungsdeformation oder einfach Scherung genannt, und die Linien OA, OD heißen die Scherungsaxen.

Der numerische Betrag der Scherung wird als $2 s_3$ angenommen, was, wie man leicht einsehen kann, für eine kleine Deformation derjenige Betrag ist, um welchen der Winkel $B'A'D'$ nach der Deformation kleiner ist als $\pi/2$, oder um welchen der Winkel $C'D'A'$ alsdann größer ist als $\pi/2$. Man sieht leicht ein, daß bis zu dem hier durchgeführten Annäherungsgrade diese Deformation das Volumen des Körpers nicht ändert.

Ebenso kann man zeigen, daß die beiden anderen Deformationspaare (v_4, w_4) und (u_5, w_5) Scherungen in Ebenen senkrecht zur x-, und y-Axe sind, und daß ihre Axen längs den Linien liegen, welche die Winkel zwischen den in diesen Ebenen gelegenen Axen halbieren.

Fig. 338.



Es sei beiläufig bemerkt, daß man in einfacherer, aber freilich auch speziellerer Weise eine typische Scherung auch durch einen Würfel darstellen kann, dessen Basis fest (z. B. auf die Unterlage aufgekittet) ist, und auf dessen Deckfläche eine geeignete „scherende Kraft“ ausgeübt wird, so daß er sich in ein Rhomboeder verwandelt (Fig. 338), gerade wie der Würfel in Fig. 337. Der Unterschied ist, wie man sieht, der, daß hier nicht, wie oben, die Diagonalen, sondern die Horizontalflächen ungedreht bleiben; auch finden hier andere Kantenbeziehungen zwischen Würfel und Rhomboeder statt.

601. Analytische Bedingungen der reinen Deformation. Hauptaxen der Dilatationsfläche. Deformations-Invarianten. Wenn die Änderung eine reine Deformation, also $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ ist, so ist

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dies beweist, daß u, v, w die Differentialquotienten $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$ einer Funktion φ von x, y, z sind, eine Tatsache, von der wir alsbald Gebrauch machen werden. Die Komponenten der Verrückung reduzieren sich dann auf $e\xi + s_3\eta + s_2\zeta$ u. s. w., und die Gleichung der Dilatationsfläche lautet

$$e\xi^2 + f\eta^2 + g\zeta^2 + 2s_1\eta\zeta + 2s_2\zeta\xi + 2s_3\xi\eta = k^2 \quad . \; . \; (20)$$

Um die Richtungskosinus der Hauptaxen der Dilatationsfläche zu finden, hat man sich an die leicht abzuleitenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} el + s_3m + s_2n &= \varkappa l \\ s_3l + fm + s_1n &= \varkappa m \\ s_2l + s_1m + gn &= \varkappa n \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

zu halten, die für $\varkappa$ die kubische Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \varkappa^3 - (e+f+g)\varkappa^2 + (fg + ge + ef - s_1^2 - s_2^2 - s_3^2)\varkappa \\ - efg - 2s_1s_2s_3 + es_1^2 + fs_2^2 + gs_3^2 = 0 \end{aligned}\right\} \; (22)$$

liefern.

Die Wurzeln dieser kubischen Gleichung sind alle reell, und wenn man sie der Reihe nach nimmt und in Gl. (20) substituiert, so erhält man die für die Axen notwendigen drei Reihen von Werten von l, m und n.

Die durch Elimination von l, m, n aus Gl. (21) erhaltene Determinante

$$\begin{vmatrix} e - \varkappa, & s_3, & s_2 \\ s_3, & f - \varkappa, & s_1 \\ s_2, & s_1, & g - \varkappa \end{vmatrix}$$

heißt die Diskriminante von

$$(e - \varkappa)\xi^2 + (f - \varkappa)\eta^2 + (g - \varkappa)\zeta^2 + 2 s_1 \eta\zeta + 2 s_2 \zeta\xi + 2 s_3 \xi\eta,$$

weil ihr Verschwinden die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß der letztgenannte Ausdruck in zwei Faktoren von der Form $\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta$ zerlegt werden könne. Nun leuchtet es ein, daß, wenn dieser Ausdruck durch Transformation der Koordinaten ohne Änderung des Anfangspunktes geändert wird, er sich für denselben Wert von $\varkappa$ immer noch in Faktoren muß auflösen lassen, insofern nur $\varkappa\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$ ungeändert bleibt. Also bleiben die Werte von $\varkappa$ bei der Transformation, und somit auch die Koeffizienten in der kubischen Gl. (22) ungeändert. Wie also auch immer die Dilatationsfläche durch Beziehung auf neue rechtwinklige Axen vom selben Anfangspunkt transformiert werden mag, die Größen

1. $e + f + g$
2. $fg + ge + ef - s_1^2 - s_2^2 - s_3^2$
3. $efg + 2 s_1 s_2 s_3 - e s_1^2 - f s_2^2 - g s_3^2$

bleiben dabei ungeändert; sie heißen deshalb die Invarianten der Deformation.

602. Räumliche Dilatation. Wird die Gleichung der Dilatationsfläche auf ihre Hauptaxen als Koordinatenaxen transformiert, so fallen die drei doppelten Produkte in Gl. (20) aus Symmetriegründen fort, und die Gleichung der Fläche wird, wenn die neuen Koeffizienten der Quadrate mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ bezeichnet werden:

$$\varepsilon_1\xi^2 + \varepsilon_2\eta^2 + \varepsilon_3\zeta^2 = k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Die Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ heißen die linearen Hauptdilatationen; wenn sie alle positiv sind, ist die Fläche ein Ellipsoid. Nach der oben bezeichneten ersten invarianten Beziehung ist

$$e + f + g = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Man kann jetzt mit Beziehung auf dieselben Axen die Gleichung desjenigen Ortes finden, auf welchem die Teilchen liegen, die vor der Deformation auf einer Kugel mit dem Mittelpunkt O lagen. Vor der Deformation waren die Koordinaten eines Punktes beliebige ξ, η, ζ die nur die Beziehung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = k^2$$

erfüllten. Nach der Deformation sind die Koordinaten desselben Punktes

$$\xi' = (1 + \varepsilon_1)\xi, \quad \eta' = (1 + \varepsilon_2)\eta, \quad \zeta' = (1 + \varepsilon_3)\zeta$$

geworden, so daß, unter Weglassung der Striche, die Gleichung des Ortes

$$\frac{\xi^2}{(1+\varepsilon_1)^2} + \frac{\eta^2}{(1+\varepsilon_2)^2} + \frac{\zeta^2}{(1+\varepsilon_3)^2} = k^2 \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

ist. Dies stellt ein Ellipsoid dar, gleichviel, welches die Vorzeichen von ε_1, ε_2, ε_3 sein mögen. Das Verhältnis des Ellipsoidvolumens zum Kugelvolumen ist

$$(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$$

oder, wenn nur Größen berücksichtigt werden, die unendlich klein von der ersten Ordnung sind:

$$1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3.$$

Daher ist das Verhältnis des Volumenzuwachses zum ursprünglichen Volumen $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$; es wird **kubische oder räumliche Dilatation** genannt:

$$\Delta = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25a)$$

Gl. (24) zeigt, daß die räumliche Dilatation für jedes gewählte System rechtwinkeliger Axen die gleiche Ausdrucksform und den gleichen Wert hat.

603. Gleichung des Deformationsellipsoids. Der Betrag der räumlichen Dilatation und die Form des Deformationsellipsoids würden nicht beeinflußt werden, wenn man ihm die Drehung θ_1, θ_2, θ_3, erteilte, die nur das Ellipsoid als Ganzes drehen würde. Die Gleichung des auf die ursprünglichen Axen bezogenen Ellipsoids erhält man, indem man an Stelle von ξ, η, ζ

$$(1-e)\xi - s_3\eta - s_2\zeta, \quad -s_3\xi + (1-f)\eta - s_1\zeta, \\ -s_2\xi - s_1\eta + (1-g)\zeta$$

in die Gleichung der Kugel einsetzt; sie lautet

$$\left.\begin{array}{r}(1-2e)\xi^2 + (1-2f)\eta^2 + (1-2g)\zeta^2 \\ -4s_1\eta\zeta - 4s_2\zeta\xi - 4s_3\xi\eta = k^2\end{array}\right\} \quad (26)$$

604. Lineare Dilatation, dargestellt durch eine räumliche Dilatation und zwei Scherungen. Es ist nach Gl. (19) klar, daß die Verrückung bei einer reinen Deformation durch drei Dilatationsverrückungen in den Richtungen der Hauptaxen der Dilatationsfläche dargestellt werden kann. Es kann nun anderseits gezeigt werden, daß eine einfache Dilatation durch eine gleichförmige räumliche Dilatation und zwei Scherungen dargestellt werden kann. Betrachten wir zu diesem Zwecke das Schema

$$\frac{1}{3}(\varepsilon_1\xi, \quad \varepsilon_1\eta, \quad \varepsilon_1\zeta)$$

$$\frac{1}{3}(\varepsilon_1\xi, \quad -\varepsilon_1\eta, \quad 0)$$

$$\frac{1}{3}(\varepsilon_1\xi, \quad 0, \quad -\varepsilon_1\zeta).$$

Die erste Zeile enthält die Komponenten der von einer gleichförmigen räumlichen Dilatation ε herrührenden Verrückung, die beiden anderen Zeilen enthalten die von zwei Scherungen, jede vom Betrag $\frac{2}{3}\varepsilon_1$, eine in der $\xi\eta$-, die andere in der $\xi\zeta$-Ebene, herrührenden Verrückungen. Das Behauptete ist somit bewiesen.

605. Auflösung der reinen Deformation in eine räumliche Dilatation und drei Scherungen. In ganz derselben Weise kann die Verrückung $\varepsilon_2\eta$ als gleichwertig mit den aus einer gleichförmigen räumlichen Dilatation vom Betrage ε_2 und zwei Scherungen vom Betrage $\frac{2}{3}\varepsilon^2$ in den $\eta\zeta$- und $\xi\eta$-Ebenen herrührenden Verrückungen gezeigt werden; ebenso kann die Verrückung $\varepsilon_3\zeta$ behandelt werden.

Es sind daher die drei Verrückungen dem folgenden Verrückungsschema äquivalent:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}[(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\xi, \quad (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\eta, \quad (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\zeta]\\
&\frac{1}{3}[0, \quad (\varepsilon_2-\varepsilon_3)\eta, \quad -(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\zeta]\\
&\frac{1}{3}[(\varepsilon_1-\varepsilon_3)\xi, \quad 0, \quad -(\varepsilon_1-\varepsilon_3)\zeta]\\
&\frac{1}{3}[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\xi, \quad -(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\eta, \quad 0].
\end{aligned}$$

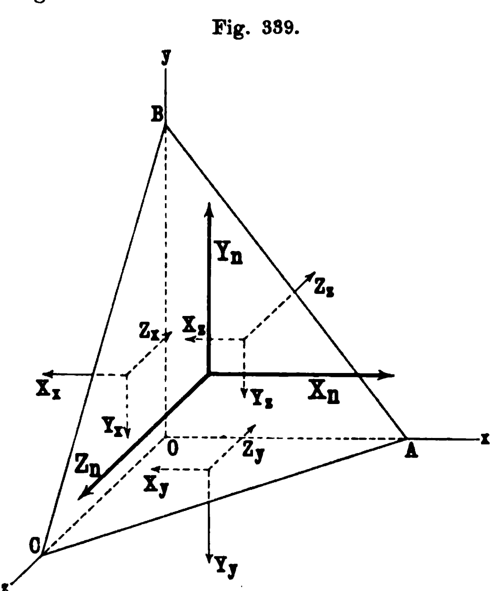
Auf diese Weise wird eine reine Deformation in eine gleichförmige räumliche Dilatation und drei Scherungen zerlegt.

Dabei ist nachdrücklich zu bemerken, daß zwei beliebige reine Deformationen, denen ein Körper nacheinander unterworfen wird, im allgemeinen durchaus nicht gerade eine reine Deformation erzeugen; sie tun das nur dann unter allen Umständen, wenn sie beide sehr klein sind. Man sieht dies ohne weiteres ein, wenn man zuerst, nach § 599, ξ, η, ζ durch reine Deformation in ξ', η', ζ' verwandelt und dann wiederum den Größen ξ', η', ζ' eine reine Deformation erteilt. Die für reine Deformation notwendige Beziehung der Koeffizienten wird alsdann von den endgültigen Verrückungskomponenten nicht erfüllt sein, außer in speziellen Fällen. Dagegen ist es immer möglich, dem Körper eine dritte reine Deformation zu erteilen, die, mit den beiden ersten kombiniert, eine reine Deformation ergibt. Man muß nur eine reine Deformation von allgemeinem Typus finden, die eine Rotation erzeugt, welche der durch die beiden vorhergehenden reinen Deformationen erzeugten gleich und entgegengesetzt ist.

Ebenso können drei reine Deformationen herausgefunden werden, die miteinander reine Rotation ohne jede Deformation der Substanz erzeugen werden.

606. Definition des elastischen Druckes. Kräfte auf ein Körperelement von der Form eines Tetraeders. Wenn ein elastischer Körper durch äußere Kräfte einer Deformation unterzogen wird, so nimmt er einen neuen, deformierten Gleichgewichtszustand an. Es ist das ein Beweis dafür, daß in ihm innere Spannungen wachgerufen werden, welche den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten. Man nennt diese inneren Kräfte die elastischen Kräfte oder die elastischen Spannungen oder den elastischen Druck. Dieser Druck ist in jedem Augenblicke durch die eben vorhandene Deformation bestimmt. Um für seine exakte Definition bestimmte Anhaltspunkte zu gewinnen, denken wir uns durch den festen Punkt O, relativ zu welchem die schon betrachteten Verrückungen erzeugt gedacht sind, drei Koordinatenebenen gezogen senkrecht zu den Ox-, Oy-, Oz-Axen, wie in Fig 339, und eine vierte Ebene, die diese Axen in den Punkten A, B, C schneidet, so daß die vier Ebenen ein Tetraeder von dem Körper abschneiden. Auf dieses Tetraeder sind infolge der Deformation Kräfte wirksam, die von der umgebenden Materie auf die vier Flächen ausgeübt werden, sowie es selbst auf diese Materie gleiche und entgegengesetzte Kräfte ausübt. Es ist also durch die Oberfläche hindurch ein Druck wirksam, dessen einer Aspekt eine Kraft auf das Tetraeder, dessen anderer Aspekt eine Kraft auf die umgebende Materie ist. Diese Drucke variieren natürlich von Flächenpunkt zu Flächenpunkt, werden aber jeder einen bestimmten Mittelwert pro Flächeneinheit der betreffenden Ebene haben. Wenn also F der Inhalt einer Fläche und PF die gesamte in der Richtung Ox von der den Körper umgebenden Materie auf die Fläche ausgeübte Kraft ist, so ist P der mittlere Wert des parallel mit Ox durch die Fläche pro Flächeneinheit wirksamen Druckes.

Fig. 339.



Es wirkt also durch jede Fläche hindurch ein Druck, welcher bestimmte mittlere Kraftkomponenten (sowohl von der Umgebung auf das Element, als vom Element auf die umgebende Materie) in den

Ox-, Oy- und Oz-Richtungen liefert. Für die Fläche senkrecht zu Ox sollen die ersteren (die letzteren sind entgegengesetzt gleich), jede pro Flächeneinheit gerechnet, mit X_x, Y_x, Z_x bezeichnet werden. Das Suffix besagt also, daß die betreffende Fläche senkrecht zur x-Axe ist, die X, Y, Z besagen die Richtungen der Komponenten. Entsprechende Bedeutung für die Fläche senkrecht zur y-Axe haben dann X_y, Y_y, Z_y, für die Fläche senkrecht zur z-Axe X_z, Y_z, Z_z. Diese neun Größen heißen die elastischen Druckkomponenten, ihre Resultanten sind P_x, P_y, P_z. Für die vierte Tetraederfläche und überhaupt für irgend eine Fläche, deren Normale die Richtung n hat, sind die Druckkomponenten X_n, Y_n, Z_n, und ihre Resultante ist P_n.

Nun werden im allgemeinen Kräfte über die Fläche verteilt sein, die, wenn das Element vollkommen starr wäre, durch drei im Schwerpunkte der Fläche angreifende Kraftkomponenten und drei Kräftepaare um die Koordinatenaxen äquilibriert werden würden. Wird das Element klein genommen, so schließen die Momente dieser Kräftepaare die Dimensionen der Fläche in einer um einen Grad höheren Potenz ein, als dies die Kräfte tun, und sind daher im Grenzwerte im Vergleich mit den letzteren zu vernachlässigen. Ferner wird, wenn das Element kleiner und kleiner gewählt wird, die mittlere Kraft pro Flächeneinheit, multipliziert mit der Fläche dF eines kleinen Oberflächenelementes, sich mehr und mehr der tatsächlich infolge des vorhandenen Druckes auf das Element dF ausgeübten Kraft nähern. Wenn man also das Element genügend klein wählt, vernachlässigt man die Kräftepaare und nimmt nur die Kräfte pro Flächeneinheit, die man so bebetrachtet, als hätten sie die Werte, denen sie sich nähern, wenn das Element unendlich verkleinert wird, während sein Scheitel bei O erhalten wird. Die Größen X_x, Y_x, Z_x u. s. w. haben offenbar nicht die Dimensionen von Kräften im Sinne von Massenkräften, sondern die von Druckkräften, d. h. von Kräften pro Flächeneinheit; ihre Dimensionsformel ist also:

$$\frac{K}{F} = [L^{-1} T^{-2} M].$$

Von den neun Druckkomponenten sind diejenigen drei, deren Indexbuchstabe mit dem Hauptbuchstaben übereinstimmt, nämlich X_x, Y_y, Z_z (vergl. Fig. 339) Normaldrucke, d. h. es sind zu den Flächen, auf die sie wirken, senkrechte Kräfte. Die anderen Kräfte X_y, X_z u. s. w. sind auf die drei Seitenflächen des Tetraeders wirksame Tangentialkräfte, d. h. ihre Richtung fällt in die betreffende Fläche selbst. Solcher Tangentialdrucke gibt es formal sechs, tatsächlich aber auch nur drei, denn es wird weiter unten gezeigt werden, daß $Z_y = Y_z$, $X_z = Z_x$, $Y_x = X_y$ ist. Schließlich ist noch der Richtungssinn der Druckkräfte zu beachten; derselbe ist durch die Koordinatenaxen vollständig bestimmt. In der Figur sind der größeren Deutlich-

keit zuliebe die Pfeile den Koordinaten entgegengesetzt gezeichnet, also für die Normaldrucke (die demnach hier Normalzüge sind) nach außen. Die Tangentialkräfte werden häufig auch Scherungskräfte genannt (vergl. Fig. 338 und die dazu gemachten Bemerkungen).

Es bleibt noch die Fläche ABC, die vierte schiefe Tetraederfläche, zu betrachten. Durch sie hindurch ist ein Druck P_n wirksam, der die Komponenten X_n, Y_n, Z_n in den in Fig. 339 angegebenen Richtungen ergibt.

Schließlich wird auf die Masse des Tetraeders noch das wirken, was man gewöhnlich als Massenkräfte bezeichnet, nämlich auf die Teilchen im Innern des Elementes wirksame Kräfte, die aus äußeren Triebkräften herstammen, z. B. von der Gravitation, elektrischer oder magnetischer Anziehung und Abstoßung u. s. w. herrührende Kräfte. Diese werden in Betracht gezogen werden müssen, wenn es zur Erörterung des Gleichgewichtes eines unter Druck stehenden Körpers kommt; vorläufig aber genügt es, einzusehen, daß für das kleiner und kleiner werdende Tetraeder solche Kräfte, da sie mit seiner Masse und folglich mit seinem Volumen in Relation stehen, schließlich im Vergleich mit den infolge des Druckes auf seine Oberflächen wirksamen Kräften verschwinden; denn sie werden klein von der dritten Ordnung, die elastischen nur von der zweiten Ordnung.

607. Gleichgewicht des Tetraeders. Es kann jetzt das Gleichgewicht des Tetraeders betrachtet werden. Wenn l, m, n die Richtungskosinus der nach außen gezogenen Normalen zur Fläche ABC sind und $\triangle$ der Inhalt dieser Fläche ist, so sind die Inhalte der Flächen senkrecht zu O_x, O_y, O_z gleich $l\triangle$, $m\triangle$, $n\triangle$; also ist für die Gesamtkraft, die in der Ox entgegengesetzten Richtung auf diese Flächen wirkt,

$$X_x l\triangle + X_y m\triangle + X_z n\triangle.$$

Dies wird durch die x-Komponente der auf ABC wirkenden Druckkraft $(X_n \,.\, \triangle)$ gerade aufgehoben; mit den anderen Kräften kann ebenso verfahren werden. So kommt man, wenn man die Druckkomponenten auf ABC (bisher X_n, Y_n, Z_n) jetzt mit F, G, H bezeichnet und den Faktor $\triangle$ beiderseits wegläßt, zu den drei Gleichgewichtsgleichungen

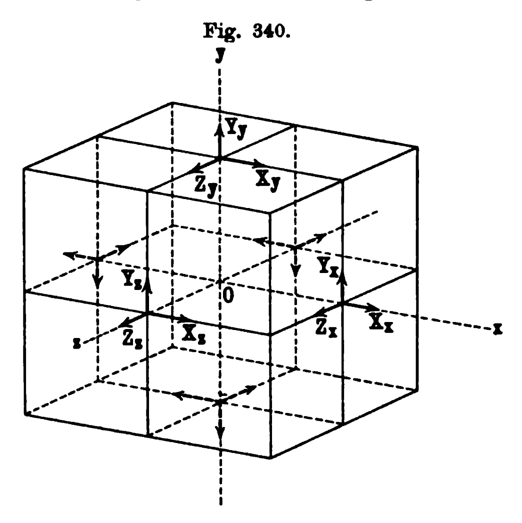
$$\left.\begin{aligned} F &= l X_x + m X_y + n X_z \\ G &= l Y_x + m Y_y + n Y_z \\ H &= l Z_x + m Z_y + n Z_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

Diese Gleichungen, dies ist zu beachten, ergeben die Druckkomponenten in jedem Punkte durch jede Ebene, deren Normale die Richtungskosinus l, m, n hat, ausgedrückt durch die Drucke auf Ebenen, die durch denselben Punkt senkrecht zu den Koordinatenaxen gelegt sind, d. h. auf seine Projektionen auf die Koordinatenebenen. Überdies

sind — was von großer Wichtigkeit ist, wenn das Dreieck ABC der Fig. 339 einen Teil der Oberfläche des Gesamtkörpers bildet — F, G, H diejenigen Kraftkomponenten, welche durch die auf diesen Teil der Grenze ausgeübten äußeren Druckkräfte aufgehoben werden müssen, damit Gleichgewicht herrsche. Also können auch die auf die Oberfläche wirksamen Kräfte durch die inneren Drucke auf jedes Oberflächenelement und damit durch die Drucke auf seine Projektionen auf die Koordinatenebenen ausgedrückt werden.

608. Gleichgewicht eines rechtwinkligen Parallelepipedons. Druckgleichungen. Wir kommen jetzt zur Betrachtung des Gleichgewichtes eines kleinen rechtwinkligen Parallelepipeds (Fig. 340) der Substanz, mit Flächenpaaren senkrecht zu den Koordinatenaxen, dem Mittelpunkte in O und Kantenlängen dx, dy, dz. Infolge der im Material herrschenden Drucke werden die auf die Oberflächen ausgeübten Drucke die durch die Pfeile bezeichneten sein. Die Richtungen dieser Drucke entsprechen, wie man sieht, der schon in Fig. 339 zum Ausdruck gebrachten Festsetzung. Die der rechten Fläche des Elementes erteilte Kraft längs Ox ist ein Zug in der positiven Richtung, die mit Ox parallele, auf die linke Fläche wirkende ist ebenfalls ein Zug nach außen, ist aber, als Kraft auf das Element betrachtet, von negativer Richtung.

Fig. 340.



Wenn X_x, Y_x, Z_x die numerischen Werte der Druckkomponenten auf eine Ebene durch O senkrecht zur x-Axe sind, so kann man, soweit es nicht schon nach der Figur an sich einleuchtend ist, durch ein Verfahren, das dem in § 355 angewandten entspricht, zeigen, daß die Druckkomponenten durch die rechten und linken Seitenflächen

$$X_x \pm \frac{1}{2}\frac{\partial X_x}{\partial x}dx, \quad Y_x \pm \frac{1}{2}\frac{\partial Y_x}{\partial x}dx, \quad Z_x \pm \frac{1}{2}\frac{\partial Z_x}{\partial x}dx$$

sind, wo das positive Vorzeichen für die rechte, das negative für die linke Seite gilt. Entsprechende Ausdrücke für die Druckkomponenten durch die beiden anderen Flächenpaare hindurch können berechnet werden.

Nun ist die vom Druck durch die rechte Seitenfläche senkrecht zu Ox herrührende x-Komponente der Kraft positiv und vom Betrage

$$\left(X_x + \frac{1}{2}\frac{\partial X_x}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz,$$

die durch die linke Seitenfläche wirkt in negativer Richtung und beträgt

$$\left(X_x - \frac{1}{2}\frac{\partial X_x}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz;$$

folglich ist die erste um

$$\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz$$

größer als die zweite. Ebenso kommt von den beiden zur y-Axe senkrechten Seitenflächen eine Kraft

$$\left(\frac{\partial X_y}{\partial y}\,dy\right) dz\,dx,$$

und von den beiden zu z senkrechten Flächen eine Kraft

$$\left(\frac{\partial X_z}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy.$$

Dazu kommen nun die äußeren Massenkräfte; wenn deren Komponenten pro Volumeneinheit mit X, Y, Z ohne Suffixe und die Dichte des Elementes mit ϱ bezeichnet werden, so erhält man als Gesamtkräfte in den Axenrichtungen:

$$\varrho X\,dx\,dy\,dz, \quad \varrho Y\,dx\,dy\,dz, \quad \varrho Z\,dx\,dy\,dz.$$

Also ist die in der x-Richtung auf das Element ausgeübte Gesamtkraft

$$\left[\varrho X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz;$$

wenn nun das Element keine Verrückung längs Ox erfahren soll, so muß dieser Ausdruck verschwinden. Ebenso werden die beiden anderen Richtungen behandelt. Wir erhalten so die drei Gleichgewichtsgleichungen in Bezug auf translatorische Bewegung

$$\left.\begin{aligned}
\varrho X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0\\
\varrho Y + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= 0\\
\varrho Z + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (28)$$

Außerdem gibt es noch drei Gleichungen, die gelten müssen, damit keine Rotation um die Koordinatenaxen eintreten könne. Es ist indessen zu beachten, daß, wenn das Element unendlich klein ist, alle Momente um die Axe, welche die Massenkräfte ausüben können, klein

sind im Vergleich mit den von den Drucken auf die Oberflächen herrührenden Drucken, und im Vergleich mit diesen letzteren beliebig klein gemacht werden können dadurch, daß man das Element genügend verkleinert. Es ist daher im Grenzfalle nur nötig, die Drucke auf die Flächen zu betrachten. Ferner sind die Momente der Abweichungen dieser Drucke von den Werten, die sie für parallele Schnitte des Elementes durch O haben, zu vernachlässigen im Vergleich mit den Momenten dieser letzteren. Also erhält man, wenn man die Momente um Ox nimmt,

$$Y_z \times \tfrac{1}{2} dz\,dx\,dy - Z_y \times \tfrac{1}{2} dy\,dx\,dz = 0,$$

und entsprechend für die Momente um die anderen beiden Axen. Somit ergibt sich

$$Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Es kann also bei den Tangentialdrucken der große mit dem kleinen Buchstaben vertauscht werden, ohne daß der Wert sich ändert, und es gibt tatsächlich, wie schon vorgreifend bemerkt wurde, nur drei Tangentialdrucke, im ganzen also sechs Druckkomponenten. Der Bequemlichkeit halber und um jede Verwechselung mit den Massenkräften X, Y, Z zu vermeiden, wollen wir für sie neue Bezeichnungen nach folgendem Schema einführen:

Normaldrucke			Tangentialdrucke					
X_x	Y_y	Z_z	Y_z	Z_y	Z_x	X_z	X_y	Y_x
P	Q	R	S		T		U	

609. Gleichungen des Gleichgewichtes und der Bewegung eines elastischen festen Körpers. Die Gleichgewichtsgleichungen (28) werden jetzt

$$\left.\begin{aligned} \varrho X + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \\ \varrho Y + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \\ \varrho Z + \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

worin die drei Gleichungen (29) durch die Gleichsetzung von Y_z mit Z_y u. s. w. schon mit inbegriffen sind.

Es ist nun ohne weiteres einleuchtend, daß, wenn das Element eine Beschleunigung erfährt, die Größen auf der linken Seite von Gl. (30) jede mit $dx\,dy\,dz$ multipliziert, wenn $\ddot{u}$, $\ddot{v}$, $\ddot{w}$ die Beschleunigungen des Schwerpunktes des Elementes sind, gleich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx\,dy\,dz, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx\,dy\,dz, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx\,dy\,dz$$

sind. An die Stelle der rechten Seiten treten also jetzt $\ddot{u}$, $\ddot{v}$, $\ddot{w}$, und die Bewegungsgleichungen lauten daher

$$\left.\begin{aligned}\varrho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-X\right)&=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial T}{\partial z}\\ \varrho\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-Y\right)&=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial S}{\partial z}\\ \varrho\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-Z\right)&=\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(31)$$

610. Druckoberfläche. Scherungskegel und Normaldruckkegel. Wenn man die Bezeichnungen P, Q, R, S, T, U in Gl. (27) für die Kräfte X_y, Y_y, ..., sowie sie durch Gl. (29) an Zahl reduziert sind, einsetzt, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}F&=lP+mU+nT\\ G&=lU+mQ+nS\\ H&=lT+mS+nR\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(32)$$

Diese Werte, der Reihe nach mit l, m, n multipliziert und addiert, ergeben

$$lF+mG+nH$$
$$=l^2P+m^2Q+n^2R+2mnS+2nlT+2lmU\;..\;(33)$$

Denken wir uns jetzt die Oberfläche

$$P\xi^2+Q\eta^2+R\zeta^2+2S\eta\zeta+2T\zeta\xi+2U\xi\eta=K^2\;..\;(34)$$

mit dem Mittelpunkte in O konstruiert. Wenn l, m, n die Richtungskosinus eines Radiusvektors nach der Oberfläche sind, so sind die Richtungskosinus der im Endpunkte dieses Radiusvektors auf der Oberfläche errichteten Normalen proportional mit $lP+mU+nT$, $lU+mQ+nS$, $lT+mS+nR$, also mit F, G, H; und $lF+mG+nH$ ist die Normalkomponente des Druckes durch eine diametrale Ebene, die auf dem Radiusvektor in der l, m, n-Richtung senkrecht steht. Diese Normalkomponente ist für verschiedene Radienvektoren der Oberfläche, deren Gleichung (34) ist, dem Quadrat ihrer Längen umgekehrt proportional. Die Fläche wird deshalb Druckoberfläche genannt. Die Resultante von F, G, H für dieselbe Ebene ist senkrecht zur Tangentialebene im Endpunkte des Radiusvektors l, m, n.

Wo dieser Normaldruck ein von der Masse auf einer Seite der Fläche auf die Masse auf der anderen Seite ausgeübter Zug ist, ist K^2 positiv, aber wo er ein eigentlicher Druck ist, muß für den Wert der linken Seite von Gl. (34) der Wert $-K^2$ eingesetzt werden, der die konjugierte Fläche ergibt.

Verschwindet dieser Normaldruck in gewissen Richtungen, so sind Punkte auf in diesen Richtungen durch O gezogenen Linien durch die Gleichung

$$P\xi^2+Q\eta^2+R\zeta^2+2S\eta\zeta+2T\zeta\xi+2U\xi\eta=0\;..\;(35)$$

gegeben, die der Kegel vom Normaldrucke null oder häufiger, da der Druck hier eben überall tangential zu den Ebenen ist, deren Normalen die Erzeuger jenes Kegels sind, der Normal-Scherungskegel genannt wird. Er trennt die Richtungen, längs denen der Normaldruck auf Ebenen durch den Mittelpunkt ein Zug ist, von denen, längs denen er ein eigentlicher Druck ist.

Diejenigen Linien durch O, längs welchen der Normaldruck einen konstanten Wert k hat, sind durch die Gleichung

$$l^2(P-k) + m^2(Q-k) + n^2(R-k) + 2mnS + 2nlT + 2lmU = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

gegeben.

611. Resultierender Druck auf eine beliebige Fläche. Wenn V den resultierenden Druck auf die Fläche (l, m, n) und λ, μ, ν seine Richtungskosinus bezeichnet, so ist

$$\left.\begin{aligned} F &= lP + mU + nT = \lambda V \\ G &= lU + mQ + nS = \mu V \\ H &= lT + mS + nR = \nu V \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Wenn ε die Länge des Lotes vom Mittelpunkte der Oberfläche auf die Tangentialebene im Endpunkte des Radius l, m, n und ϱ die Länge $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ dieses Radius bezeichnet, ergeben diese Gleichungen, der Reihe nach mit l, m, n multipliziert und addiert,

$$V = \frac{K^2}{\varepsilon\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

612. Gegenseitige Beziehung der Drucke auf zwei Flächen. Hydrostatischer Druck. Die Druckkomponente parallel einer Linie $l'm'n'$ ist:

$$ll'P + mm'Q + nn'R + (m'n + mn')S + (n'l + nl')T + (l'm + lm')U.$$

Die Symmetrie dieses Ausdruckes in Bezug auf l, m, n und l', m', n' besagt, daß der Druck auf eine Fläche l, m, n, längs der Normalen zur l', m', n'-Fläche aufgelöst, dem Drucke durch diese letztere Ebene, längs der Normalen zur ersteren aufgelöst, gleich ist.

Findet der Druck senkrecht zur l, m, n-Fläche statt, so ist λ, μ, ν gleich l, m, n und der senkrecht zur l', m', n'-Fläche aufgelöste Druck ist

$$V(ll' + mm' + nn'),$$

d. h. $V\cos\theta$, wo θ der Winkel zwischen den Normalen ist.

Folglich ergibt, nach dem soeben aufgestellten Theorem, der Druck V' auf die l', m', n'-Fläche senkrecht zur l, m, n-Fläche aufgelöst, die Komponente $V\cos\theta$. Daraus folgt, daß, wenn V' ebenfalls zu seiner Fläche normal ist, auch diese Komponente $V'\cos\theta$, also $V' = V$ ist. Wenn daher der Druck auf jede durch O gelegte Fläche normal zur Fläche ist, so hat der Druck auf alle Flächen denselben

Wert. So haben wir, wenn der Druck von der Natur eines eigentlichen Druckes ist, das hydrostatische Theorem, das besagt, daß der Druck in einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit überall in allen Richtungen denselben Wert hat. Die Druckoberfläche, die im allgemeinen eine Oberfläche zweiten Grades ist, wird alsdann eine Kugel.

613. Hauptdruckaxen. Druckinvarianten. Die Hauptaxen der Druckfläche können mit Hilfe desselben Verfahrens gefunden werden, das für die Dilatationsfläche oben, § 601, angewandt wurde. Für eine Fläche l, m, n, auf die der resultierende Druck normal erfolgt, gelten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} lP + mU + nT &= lV \\ lU + mQ + nS &= mV \\ lT + mS + nR &= nV \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

so daß sich für V die kubische Determinante

$$\left.\begin{vmatrix} P-V, & U, & T \\ U, & Q-V, & S \\ T, & S, & R-V \end{vmatrix} = 0 \right\} \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

ergibt. Dies liefert drei reelle Werte von V für die Bestimmung von drei Reihen von Werten für l, m, n nach Gl. (39). Die so erhaltenen drei Richtungen stehen senkrecht aufeinander (§ 168) und ergeben die drei Hauptaxen der Druckoberfläche. Die Flächen senkrecht zu ihnen sind die Hauptflächen, und die Drucke gegen diese Flächen die Hauptdrucke.

Wenn jetzt P', Q', R' die Hauptdrucke bezeichnen, so ist die Gleichung der Druckoberfläche

$$P'\xi^2 + Q'\eta^2 + R'\zeta^2 = K^2 \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

und wenn a, b, c die drei Halbaxen dieser Fläche sind, so sind die Hauptdrucke numerisch gleich

$$\frac{K^2}{a^2}, \quad \frac{K^2}{b^2}, \quad \frac{K^2}{c^2}.$$

Die Druckinvarianten sind

$$\left.\begin{aligned} P + Q + R &= P' + Q' + R' \\ QR + RP + PQ - S^2 - T^2 - U^2 &= Q'R' + R'P' + P'Q' \\ PQR + 2STU - RU^2 - QT^2 - PS^2 &= P'Q'R' \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

614. Druckellipsoid. Wenn jetzt P, Q, R unter Weglassung der Striche die Hauptdrucke sind, so bezeichnet die Gleichung

$$\frac{\xi^2}{P^2} + \frac{\eta^2}{Q^2} + \frac{\zeta^2}{R^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

wo ξ, η, ζ Abstände längs der Hauptaxe sind, ein Ellipsoid. Die Druckkomponenten auf die Ebene, deren Richtungskosinus ξ/P, η/Q, ζ/R

sind, sind $F = \xi$, $G = \eta$, $H = \zeta$, und die Druckkomponente in der zu dieser Ebene normalen Richtung ist

$$\frac{\xi^2}{P} + \frac{\eta^2}{Q} + \frac{\zeta^2}{R}.$$

Der resultierende Druck durch dieselbe Fläche ist

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

d. h. er ist numerisch gleich dem Radiusvektor ϱ und wirkt längs diesem. Das Ellipsoid (43) heißt das Druckellipsoid.

Die Radienvektoren, die die resultierenden Drucke auf drei orthogonale Flächen, d. h. zueinander senkrechte Flächen, darstellen, sind selbst nicht orthogonal; man sieht aber leicht ein, daß sie konjugierte Axen des Ellipsoids, Gl. (43), sind. Denn wennn $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \xi_3, \eta_3, \zeta_3$ die Koordinaten ihrer Endpunkte sind, so sind die durch

$$\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}, \quad \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2}, \quad \sqrt{\xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2}$$

dargestellten Drucke die resultierenden Drucke auf diejenigen Flächen, deren Richtungskosinus ξ_1/P, η_1/P, ζ_1/P sind; und wenn diese Flächen orthogonal sind, so gilt die Beziehung

$$\frac{\xi_1\xi_2}{P^2} + \frac{\eta_1\eta_2}{Q^2} + \frac{\zeta_1\zeta_2}{R^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

und zwei andere durch zyklische Vertauschung der Suffixe gewonnene. Dies sind aber die zwischen konjugierten Halbmessern gültigen Beziehungen; die erste besagt, daß der Punkt ξ_1, η_1, ζ_1 auf einer zur Tangentialebene im Endpunkte von ξ_2, η_2, ζ_2 parallelen Fläche liegt, und so fort für die anderen.

615. Richtungsfläche. Tangential- und Normal-Scherungskegel. Die Fläche

$$\frac{\xi^2}{P} + \frac{\eta^2}{Q} + \frac{\zeta^2}{R} = K'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

worin P, Q, R die durch P', Q', R' in § 613 dargestellten Größen bezeichnen, heißt die Reziproke der Fläche, Gl. (41). Der Druck auf eine diametrale Schnittebene dieser Fläche hat die Komponenten

$$F = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\xi^2}{P^2} + \frac{\eta^2}{Q^2} + \frac{\zeta^2}{R^2}}},$$

G und H entsprechend mit η und ζ im Zähler; d. h. $(\xi, \eta, \zeta)\, p/K'^2$, wo p das vom Zentrum auf die Tangentialebene in ξ, η, ζ gefällte Lot ist. Der resultierende Druck durch diese Fläche hindurch ist somit $p\varrho/K'^2$, wo

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

ist, und hat die Richtung von ϱ. Daher wird die Fläche manchmal **Richtungsfläche** genannt.

Die Komponente längs der Normalen (deren Richtungskosinus

$$\left(\frac{p\xi}{P}, \frac{p\eta}{Q}, \frac{p\zeta}{R}\right) K'^2$$

sind) ist:

$$\frac{F\frac{p\xi}{P} + G\frac{p\eta}{Q} + H\frac{p\zeta}{R}}{K'^2} = p^2 \frac{\frac{\xi^2}{P} + \frac{\eta^2}{Q} + \frac{\zeta^2}{R}}{K'^4} = \frac{p^2}{K'^2}.$$

Wenn die Normalkomponente überall positiv ist, so ist diese Fläche ein Ellipsoid, ist sie überall negativ, so ist die Fläche ebenfalls ein Ellipsoid, aber eins mit der Gleichung

$$\frac{\xi^2}{P} + \frac{\eta^2}{Q} + \frac{\zeta^2}{R} = -K'^2. \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

Ist der Druck in einigen Richtungen ein Zug und in anderen ein eigentlicher Druck, so gilt Gl. (45) für die ersteren und Gl. (46) für die letzteren. Die Gleichungen stellen alsdann zwei konjugierte Hyperboloide dar, die durch den Kegel

$$\frac{\xi^2}{P} + \frac{\eta^2}{Q} + \frac{\zeta^2}{R} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

getrennt werden; dies ist der **Tangential-Scherungskegel**. Anderseits ist der Druck, wie wir sahen, in allen Punkten normal zum reziproken Kegel

$$P\xi^2 + Q\eta^2 + R\zeta^2 = 0. \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

und dies ist der **Normal-Scherungskegel**. Keiner von diesen Kegeln ist vorhanden, wenn der Druck überall von gleichem Charakter, d. h. überall ein Druck oder überall ein Zug ist.

616. Transformation von Drucken. Beliebige Drucke durch die Hauptdrucke ausgedrückt. Die Übertragung der Definition des Druckes von einem Axengerüst auf ein anderes ist von großer Wichtigkeit, besonders aber die Zurückführung des beliebigen Systems von Drucken P, Q, R, S, T, U auf die Hauptdrucke P', Q', R'. Es seien $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, l_3, m_3, n_3$ die Richtungskosinus der Axen eines beliebigen Systems von Drucken P, Q, R, S, T, U, bezogen auf die Axen eines beliebigen gegebenen Systems, P', Q', R', S', T', U'. Substituiert man in Gl. (32) $P', Q' \ldots$ für $P, Q \ldots$ und $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, l_3, m_3, n_3$ der Reihe nach für l, m, n, so erhält man drei Reihen von Werten von F, G, H, nämlich erstens:

$$F = l_1 P' + m_1 U' + n_1 T'$$
$$G = l_1 U' + m_1 Q' + n_1 S'$$
$$H = l_1 T' + m_1 S' + n_1 R',$$

und zwei weitere, durch geeignete Änderung der Suffixe aus diesen erhaltene. Diese erste Gruppe enthält die Komponenten auf diejenige

Fläche, deren Normale die Richtungskosinus l_1, m_1, n_1 hat, also die neue y, z-Ebene. Die Normalkomponente auf diese Ebene ist daher

$$P = l_1^2 P' + m_1^2 Q' + n_1^2 R' \\ + 2 m_1 n_1 S' + 2 n_1 l_1 T' + 2 l_1 m_1 U' \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

mit entsprechenden Formeln für Q, R, die durch Änderung der Suffixe an den Kosinus sich ergeben.

Die Werte von F, G, H für die neue x, y-Ebene sind $l_3 P' + m_3 U' + n_3 T' \ldots$ Die mit y parallele Komponente durch diese Fläche ist $l_2 F + m_2 G + n_2 H$ und ist der Wert von S. Demnach ist

$$\left.\begin{aligned} S = l_2 l_3 P' + m_2 m_3 Q' + n_2 n_3 R' \\ + (n_2 m_3 + m_2 n_3) S' + (l_2 n_3 + n_2 l_3) T' + (m_2 l_3 + l_2 m_3) U' \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

mit entsprechenden Formeln für T und U.

Wenn P, Q, R Hauptdrucke sind, so sind S, T, U alle drei gleich null, und Gl. (49) genügt für die Transformation. Sind P', Q', R' Hauptdrucke, so werden P, Q, R, S, T, U durch Unterdrückung der zweiten Zeilen der Ausdrücke auf der rechten Seite von Gl. (49) und (50) gefunden. In diesem Falle gelten die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} P &= l_1^2 P' + m_1^2 Q' + n_1^2 R' \\ Q &= l_2^2 P' + m_2^2 Q' + n_2^2 R' \\ R &= l_3^2 P' + m_3^2 Q' + n_3^2 R' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49\,\mathrm{a})$$

$$\left.\begin{aligned} S &= l_2 l_3 P' + m_2 m_3 Q' + n_2 n_3 R' \\ T &= l_3 l_1 P' + m_3 m_1 Q' + n_3 n_1 R' \\ U &= l_1 l_2 P' + m_1 m_2 Q' + n_1 n_2 R' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (50\,\mathrm{a})$$

Diese Formeln können auch für die Transformation der reinen Deformation benutzt werden. Man braucht nur in Gl. (49) und (50) statt P, Q, R, $2S$, $2T$, $2U$ die Größen e, f, g, $2s_1$, $2s_2$, $2s_3$ einzusetzen mit den entsprechenden Substitutionen für P', Q' u. s. w. Die Gl. (49 a) und (50 a) ergeben e, f, g, s_1, s_2, s_3, wenn ε_1, ε_2, ε_3, die Hauptelongationen, für P', Q', R' gesetzt werden.

617. Äquivalenz von Zug und Druck in aufeinander senkrechten Richtungen mit einem System von Scherungsdrucken. Wir können jetzt leicht äquivalente Drucksysteme auffinden, die von großer Wichtigkeit für die praktische Anwendung sind. Betrachten wir z. B. ein System, das aus zwei Hauptdrucken, einem Zug P' auf alle Flächen senkrecht zur Hauptaxe Ox' und einem Druck von gleichem Betrage auf alle Flächen senkrecht zur Hauptaxe Oy' besteht. Sie wirken auf Flächen, die durch einen Punkt Q in den in Fig. 341 (a. f. S.) angegebenen Richtungen durchgelegt sind. Der äquivalente Druck auf zwei Flächen, beide parallel zur z-Axe und die Winkel zwischen der Ox- und Oy-Axe halbierend, kann ohne weiteres aus den soeben mitgeteilten Formeln gefunden werden. Die Richtungskosinus der Ox'-,

Oy'-, Oz'-Axen, bezogen auf die Ox-, Oy- und Oz-Axen (da Oz und Oz' zusammenfallen), sind:

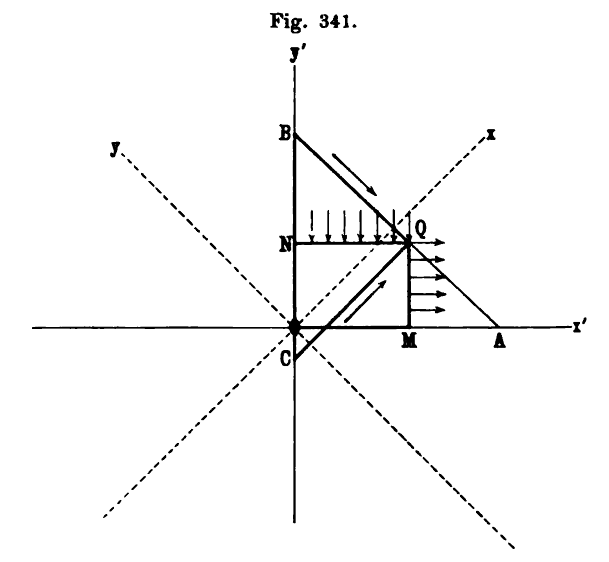
$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_1 = 0,$$
$$l_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad l_3 = 0, \quad m_3 = 0, \quad n_3 = 1.$$

Folglich ist nach Gl. (49 a):

$$\left. \begin{array}{l} P = \frac{1}{2}P' - \frac{1}{2}P' = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \\ S = 0, \quad T = 0, \quad U = \frac{1}{2}P' + \frac{1}{2}P' = P' \end{array} \right\} \quad . \; . \; (51)$$

Also sind nach Fig. 341 die durch die neue xz- und yz-Koordinatenebene in Q hindurchwirkenden Kräfte die beiden Tangential-

Fig. 341.



kräfte U, wie sie aus Fig. 340 (mit X_y und Y_x bezeichnet) ersichtlich sind; nämlich eine Tangentialkraft (P pro Flächeneinheit) auf die zur neuen x-Axe senkrechte Fläche in der Richtung von B nach A und eine gleiche Tangentialkraft auf die zur neuen y-Axe senkrechte Fläche und von C nach Q gerichtet. Die ursprünglichen Drucke in Q wirken auf die Masse innerhalb des Winkels MQN, die äquivalenten Tangentialdrucke in Q wirken auf die Masse innerhalb des Winkels CQB. Also ist das gegebene Drucksystem gleich einem Scherungssystem auf Flächen durch den betreffenden Punkt, die um 45° gegen die Axen geneigt sind.

Das in Fig. 342 auf die Flächen eines rechtwinkeligen Elementes wirkend gezeigte System von Drucken veranschaulicht die Drucke, welche als von der umgebenden Masse irgend einem solchen Element.

mit dem Mittelpunkte in O, erteilt gedacht werden, wenn das System das soeben behandelte ist. Das Innere des rechtwinkeligen Elementes erweist sich als unter dem äquivalenten tangentialen oder Scherungsdruck stehend. Die von dem inneren Kern des Elementes den dreieckigen Prismen außerhalb desselben erteilten entgegengesetzten Tangentialdrucke äquilibrieren gerade die auf diese durch den Normaldruck gegen ihre äußeren Flächen wirksamen Kräfte.

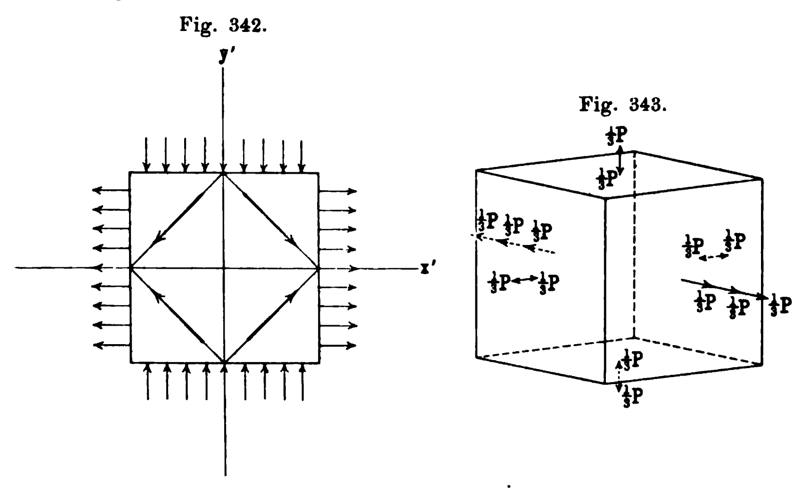


Fig. 342.

Fig. 343.

618. Reduktion eines einfachen Längszuges auf gleichförmigen Zug in allen drei Richtungen und zwei Systeme von Scherungsdrucken. Aus dem eben Gesagten ergibt sich klar, daß jeder einfache Normalzug auf eine Schar paralleler Ebenen zurückgeführt werden kann auf einen gleichförmigen Normalzug auf diese Ebenenschar und die beiden anderen mit ihm orthogonalen, nebst zwei Drucksystemen, die dem vorhin erörterten System ähnlich sind. Denn es sei der Druck ein Zug P auf die zur x-Axe senkrechten Ebenen; betrachten wir ein kubisches Körperelement mit dem Mittelpunkte in O; durch das auf der x-Axe senkrechte entgegengesetzte Flächenpaar wirkt der Zug P. Nun werde senkrecht zu jedem der beiden anderen Flächenpaare ein Druck wirksam angenommen, der aus einem Zug $^1/_3\,P$ und einem Druck $^1/_3\,P$ besteht, wie dies in Fig. 343 angedeutet ist; dies ist erlaubt, denn es ergibt natürlich den Druck null für jedes Flächenpaar, ausgenommen das senkrecht zur x-Achse. Jetzt haben wir für jedes Paar paralleler Flächen einen Zug $^1/_3\,P$, d. h. es wirkt ein gleichförmiger räumlicher Dilatationszug von diesem Betrage auf den Körper. Ferner aber wirkt senkrecht zu dem mit der yz-Ebene parallelen Flächenpaar ein Zug $^1/_3\,P$ und senkrecht zu dem mit der zx-Ebene parallelen Flächenpaar ein Druck vom gleichen Betrage Endlich ist ein eben solches System von Zug und Druck durch die zwei Gruppen

von Flächen senkrecht zur yz-Ebene und senkrecht zur xy-Ebene wirksam. Jedes der beiden letzteren Drucksysteme läßt sich, wie in § 617, auf ein System tangentialer Drucke parallel mit den Halbierungsebenen der Winkel zwischen der x- und y-Axe und parallel mit den Halbierungsebenen der Winkel zwischen der x- und z-Axe reduzieren. Somit läßt sich wirklich der auf ein Element wirkende einfache Längszug auf einen nach allen drei Richtungen gleichförmigen Längszug und zwei Systeme von Scherungen zurückführen, deren jedes in der in § 617 beschriebenen Weise auf das Element wirkt.

Hieraus folgt, daß jedes Drucksystem, das sich auf drei einfache Längszüge (positive oder negative) parallel zu den Hauptaxen zurückführen läßt, sich des weiteren auf einen gleichförmigen räumlichen Dilatationszug und drei Systeme von Scherungsdrucken reduzieren läßt, die parallel mit den drei Flächenpaaren wirken, die die Winkel zwischen den Axen halbieren.

Fig. 344.

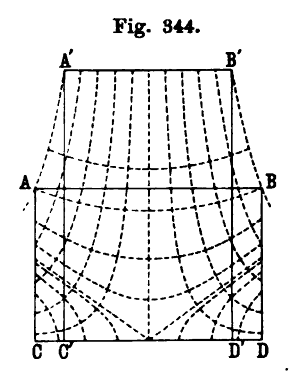


Fig. 344 zeigt die Linien, in denen ein axialer Querschnitt $ABCD$ eines Stückes Draht sich zur Konfiguration $A'B'C'D'$ umändert. Die Längsdehnung von AC zu $A'C'$ und die Querkontraktion von CD zu $C'D'$ sind stark übertrieben und weit von ihrem richtigen Verhältnis entfernt. Aber die gestrichelten Linien sind so gezogen, daß ein Teilchen, das in der ursprünglichen Konfiguration auf einer von ihnen liegt, auch in der neuen Konfiguration wieder, an anderer Stelle, sich auf derselben Linie befindet. Sie stellen deshalb Verschiebungslinien der Teilchen vor.

---

619. Beziehungen zwischen Druck und Deformation. Wir müssen nun die Beziehungen zwischen Druck und Deformation betrachten. Dabei wollen wir annehmen, daß es keine aus der Wirkung des Druckes auf den Körper hervorgehenden Energieänderungen gebe, die nicht genau in Rechnung gezogen wären, wenn die durch die wirksamen Kräfte geleistete Arbeit und die Änderung der potentiellen Energie infolge der der Deformation entsprechenden Änderung der Konfiguration der elastischen Substanz bewertet werden. In der hier möglichen begrenzten Erörterung werden Energieänderungen infolge von Temperaturwechsel und anderen Veränderungen des inneren Zustandes des Körpers vernachlässigt, und es wird dieserhalb auf die Lehrbücher über Thermodynamik oder auf den zweiten Teil dieses Werkes verwiesen.

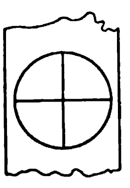
Vorausgesetzt nun, daß der Körper entweder bei konstanter Temperatur deformiert wird, oder daß er der Bedingung unterworfen wird,

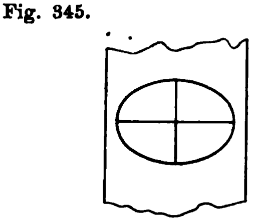
daß kein Teil der deformierten Substanz Wärme aufnimmt oder abgibt, wenn also, wie man sagt, die Vorgänge entweder isothermisch oder adiabatisch sind, so sind die Änderungen der potentiellen Energie unabhängig von der Reihenfolge der dem Körper auferlegten Deformationskonfigurationen, d. h. die während einer Änderung auf den Körper verwandte Arbeit hängt nur von seiner anfänglichen und seiner schließlichen Konfiguration ab. Es gibt also eine Arbeitsfunktion, welche die von den angreifenden Kräften bei der Überführung der Substanz von einer Konfiguration zur anderen geleistete Arbeit durch die stattgehabten Deformationen ausdrückt. Mit anderen Worten: Die bei einer kleinen deformierenden Änderung irgend welcher Form pro Einheit der Änderung geleistete Arbeit ist ein vollkommenes Differential einer Funktion der Koordinaten (es kann das eine einzige oder es können mehrere sein), welche die Deformationskonfiguration ausdrücken.

620. Hookesches Gesetz. Deformation infolge einfachen Zuges. Wir wollen also jetzt die Aufgabe in Angriff nehmen, auf Grund gewisser Annahmen die Natur einer durch irgend eine Art von Druck erzeugten (kleinen) Deformation zu bestimmen, und zwar soll angenommen werden, daß verschiedene Drucke oder verschiedene Elemente eines einzigen Druckes in dem Sinne voneinander unabhängig sind, daß jeder, unabhängig vom Vorhandensein der anderen, seine eigene Wirkung hervorbringt. Mit anderen Worten: Die Deformation wird als mit dem vorhandenen Druck proportional angenommen werden. Daß dies für kleine Deformationen von einer bestimmten Art annähernd der Fall war, wurde zuerst von Hooke gefunden; die Proportionalität, die zwischen kleinen Deformationen und ihren korrespondierenden Drucken besteht, wird jetzt gewöhnlich als Hookesches Gesetz bezeichnet.

Es läßt sich zeigen, daß ein einfacher Zug in einer Richtung, etwa eine auf einen Stab oder Draht in seiner Längsrichtung angewandte streckende Kraft, nicht nur eine Verlängerung erzeugt, sondern gleichzeitig auch die Querdimensionen des Versuchsstückes ändert; daß dagegen ein isotroper Körper, wenn er einem gleichförmigen allseitigen Druck oder Zug unterworfen wird, keine Gestaltänderung erleidet, und daß er umgekehrt, wenn er unter dem Einfluß reiner Scherungskräfte seine Gestalt ändert, dies ohne Änderung des Volumens tut.

Fig. 345.





Die Dimensionsänderungen in den Querrichtungen, welche die Folge von Längsbeanspruchungen sind, hat man, da sie von ganz besonderer wissenschaftlicher Wichtigkeit sind, nach den verschiedensten Methoden

untersucht. Am einfachsten gestaltet sich die Sache natürlich bei Körpern, die sich stark verändern, z. B. bei Kautschuk; hier kann man. worüber Röntgen (1876) eine eingehende Arbeit publiziert hat, die Längsdilatation und Querkontraktion infolge des Längszuges direkt messen, indem man im gedehnten Zustande auf die Mantelfläche einen Kreis aufprägt, der sich nach der Entlastung in eine Ellipse verwandelt (Fig. 345, a. v. S.). Von anderen Methoden wird noch die Rede sein.

621. Elastizitätsgrenze. Vollkommene Elastizität. Wenn einem Körper eine Reihe kleiner Deformationen irgend welcher Art erteilt wird, so kann die sich steigernde Deformation aufhören klein zu bleiben, und sie wird alsdann, wie die Erfahrung lehrt, nicht länger dem ihm erteilten Gesamtdruck jener Art proportional bleiben. Man sagt dann, daß der Körper über seine Elastizitätsgrenze hinaus für die betreffende Art der Deformation beansprucht worden ist. Diese Grenze liegt für die meisten Körper ausnehmend tief; wir werden später Ergebnisse in Bezug auf Elastizitätsgrenzen in besonderen Fällen betrachten.

Es hat sich sogar, nach F. Kohlrausch und O. Thompson, neuerdings herausgestellt, daß auch für ganz kleine Beanspruchungen die Deformationen nicht genau proportional mit ihnen sind, sondern etwas schneller wachsen; mit anderen Worten: Das Hookesche Gesetz ist nur in erster (wenn auch oft sehr guter) Annäherung gültig.

Man bezeichnet einen Körper dann als vollkommen elastisch bei konstanter Temperatur und für jede Art von Deformation, gleichviel ob Volumen- oder Gestaltänderung oder irgend welche bestimmte Kombination beider, wenn bei ihm nach Erreichung einer schließlichen Konfiguration, bei welcher eine Reihe von allmählich gesteigerten Drucken eine Reihe von allmählich gesteigerten Deformationen zur Folge hat, bei Aufhebung dieser Drucksteigerungen in umgekehrter Reihenfolge sich die Reihe der Deformationen ebenfalls in umgekehrter Ordnung und zwar in genau derselben Weise wieder zurückbildet. Mit anderen Worten: Die Substanz besitzt vollkommene Elastizität von der betreffenden Art, wenn die irgend einem Werte von Druck entsprechende Konfiguration in einem Kreise von Beobachtungen immer dieselbe ist, gleichviel ob der Druck diesen Wert im Laufe einer Zunahme oder einer Abnahme erreicht. Wenn dies der Fall ist, so ist die durch die angreifenden Kräfte bei der Erzeugung der Deformation auf den Körper geleistete Arbeit genau gleich der bei der Rückkehr zur ursprünglichen Konfiguration von dem Körper auf die äußeren Kräfte geleisteten Arbeit. Es wird sich herausstellen, daß ein Überschuß an Arbeit auf einen unvollkommenen elastischen Körper ausgegeben wird, wenn er einem Zyklus von Veränderungen unterworfen wird, und es wird gezeigt werden, wie dies graphisch dargestellt werden kann.

622. Deformationsarbeit. Nach einem von Green angegebenen Vorgehen können wir einen Ausdruck für die Arbeit hinschreiben, die

bei einer kleinen Verrückung des Körpers durch die auf seine Oberfläche wirksamen Kräfte und die Massenkräfte geleistet wird; wir könnten diesen Ausdruck in einen anderen transformieren, bei dem er ausgedrückt erscheint durch diejenigen inneren Drucke, welche infolge dieser angreifenden Kräfte entstehen, und würden zu dem Ergebnis gelangen, daß, wenn $e, f, g, 2s_1, 2s_2, 2s_3$, oder, wie von nun an geschrieben werden soll, e, f, g, a, b, c die oben definierten Dilatationen und einfachen Scherungen sind, wir für die bei Erhöhung dieser Werte um de, df, dg, da, db, dc geleistete Arbeit den Wert

$$dW = \int (Pde + Qdf + Rdg + Sda + Tdb + Udc)\, d\tau \quad . \; . \quad (52)$$

erhalten würden, wo $d\tau$ ein Volumenelement ist, und das Integral über das ganze Volumen des Körpers genommen wird. Die pro Volumeneinheit geleistete Arbeit ist also:

$$Pde + Qdf + Rdg + Sda + Tdb + Udc.$$

Es entsprechen demnach P, Q, R den Dilatationsdeformationen de, df, dg und S, T, U den Scherungsdeformationen da, db, dc in dem Sinne, daß die von jedem Druck geleistete Arbeit das Produkt des Druckes und der von ihm erzeugten spezifischen Deformation ist. Diese Resultate sollen vorläufig als gegeben angesehen werden.

Nimmt man nun als weiteres Ergebnis an, daß W nur eine Funktion der Deformationskoordinaten e, f, g, a, b, c ist, so ist unter der festgesetzten Bedingung, nämlich daß entweder die Temperatur konstant ist oder daß kein Teil des Körpers weder Wärme aufnimmt noch hergibt:

$$\left.\begin{array}{lll} P = \dfrac{\partial W}{\partial e}, & Q = \dfrac{\partial W}{\partial f}, & R = \dfrac{\partial W}{\partial g} \\ S = \dfrac{\partial W}{\partial a}, & T = \dfrac{\partial W}{\partial b}, & U = \dfrac{\partial W}{\partial c} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (53)$$

623. Elastizitätsmoduln eines isotropen Körpers. Youngscher Modul. Wir unterscheiden zwei Hauptmoduln oder Elastizitätskonstanten, den Volumenmodul und den Gestalts- oder Starrheitsmodul. In beiden Fällen wird der Modul durch das Verhältnis des wirksamen spezifischen Druckes und der durch ihn erzeugten (kleinen) Deformation gemessen. Der Volumenmodul soll mit k, der Gestaltsmodul mit n bezeichnet werden.

Außer diesen gibt es noch den Youngschen Modul oder Modul für einfachen Längszug und den Modul für einfache Längsdehnung. Beide werden durch das Verhältnis des Längszuges zu der (kleinen) von ihm erzeugten relativen Dehnung gemessen; aber der erste wird ohne Rücksicht auf die gleichzeitige Änderung der Querdimensionen, der andere ohne Rücksicht auf irgend welchen zur Verhütung dieser Änderungen der Querdimensionen angewandten Querdruck betrachtet.

Sie sollen mit E und E' bezeichnet werden, und es wird sich alsbald die Möglichkeit ergeben, sie durch n und k auszudrücken. Die Größe E heißt, da sie praktisch am wichtigsten ist, auch schlechthin Elastizitätsmodul.

Es sei noch besonders betont, daß alle diese als „Moduln" bezeichneten Größen Verhältnisse von Drucken zu Deformationen sind. Vielfach werden statt dessen die Verhältnisse der Deformationen zu den Drucken, also die reziproken Größen eingeführt; man tut gut, sie (zur Unterscheidung von den Moduln) „Koeffizienten" (Volumen-, Gestalts-, Elastizitätskoeffizient) zu nennen.

624. Gleichungen zwischen Drucken und Deformationen. Bestimmung der Koeffizienten. Es wird angenommen, daß die Hauptdruckaxen und die Hauptdeformationsaxen des Körpers zusammenfallen und vom Anfangspunkt O aus gezogen sind, in dem der Zustand des Körpers betrachtet wird. Die Hauptdeformationen werden mit e, f, g, die Hauptdrucke mit P, Q, R bezeichnet. Nach dem, was oben konstatiert wurde, muß jeder Druck eine lineare Funktion der Deformationen sein. Nun ist klar, daß in einer Gleichung für den Druck, etwa P, die Drucke f, g, die in den beiden Richtungen senkrecht zu P stattfinden, mit einem und demselben Proportionalitätsfaktor erscheinen müssen, da der Körper isotrop ist. Die Deformation e hingegen wird einen anderen Koeffizienten haben. In denselben Beziehungen stehen die anderen Hauptdrucke zu den Deformationen, und zwar mit denselben Faktoren (da der Körper isotrop ist). Folglich kann man, wenn man den Faktor der Querrichtungen jedesmal mit λ, den der Hauptrichtung jedesmal mit $\lambda + \mu$ bezeichnet, schreiben:

$$\left.\begin{aligned} P &= \lambda(e+f+g) + \mu e \\ Q &= \lambda(e+f+g) + \mu f \\ R &= \lambda(e+f+g) + \mu g \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (54)$$

wo λ und μ Konstanten sind.

Man kann λ und μ folgendermaßen durch k und n ausdrücken. Es sei zunächst $P = Q = R$, dann ist offenbar $e = f = g$. Nun geben aber die Gl. (54) durch Addition:

$$P = (3\lambda + \mu)e \quad \text{oder} \quad 3\lambda + \mu = \frac{P}{e}.$$

Nun ist die Deformation in diesem Falle offenbar eine Dilatation vom Betrage $D = e + f + g = 3e$. Da aber k der Volumenmodul ist, so ist

$$k = \frac{P}{D} = \frac{P}{3e},$$

also:

$$\lambda + \frac{1}{3}\mu = k. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

Es sei ferner $P = - Q$ und $R = 0$, dann ist nach Gl. (54):

$$P = (\lambda + \mu)e + \lambda(f + g) = -(\lambda + \mu)f - \lambda(e + g),$$
$$(\lambda + \mu)g + \lambda(e + f) = 0.$$

Der in diesem Falle erteilte Druck ist ein Scherungsdruck vom Betrage P, und es ist anzunehmen, daß die entsprechende Deformation eine Scherung mit derselben Axe und vom Betrage P/n ist, wo n der Starrheitsmodul ist. Aber, wie oben (§ 600) gezeigt wurde, ist die Scherung numerisch gleich dem Doppelten der Einheitsdilatation in der P-Richtung oder dem Doppelten der Kontraktion in der Q-Richtung. Folglich ist $P/n = 2e = -2f$, und somit $e = -f$. Die obige Beziehung

$$(\lambda + \mu)g + \lambda(e + f) = 0$$

reduziert sich hierdurch auf $g = 0$, was mit der Annahme bezüglich der Deformation übereinstimmt. Somit verwandelt sich die Gleichung

$$P = (\lambda + \mu)e + \lambda(f + g)$$

in

$$P = (\lambda + \mu)e - \lambda e = \mu e;$$

somit ist, da $P/2e = n$ ist:

$$\mu = 2n.$$

Setzt man dies in Gl. (55) ein, so findet sich als Schlußergebnis:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= k - \frac{2}{3}n \\ \mu &= 2n \end{aligned}\right\} \quad \dots \dots \dots \quad (56)$$

Gl. (54) können jetzt in der Form

$$\left.\begin{aligned} P &= \lambda(e + f + g) + 2ne \\ Q &= \lambda(e + f + g) + 2nf \\ R &= \lambda(e + f + g) + 2ng \end{aligned}\right\} \quad \dots \dots \quad (57)$$

geschrieben werden, wo λ den Wert $k - \frac{2}{3}n$ hat.

625. Der Youngsche Modul durch den Gestaltsmodul und den Volumenmodul ausgedrückt. Elastizitätszahl. Betrachten wir jetzt den Fall des einfachen Längszuges P. Nach Gl. (54) haben wir, da $Q = R = 0$ ist:

$$P = \lambda(e + f + g) + 2ne$$
$$0 = \lambda(e + f + g) + 2nf$$
$$0 = \lambda(e + f + g) + 2ng;$$

es muß also $f = g$ sein, und zwar:

$$f = g = -\frac{1}{2}e\frac{\lambda}{\lambda + n}.$$

Demnach ist:

$$P = en\,\frac{3\lambda + 2n}{\lambda + n}.$$

Wenn aber E der Dehnungs- oder Elastizitätsmodul ist, so ist $E = P/e$, und somit:

$$E = \frac{n(3\lambda + 2n)}{\lambda + n} = \frac{9nk}{3k + n} \quad \ldots \ldots \quad (58)$$

letzteres mit Rücksicht auf $\lambda = k - \frac{2}{3}n$. Also ist der Elastizitätsmodul ein zusammengesetzter Modul, der die beiden Hauptmoduln eines isotropen Körpers in sich enthält.

Das Verhältnis

$$\frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{\lambda + n}$$

des numerischen Betrages der Querkontraktion zur Längsdehnung ist bekannt als Elastizitätszahl (zuweilen auch Poissonsches Verhältnis genannt, obgleich, wie wir sehen werden, die Poissonsche Bewertung desselben inzwischen widerlegt ist). Sie soll mit η bezeichnet werden, und es gilt für sie die Beziehung

$$\eta = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{\lambda + n} = \frac{3k - 2n}{2(3k + n)} \quad \ldots \ldots \quad (59)$$

Von dem natürlichen Dehnungsmodul E verschieden ist der Modul E' einer reinen Längsdehnung ohne Querkontraktion (deren Auftreten durch besondere Vorkehrungen zu verhüten ist). Man erhält diesen Modul aus Gl. (57), indem man $f = g = 0$ setzt, so daß

$$\left.\begin{aligned} P &= (\lambda + 2n)e = \left(k + \frac{4}{3}n\right)e \\ Q = R &= \lambda e \qquad\; = \left(k - \frac{2}{3}n\right)e \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (60)$$

wird. Es ist also:

$$E' = k + \frac{4}{3}n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (61)$$

Der zur Verhütung der Querkontraktion notwendige Druck ist demnach ein Zug in jeder der zur Dehnung senkrechten Richtungen vom Betrage $(k - \frac{2}{3}n)e$ oder

$$P\,\frac{k - \frac{2}{3}n}{k + \frac{4}{3}n}.$$

626. Die allgemeinen Drucke durch die Hauptdrucke ausgedrückt. Die Werte der Drucke des Systems P, Q, R, S, T, U können durch die Transformationsformeln (49a) und (50a) aus den

Hauptdrucken gefunden werden, die jetzt zur Unterscheidung mit P', Q', R' bezeichnet werden sollen. Die Hauptdeformationen (sie seien e', f', g') werden ebenfalls durch entsprechende Formeln auf das System e, f, g, a, b, c übertragen. Infolgedessen wird der Leser, wenn er den Prozeß durchführt, die Werte von $P \ldots$ in Gliedern von $P' \ldots$ hinschreibt, nach Gl. (49 a) (z. B. $P = P' l_1^2 + Q' m_1^2 + R' n_1^2$) die Werte von P', Q', R' aus Gl. (57) substituiert und die Anwendung von Gl. (49) und (50) auf die Umwandlung der Deformation nach § 616 sowie die Unveränderlichkeit von $e' + f' + g'$ berücksichtigt, finden:

$$\left.\begin{array}{c} P = \lambda D + 2ne, \quad Q = \lambda D + 2nf, \quad R = \lambda D + 2ng \\ S = na, \quad T = nb, \quad U = nc \end{array}\right\} \quad \ldots (62)$$

wo

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e + f + g$$

die räumliche oder kubische Dilatation ist.

627. Bewegungsgleichungen eines elastischen Körpers. Setzt man in diese Gleichungen $\partial u / \partial x$ für $e_1 \ldots$, $\partial w / \partial y + \partial v / \partial z$ für $a \ldots$ ein, so erhält man Werte von P, Q, R, S, T, U, die für die Transformation der Gl. (31) in Gleichungen, die statt der $P \ldots$ nur noch die Verrückungen u, v, w selbst enthalten, brauchbar sind. Wenn dann Δ den Operator

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

d. h. die Summe der drei zweiten Differentialquotienten der dahinter stehenden Größe nach den Koordinatenrichtungen bezeichnet, so werden die Gleichungen kleiner Bewegungen:

$$\left.\begin{array}{l} n \Delta u + (\lambda + n) \dfrac{\partial D}{\partial x} + \varrho X = \varrho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ n \Delta v + (\lambda + n) \dfrac{\partial D}{\partial y} + \varrho Y = \varrho \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ n \Delta w + (\lambda + n) \dfrac{\partial D}{\partial z} + \varrho Z = \varrho \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{array}\right\} \quad \ldots (63)$$

Sie gehen in die Gleichgewichtsgleichungen über, wenn $\ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w}$ gleich null gesetzt werden. Durch Einführung der Rotationen $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ kann sie der Leser in die äquivalenten

$$(\lambda + 2n) \frac{\partial D}{\partial x} - 2n \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial y} - \frac{\partial \theta_2}{\partial z}\right) + \varrho X = \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \ldots (63\,\mathrm{a})$$

mit zwei eben solchen Gleichungen für $\ddot{v}$ und $\ddot{w}$ verwandeln.

Aus der letzteren Form der Gleichungen ist zu ersehen, daß, wenn die Deformation ohne Rotation erfolgt, die Gleichungen von der vergleichsweise einfachen Form

$$(\lambda + 2n)\frac{\partial D}{\partial x} + \varrho X = \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (64)$$

mit zwei eben solchen Gleichungen für $\ddot{u}$ und $\ddot{v}$ sind.

628. Längsdehnung ohne Änderung der Querdimensionen. Es ist einleuchtend, daß es, wenn ein schmaler gerader oder kegelförmiger Streifen der Substanz einer Dehnung längs der Stabaxe oder längs Linien durch den Scheitelpunkt des Kegels unterworfen wird, während die seitlichen Begrenzungen unverändert bleiben, d. h. wenn Längsdehnung ohne Querkontraktion vorhanden ist, keine Rotation gibt. Die eben mitgeteilten Gleichungen für kleine Bewegungen sind dann bequem anwendbar, zum mindesten für den Fall eines geraden Stabes von gleichförmigem Querschnitt. Denn betrachten wir den dünnen geraden Stab und nehmen wir seine Länge in der x-Richtung an. Es gibt keine Bewegung eines Teilchens in der y- oder z-Richtung, und die Dehnung längs x ergibt eine reine Dilatation. Wenn die Dilatation im Mittelpunkte eines kleinen Stückes von der Länge dx gleich D ist, so ist die Deformation an den beiden Enden des Stückes:

$$D \pm \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial x}\,dx,$$

je nachdem das positive oder negative Vorzeichen genommen wird. Da der Modul der einfachen Längsdehnung

$$\lambda + 2n = \left(k + \frac{4}{3}n\right)$$

ist, so ist die dem linken Ende des Stückes von der noch weiter nach links liegenden Masse des Stabes pro Flächeneinheit erteilte Kraft (Zug)

$$(\lambda + 2n)\left(D - \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial x}\,dx\right),$$

und die dem anderen Ende von der nach rechts gelegenen Masse des Stabes erteilte ist

$$(\lambda + 2n)\left(D + \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial x}\,dx\right),$$

so daß ein Übergewicht von Zug nach rechts von

$$(\lambda + 2n)\frac{\partial D}{\partial x}\,dx$$

vorhanden ist, und es ist, wenn σ der Querschnitt ist, die ganze auf das Element nach rechts hin ausgeübte Kraft

$$(\lambda + 2n)\frac{\partial D}{\partial x}\,\sigma\,dx.$$

Da ferner die Massenkraft pro Masseneinheit nach rechts längs x gleich X ist, gibt es eine ganze Massenkraft nach rechts vom Betrage

$X\varrho\sigma dx$, da $\varrho\sigma dx$ die Masse des Elementes ist. Die Summe dieser beiden Kräfte muß gleich $\varrho\sigma dx\ddot{u}$ sein, wenn es eine Beschleunigung des Elementes gibt, oder gleich null, wenn Gleichgewicht herrscht, so daß sich

$$(\lambda + 2n)\frac{\partial D}{\partial x} + \varrho X = \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

ergibt. In diesem Falle ist, wie beachtet werden muß:

$$D = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

629. Radiale Deformation. In dem anderen Falle, dem der radialen Dilatation eines schmalen Kegels, betrachten wir eine Schicht zwischen zwei Kugeloberflächen von den Radien r und $r + dr$, vom Scheitel des Kegels als Mittelpunkt aus beschrieben. Von dieser Schicht nehmen wir an, sie sei um eine Strecke w nach außen verschoben; es ist daher die radiale Dilatation im Mittelpunkte des Elementes $\partial w/\partial r$. Dies ist aber nicht die einzige Deformation in diesem Punkte. Es gibt zwei tangentiale Deformationen senkrecht zueinander und zum Radius, jede vom Betrage w/r, so daß die Dilatation

$$\frac{\partial w}{\partial r} + 2\frac{w}{r}$$

beträgt. Um dies zu beweisen, ist es nur nötig, die Schicht von der Dicke dr zu betrachten, wenn sie in ihrem Mittelpunkte einer radialen Verrückung w unterworfen wird. Die radiale Verrückung beträgt bei der inneren Fläche

$$w - \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial r}dr,$$

bei der äußeren

$$w + \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial r}dr.$$

Daher wird die äußere Fläche im Verhältnis zur inneren um eine Streck $\partial w/\partial r . dr$ verschoben, so daß die Dicke der Schicht

$$dr + \frac{\partial w}{\partial r}dr$$

geworden ist. Aber der Querschnitt der Schicht ist durch ihre Verschiebung längs der Kegelaxe um die Strecke w im Verhältnis von $(r + w)^2$ zu r^2, d. h. im Verhältnis von $(1 + 2\,w/r) : 1$ vergrößert worden.

Das Verhältnis des neuen Volumens des Elementes zum alten ist

$$\left(1 + \frac{\partial w}{\partial r}\right)\frac{\left(1 + \frac{2\,w}{r}\right)}{1},$$

so daß, da w klein ist, die Zunahme der Volumeneinheit

$$\left(1 + \frac{\partial w}{\partial r}\right)\left(1 + 2\,\frac{w}{r}\right) - 1 = \frac{\partial w}{\partial r} + 2\,\frac{w}{r}$$

beträgt. Dies ist die räumliche Dilatation. Folglich ist nach Gl. (64), wenn r in der z-Richtung genommen wird (da die Rotationen offenbar null sind):

$$(\lambda + 2n)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + 2\,\frac{w}{r}\right) + \varrho Z = \varrho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \cdot \cdot \; (66)$$

wo Z die nach außen gerichtete Massenkraft pro Masseneinheit im Mittelpunkte des Elementes ist. Wenn der deformierte Körper im Gleichgewichte ist, so ist $\ddot{w} = 0$, und es ist dann:

$$(\lambda + 2n)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + 2\,\frac{w}{r}\right) + \varrho Z = 0 \quad . \; . \; . \; (67)$$

630. Deformation einer Kugelschale unter gegebenen inneren und äußeren Drucken. Ein sehr wichtiger Fall dieser Gleichung ist derjenige, in welchem $Z = 0$ ist, d. h. in welchem eine Substanz, auf die keine Massenkräfte wirken, radialer Deformation und den sie begleitenden tangentialen Deformationen unterworfen wird. Dies ist z. B. der Fall einer isotropen Kugelschale, die einem auf ihre äußere und innere Oberfläche wirkenden Drucke unterworfen wird. In diesem Falle ist die durch die radiale Verrückung erfüllte Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + 2\,\frac{w}{r}\right) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (68)$$

Die vollständige Lösung dieser Gleichung ist

$$w = Ar + \frac{B}{r^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (69)$$

wo A und B Konstanten sind. Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial w}{\partial r} = A - \frac{2B}{r^3}, \quad \frac{w}{r} = A + \frac{B}{r^3},$$

und daher nach Gl. (57) der radiale Druck

$$R = \lambda\left(\frac{\partial w}{\partial r} + 2\,\frac{w}{r}\right) + 2n\,\frac{\partial w}{\partial r} = (3\lambda + 2n)A - 4n\,\frac{B}{r^3} \; \cdot \cdot \cdot \; (70)$$

und der Tangentialdruck

$$P = \lambda\left(\frac{\partial w}{\partial r} + 2\,\frac{w}{r}\right) + 2n\,\frac{w}{r} = (3\lambda + 2n)A + 2n\,\frac{B}{r^3} \; \cdot \cdot \cdot \; (71)$$

Der äußere und der innere Radius seien r_1 und r_0, der äußere und der innere Druck p_1 und p_0; dann hat man für die Bestimmung von A und B die Gleichungen:

$$p_1 = -(3\lambda + 2n)A + 4n\frac{B}{r_1^3}$$

$$p_0 = -(3\lambda + 2n)A + 4n\frac{B}{r_0^3}$$

und findet demnach

$$A = \frac{1}{3\lambda + 2n}\,\frac{p_0 r_0^3 - p_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}, \qquad B = \frac{p_0 - p_1}{4n}\,\frac{r_0^3 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}.$$

Also ist die radiale Verrückung im Abstande r vom Mittelpunkte

$$w = \frac{r}{r_1^3 - r_0^3}\left[\frac{p_0 r_0^3 - p_1 r_1^3}{3\lambda + 2n} + \frac{p_0 - p_1}{4n}\,\frac{r_0^3 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}\,\frac{1}{r^3}\right] \quad \ldots \quad (72)$$

und die radiale Deformation:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{r_1^3 - r_0^3}\left[\frac{p_0 r_0^3 - p_1 r_1^3}{3\lambda + 2n} - \frac{p_0 - p_1}{2n}\,\frac{r_0^3 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}\,\frac{1}{r^3}\right] \quad \ldots \quad (73)$$

Die tangentiale Deformation w/r ist ohne weiteres in Gl. (72) gegeben.

Diese Ergebnisse werden bei der Erörterung einiger von Regnault und anderen gefundener Ergebnisse über die Kompressibilität von Flüssigkeiten von Nutzen sein, die im zweiten Bande behandelt werden sollen. Ferner spielt die hier betrachtete Deformation bei Thermometerkugeln eine wichtige Rolle; allerdings sind die Thermometerkörper gerade bei feineren Instrumenten keine Kugeln, sondern nähern sich mehr zylindrischer Gestalt; man kann aber das obige Problem leicht auch für den Hohlzylinder lösen (s. § 631) und dann beide Fälle in geeigneter Weise kombinieren.

Was schließlich das Problem der Deformation einer Vollkugel unter der Wirkung ihrer eigenen Schwere betrifft, so ist dasselbe wichtig im Zusammenhange mit der Physik der Erde und leicht zu lösen.

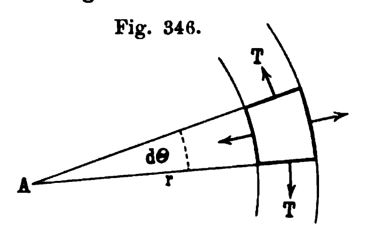
631. Zylindrische Röhre. Steifwerden eines biegsamen Rohres durch hydraulischen Druck. Betrachten wir jetzt ein durch koaxiale gerade zylindrische Oberflächen und flache oder runde Enden begrenztes Rohr. Der innere Radius des Zylinders sei r_0, der äußere r_1, der innere Druck p_0, der äußere p_1. Ferner sei angenommen, was tatsächlich annähernd der Fall ist, daß der von den Drucken an jedem Ende auf die Rohrwandungen ausgeübte Zug $\pi(p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2)$ gleichförmig über den Querschnitt verteilt ist, so daß sein Betrag pro Flächeneinheit

$$\frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}$$

ist. Es sei dann ferner R der radiale Druck (wie vorher numerisch positiv gedacht, wenn es ein Zug ist), T der peripherische Druck oder „Wandungsdruck“, wie er häufig genannt wird, und P der Längszug, alle in einem Punkte der Rohrwandung in der Entfernung r von der

Axe. Betrachten wir das Gleichgewicht eines Elementes (Fig. 346), das begrenzt ist durch zwei koaxiale Oberflächen von den Radien $r - \frac{1}{2}dr$ und $r + \frac{1}{2}dr$, zwei radialen Flächen, die von der Axe A aus einen Winkel $d\theta$ miteinander bilden, und zwei zur Axe senkrechten Flächen vom Abstande eins voneinander. Die radiale Kraft nach innen auf die innere gekrümmte Oberfläche des Elementes ist

Fig. 346.



$$Rr\,d\theta - \frac{1}{2}\frac{d(Rr)}{dr}\,.\,dr\,.\,d\theta,$$

die radiale Kraft nach außen auf die andere gekrümmte Seite ist

$$Rr\,d\theta + \frac{1}{2}\frac{d(Rr)}{dr}\,dr\,.\,d\theta,$$

so daß ein Überschuß an äußerer Kraft vom Betrage

$$\frac{d(Rr)}{dr}\,dr\,d\theta$$

vorhanden ist. Der Wandungsdruck ergibt (§ 205) eine Kraft nach innen vom Betrage

$$\frac{T\,dr}{r}\,r\,d\theta$$

oder $T\,dr\,d\theta$. Daraus ergibt sich für das Gleichgewicht die Bedingung

$$\frac{d(Rr)}{dr} = T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Wenn w, wie vorher, die radiale Verrückung bezeichnet, so sind die radialen und tangentialen Deformationen $\partial w/\partial r$ und w/r; die Längsdeformation sei g. Dann kann man die Gleichungen der Beziehungen zwischen Deformationen und Kräften in der Form

$$\left.\begin{aligned} R &= \lambda\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} + g\right) + 2n\frac{\partial w}{\partial r} \\ T &= \lambda\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} + g\right) + 2n\frac{w}{r} \\ P &= \lambda\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} + g\right) + 2ng \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

schreiben. Der Wert von P ist gegeben, und es ergibt sich daher aus der dritten Gleichung

$$g = -\frac{\lambda}{\lambda + 2n}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r}\right) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

wo C die Konstante $P/(\lambda + 2n)$ ist. Benutzt man diesen Wert von g

in der ersten und zweiten der Gl. (75) und substituiert hieraus in Gl. (74), so erhält man leicht die Bedingung

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{w}{r}\right)}{\partial r}=0$$

oder

$$\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{w}{r}=2c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

wo c eine Konstante ist. Diese Gleichung ergibt, wie man durch rückwärtiges Differenzieren ohne weiteres findet:

$$w=cr+\frac{c'}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

wo c' eine zweite Konstante ist.

In der inneren Oberfläche ist $r=r_0$ und $-R=p_0$, in der äußeren $r=r_1$ und $-R=p_1$. Setzt man diese Werte von r und R [mit dem entsprechenden, durch Gl. (78) gegebenen Werte von w] der Reihe nach in die erste der Gl. (75) ein, so erhält man zwei Gleichungen zur Bestimmung von c und c'. Der Leser wird, wenn er bedenkt, daß $3\lambda+2n=3k$ und

$$P=\frac{p_0 r_0^2-p_1 r_1^2}{r_1^2-r_0^2}$$

ist, leicht nachweisen, daß

$$c=\frac{1}{3k}\,\frac{p_0 r_0^2-p_1 r_1^2}{r_1^2-r_0^2}, \quad c'=\frac{1}{2n}\,\frac{p_0-p_1}{r_1^2-r_0^2}\,r_0^2 r_1^2$$

ist. Hiernach ergibt Gleichung (78)

$$w=\frac{1}{3k}\,\frac{p_0 r_0^2-p_1 r_1^2}{r_1^2-r_0^2}\,r+\frac{1}{2n}\,\frac{p_0-p_1}{r_1^2-r_0^2}\,r_0^2 r_1^2\,\frac{1}{r} \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

und folglich

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{1}{3k}\,\frac{p_0 r_0^2-p_1 r_1^2}{r_1^2-r_0^2}-\frac{1}{2n}\,\frac{p_0-p_1}{r_1^2-r_0^2}\,r_0^2 r_1^2\,\frac{1}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

$$\frac{w}{r}=\frac{1}{3k}\,\frac{p_0 r_0^2-p_1 r_1^2}{r_1^2-r_0^2}+\frac{1}{2n}\,\frac{p_0-p_1}{r_1^2-r_0^2}\,r_0^2 r_1^2\,\frac{1}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

$$g=\frac{1}{3k}\,\frac{p_0 r_0^2-p_1 r_1^2}{r_1^2-r_0^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

Die Deformation in der Wandung besteht daher aus einer gleichförmigen Dilatation vom Betrage

$$\frac{p_0 r_0^2-p_1 r_1^2}{k\,(r_1^2-r_0^2)}$$

und einer Scherung in jedem Querschnitte des Rohres vom Betrage

$$(p_0-p_1)\,\frac{r_0^2 r_1^2}{n\,(r_1^2-r_0^2)\,r^2}\,.$$

Die Dilatation wird negativ sein, d. h. es wird eine Kontraktion der Substanz der Wandung stattfinden, wenn $p_1 r_1^2 > p_0 r_0^2$. Ist also $p_1 > p_0$, so wird an allen Wandstellen Volumenverminderung eintreten. Wenn anderseits nur innerer Druck wirkt ($p_1 = 0$), so tritt stets und überall Dilatation ein.

Wenn die Dicke der Wände groß ist im Vergleich mit dem inneren Radius und der ganze Druck ein innerer Druck ist, so ist die Scherung der inneren Fläche p_0/n. Es ist also, soweit die Nachgiebigkeit gegen diese Scherung in Betracht kommt, dadurch, daß man das Rohr sehr stark oder von sehr kleinem Lumen macht, wenig Vorteil zu gewinnen.

Gl. (75) ergibt für $p_1 = 0$

$$T = p_0 r_0^2 \cdot \frac{1 + \frac{r_1^2}{r^2}}{r_1^2 - r_0^2},$$

also einen Zug. Folglich kann das Rohr zum Widerstande gegen inneren Druck dadurch gefestigt werden, daß man Reifen umlegt, die ihm Wandungsdruck erteilen. Innerer Druck erzeugt Erleichterung des inneren Rohres von dieser Deformation und strebt dahin, die äußeren Teile zu strecken. Der Widerstand der Kanonen gegen das Bersten wird auf diese Weise verstärkt.

Für die radiale Deformation ergibt sich, wenn es keinen äußeren Druck gibt,

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{p_0 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}\left(\frac{1}{3k} - \frac{1}{2n}\frac{r_1^2}{r^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

und wenn es keinen inneren Druck gibt,

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\left(\frac{1}{3k} - \frac{1}{2n}\frac{r_0^2}{r^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

Für die meisten Stoffe ist k größer als n und folglich $\frac{1}{3k} < \frac{1}{2n}$; und somit ist, da $r < r_1$ ist, der Wert $\partial w/\partial r$, für den äußeren Druck null, immer negativ, d. h. es gibt in diesem Falle immer radiale Kontraktion. Wenn es anderseits keinen inneren Druck gibt und die Wandung dick genug ist, kann $r_0^2/r^2 < 2n/(3k)$ sein, und die radiale Deformation ist außerhalb des Zylinders vom Radius $r_0\sqrt{(3k)/(2n)}$ eine Kontraktion, dagegen in allen Punkten innerhalb dieses Zylinders eine Ausdehnung. Wenn aber die Wandung nicht dick genug ist, so ist die radiale Deformation in allen Punkten eine Kontraktion.

Für Stahl ist k ungefähr 1500×19^9 Dynen pro Quadratzentimeter, $n = 730 \times 10^9$ Dynen pro Quadratzentimeter, also ist für Stahl $3k/2n$ rund gleich 3. Für Flintglas nähert sich das Verhältnis mehr dem Werte 2,6.

Es ist in diesem Zusammenhange beachtenswert, daß ein sonst biegsames Rohr mit Hilfe hydrostatischen Druckes im Innern steif

gemacht werden kann. Wenn z. B. ein Rohr von kreisförmigem Querschnitt an den Enden verschlossen und ihm der innere Druck p erteilt würde, so würde eine Dehnung vom Betrage

$$\frac{p r_0^2}{3k(r_1^2 - r_0^2)}$$

in der Längsrichtung des Rohres erzeugt werden. Wenn dann Sorge getragen würde, das Rohr immer gestreckt zu erhalten, so könnte es als Stütze dienen, um einen wirkenden Druck auszuhalten. Auch würde das Rohr der Durchbiegung so lange widerstehen, bis der resultierende Druck so groß wäre, daß er die Dehnung infolge des inneren Druckes überträfe. Die Steifigkeit der gefüllten Pneumatik eines Fahrrades ist ein Beispiel dafür. Fitz-Gerald hat darauf hingewiesen, daß man unter Benutzung dieser Prinzipien leicht transportierbare Stützen für militärische Brücken und andere Bauten herstellen könnte.

---

632. Torsion eines zylindrischen Stabes. Man wird ohne Schwierigkeit einsehen, daß einem Würfel, wie oben § 346 angedeutet wurde, dadurch eine reine Scherungsdeformation erteilt werden kann, daß man in einem Stück des Würfels eine Schar von Flächen, die mit vier Würfelkanten parallel sind, um eine Strecke verschiebt, die ihren senkrechten Abständen von einer der beiden Endflächen proportional ist. Die eine Diagonale wird verlängert, die andere verkürzt, und zwar um einen Betrag, der gleich dem halben Scherungsmaße ist, während sie beide senkrecht zueinander bleiben. Der einzige Unterschied zwischen dieser Scherung und der in § 600 beschriebenen liegt darin, daß sich die Lage der Diagonalen ändert, indem sie sich (Fig. 192) um die kleinen Winkel ABA' oder CDC' drehen.

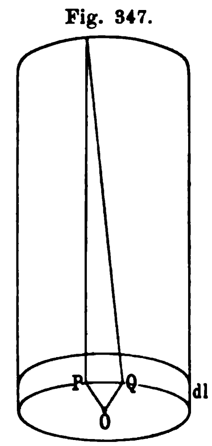
Jedem Teile eines geraden zylindrischen Stabes aus einem Material, dessen elastische Eigenschaften in allen zur Länge senkrechten Richtungen die gleichen sind, kann man sich eine Deformation dieser Art folgendermaßen erteilt denken. Die Enden des Stabes seien Flächen senkrecht zur Länge und jede von ihnen mit einer starren Platte bedeckt, die mit unnachgiebigem Zement im ganzen fest auf die Endfläche aufzementiert ist. Dann denke man sich, bei Erhaltung der geraden Gestalt des Stabes, etwa durch senkrechte Aufhängung oder Aufstellung die eine Endplatte festgehalten und die andere um die Stabaxe um einen Winkel θ gedreht. Dann wird jeder Querschnitt in seiner eigenen Ebene um einen seiner Entfernung vom festen Ende proportionalen Winkel gedreht werden, und es wird durch den ganzen Stab hindurch die Scherung gleichmäßig verteilt sein.

Diese Art, eine Scherung zu erteilen, würde in der Wirklichkeit nicht angängig sein. Gewöhnlich wird eine Querstange auf das eine Stabende fest aufgelötet oder verklammert, während das andere durch Auflöten oder Verklammern auf einer festen Unterlage befestigt wird.

Dann wird die Querstange gedreht und der Stab der Scherung unterworfen, die, wenngleich in der Nähe der Befestigungsstellen sicherlich nicht gleichförmig, doch im übrigen Stabe gleichförmig verteilt ist und tatsächlich, wenn der Stab lang ist, ohne schwerwiegenden Fehler in dem ganzen Stücke zwischen den Befestigungsstellen als gleichförmig angenommen werden kann.

633. Scherung in einem Stabquerschnitte. Es soll nun die Verteilung der Scherung über jeden Querschnitt untersucht werden. Es ist nochmals darauf aufmerksam zu machen, daß es sich entweder um einen festen Stab mit kreisförmig zylindrischer Umgrenzung oder um eine durch zwei koaxiale kreiszylindrische Flächen begrenzte Röhre handelt. Es ist klar, daß, wenn der Stab aus gleichförmig elastischem Material besteht, die Deformation gleichförmig verteilt sein muß, da sonst kein Gleichgewicht bestehen könnte. Denn wenn die Deformation in einem Querschnitte von der in einem anderen verschieden wäre, so würde der in einem dieser Querschnitte dem Stabstück zwischen ihnen von der Masse jenseits des Querschnittes erteilte Druck nicht durch den dem anderen Ende auf dieselbe Weise erteilten Druck ausgeglichen werden. Es ist daher der Winkel, um den ein Querschnitt relativ zu einem anderen Querschnitt im Abstande eines von ihm nach einer oder der anderen Seite um die Axe gedreht worden ist: θ/l, wenn l die Stablänge ist. Diese Deformation eines Stabes heißt Drillung oder Torsion.

Fig. 347.



Betrachten wir in einem beliebig gewählten Querschnitte zwei konzentrische Kreise von den Radien r und $r + dr$ um den Schnittpunkt der Axe mit dem Querschnitt als Mittelpunkt. Der Radius OP nach einem Punkte P eines Querschnittes (Fig. 347) ist nach Q gedreht worden, so daß der Winkel $POQ = \theta$ ist. Folglich ist der Winkel, um den sich ein Radius nach P relativ zum Querschnitt im Abstande dl gedreht hat, $\theta dl/l$. Die entsprechende Strecke, um die sich P in der Ebene des Querschnittes bewegt hat, ist demnach $r\theta dl/l$, und der Winkel, den eine vorher mit der Axe parallele Linie durch P jetzt mit der Axe bildet, ist $r\theta/l$. Dies ist das Maß der Scherung, die dem kleinen angenäherten Parallelepipedon erteilt worden ist, welches durch die zwei um dl voneinander abstehenden Querschnitte, die beiden radialen Ebenen, die im Kreise vom Radius r den Abstand

$$r\,d\varphi = r\theta\,\frac{dl}{l}$$

voneinander haben, und die beiden koaxialen Flächen von den Radien r und $r + dr$ begrenzt wird. Somit ist die Scherung in einem Querschnittspunkte dem Abstande dieses Punktes von der Axe proportional. Dieses Verhalten ist darum von Bedeutung, weil ein Stab einer so starken Drillung unterworfen werden kann, daß seine Oberfläche über ihre Elastizitätsgrenze hinaus deformiert wird, während die Deformation im größeren Teile der inneren Masse sehr wohl innerhalb dieser Grenze bleibt.

634. Torsion und Torsionsspannung. Um die Verrückungskomponenten zu erhalten, denken wir uns x- und y-Axen vom festen Axenende des Zylinders und parallel zum Querschnitt gezogen, während die Axe selbst die z-Axe ist. Die Drillung auf die Einheit der Länge, also θ/l, sei τ. Die Verrückungen u, v, w längs dieser Axen infolge der Drillung sind alsdann $u = -yz\tau$, $v = xz\tau$, $w = 0$. Mithin sind die Längsdilatationen e, f, g, d. h. $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial y$, $\partial w/\partial z$, alle null. Ferner ist

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = x\tau \\ b &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -y\tau \\ c &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \cdots \quad (85)$$

Nach Gl. (62) sind anderseits die Spannungen

$$P = Q = R = 0,\quad S = nx\tau,\quad T = -ny\tau,\quad U = 0 \quad . . (86)$$

Um die Spannungen in einem Elemente zu finden, das wir als gleichförmiger Drillung unterworfen annehmen dürfen, stellen wir uns ein kleines Parallelepipedon des Körpers vor, dessen eine Kante dx, dessen zweite dy und dessen dritte dz ist, alle drei Kanten parallel den Axen vom Punkte x, y, z aus gezogen. Nach Fig. 340 ist S, das aus Y_z und Z_y besteht, erstens ein Tangentialdruck auf die der Spannung unterworfene Substanz, parallel zur y-Axe und auf die zur z-Axe senkrechten, d. h. mit der yx-Ebene parallelen Flächen des Elementes wirkend, und zweitens ein Tangentialdruck, parallel zur z-Axe und auf die zur y-Axe senkrechten, d. h. mit der xz-Ebene parallelen Flächen wirkend. Ebenso ist T der Inbegriff von Z_x und X_z, also erstens ein Tangentialdruck, parallel zu Oz und auf das mit der yz-Ebene parallele Flächenpaar wirkend, und zweitens ein Tangentialdruck, parallel mit Ox und auf die mit der xy-Ebene parallelen Flächen wirkend. Selbstverständlich sind die Kräfte auf gegenüber liegende Flächen entgegengesetzt gerichtet, wie das in Fig. 340 angegeben ist. Sie sind notwendig, um die Substanz in einem Spannungszustande zu erhalten, und werden dem Elemente von der außer ihm liegenden Substanz erteilt,

abgesehen von der Begrenzungsoberfläche, wo sie von außen, d. h. von den außerhalb befindlichen Körpern herrühren.

Betrachten wir die Spannung im Elemente in Bezug auf eine Ebene parallel mit der z-Axe, und so gelegen, daß ihre Normale mit der x-Axe einen Winkel α bildet. Die Richtungskosinus einer solchen Ebene sind $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, 0. Folglich ist nach Gl. (32)

$$F = 0,\ G = 0,\ H = T\cos\alpha + S\sin\alpha$$
$$= -n\tau\,(y\cos\alpha - x\sin\alpha)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (87)$$

Die einzige Spannung ist also eine Scherungsspannung in der Ebene und parallel zur z-Axe.

Nun seien x und y die Koordinaten des Schnittes dieser Ebene mit dem Rande des Querschnittes. Soll die Mantelfläche des Zylinders von wirksamer Spannung frei bleiben, so muß

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = 0$$

sein, d. h. jede Normale zur Mantelfläche muß durch die z-Axe hindurchgehen. Offenbar ist die einzige Kurve, welche diese Eigenschaft besitzt, der Kreis. Darum muß der Zylinder, um unter reiner Torsion ohne Tangentialdruck auf die Mantelfläche im Gleichgewicht zu sein, von kreisförmigem Querschnitt sein.

635. Moment der tangentialen Spannungen in einem Querschnitte in Bezug auf die Axe. Torsionsschwingungen. Die für die betrachtete Scherung im Falle des geraden Kreiszylinders erforderliche tangentiale Spannung ist also $nr\theta/l$, ihre Richtung ist in jedem Punkte senkrecht zum Radius. Diese tangentiale Spannung ergibt eine ganze Tangentialkraft auf eine Fläche des in § 633 erwähnten Elementes im Betrage von $nr\theta . dr . r d\varphi/l$ oder $nr^2 dr d\varphi . \theta/l$, und das Moment der Kraft um die Axe ist $nr^3 dr d\varphi . \theta/l$. Das Moment um die Stabaxe der auf die Elemente des Ringes zwischen den zwei Kreisen von den Radien r und $r + dr$ wirksamen tangentialen Spannungen ist daher $2\pi nr^3 dr\,\theta/l$, und das Gesamtmoment für den Querschnitt ist $\frac{1}{2}\pi n r^4\,\theta/l$.

Dies ist, über jeden Querschnitt genommen, das ausgeübte Moment der inneren Kräfte, die bestrebt sind, den Draht in seinen zwanglosen Zustand zurückzubringen. Wird also der Draht senkrecht aufgehängt und ein Querstab, oder besser ein mit dem Draht koaxialer massiver Zylinder, an seinem unteren Ende starr befestigt, und wird dieses untere Ende mit dem daran hängenden Stabe oder Zylinder relativ zum oberen Ende um den Winkel θ gedreht, so ist das Gesamtmoment der dahin wirkenden Kräfte, daß der Zylinder wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkomme, gleich:

$$\frac{\pi}{2}\, n r^4 \frac{\theta}{l}\,.$$

Wird das System sich selbst überlassen, so wird der Draht sich aufdrillen, der Zylinder wird eine Winkelbeschleunigung erfahren, bis das von der Drillung herrührende, auf ihn wirksame Kräftepaar null geworden ist, und wird sich alsdann, entsprechend dem Beharrungsvermögen, in derselben Richtung weiterdrehen, bis er durch die vom Anwachsen der Drillung in der entgegengesetzten Richtung herrührende, entgegengesetzte Beschleunigung zum Stillstande gebracht wird. Dann wird er umkehren u. s. w., und es werden Schwingungen von bestimmter Periode ausgeführt werden.

Zur Vereinfachung des Problems könnte die Bewegung als so langsam angenommen werden, daß der Draht in jedem Augenblicke an allen Stellen die gleiche Drillung hat. Genau genommen aber gilt es, eine Welle von Drillungsänderung zu betrachten, die beständig den Draht hinaufläuft und nach der Reflexion am festen Ende zurückkehrt, so daß der Draht in einem Zustande stationärer Torsionsschwingung erhalten wird. Dieser Punkt kann nur sehr kurz behandelt werden.

Nehmen wir nun für den Augenblick die z-Axe vom freien zum festen Ende gehend an und betrachten wir zwei Querschnitte, um dz auseinander liegend und vom Abstande z vom unteren Drahtende. Die Drillung im unteren der beiden Querschnitte sei $\partial\theta/\partial z$; dann ist sie im oberen Querschnitte

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\,dz.$$

Folglich ist das auf das Drahtstück zwischen den Querschnitten wirksame resultierende Kräftepaar nach den obigen Darlegungen

$$\frac{1}{2}\,\pi n r^4\,\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\,dz.$$

Da anderseits das Trägheitsmoment der Schicht um die Drahtaxe

$$\pi r^2 \varrho\, dz \cdot \frac{r^2}{2} = \pi r^4 \varrho\,\frac{dz}{2}$$

ist, so ist die verhältnismäßige Änderung des Momentes der Bewegungsgröße der Scheibe

$$\frac{1}{2}\,\pi \varrho r^4 dz\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}.$$

Indem man diesen Ausdruck dem zuerst erhaltenen für das Kräftepaar gleichsetzt, erhält man als Gleichung der Ausbreitung einer Torsionswelle längs des Drahtes:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{n}{\varrho}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \quad \text{. . . . .} \quad (88)$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Torsionswelle längs des Drahtes ist also, mit Rücksicht auf die bekannte Bedeutung des Faktors a in der allgemeinen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2},$$

in unserem Falle

$$a = \sqrt{\frac{n}{\varrho}},$$

gleich der Quadratwurzel aus dem Verhältnisse des Gestaltsmoduls zur Dichte der Substanz.

Nun sei M die Masse des am unteren Drahtende befestigten Schwingungserregers und k sein Trägheitsradius. Die verhältnismäßige Änderung des Momentes der Bewegungsgröße des Schwingungserregers in irgend einem Augenblicke, d. h.

$$M k^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

muß dem Kräftepaare am unteren Ende, das aus der dort bestehenden Drillung herrührt, gleich sein. Es ergibt sich also

$$M k^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \pi n r^4 \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

für $z = 0$. Ferner ist am oberen Ende des Drahtes, wo $z = l$ ist,

$$\theta = 0.$$

Diese beiden Bedingungen ergeben mit Gl. (88) die Bewegung des Drahtes und des Erregers. Es werde nun wie oben § 576 angenommen, daß (m und c, A und B Konstanten)

$$\theta = \left[A \cos\left(\frac{m}{c} z\right) + B \sin\left(\frac{m}{c} z\right)\right] \cos(mt + \varepsilon)$$

eine Lösung von Gl. (88) sei, so daß jeder Querschnitt des Drahtes (und des Schwingungserregers am unteren Ende) in einfachen Sinusschwingungen von der Periode $T = 2\pi/m$ schwingt. Man sieht leicht ein, daß der Wert von c gleich $\sqrt{n/\varrho}$, d. h. gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit a der Welle längs dem Drahte ist. Für A und B endlich ergeben die beiden Endbedingungen die Beziehungen:

$$A = -\frac{\pi n r^4}{2 c M k^2 m} B \text{ und } A = -B \operatorname{tg}\left(\frac{m}{c} l\right),$$

und wir erhalten demnach für m ($= 2\pi/T$) die Gleichung

$$\operatorname{tg}\left(\frac{m}{c} l\right) = \frac{\pi r^4 n}{2 c M k^2 m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

Ist Mk^2 sehr groß, so wird ml/c sehr klein sein, und man kann $\operatorname{tg} ml/c = ml/c$ setzen. Folglich wird, da

$$\frac{A}{B} = -\frac{\sin \frac{ml}{c}}{\cos \frac{ml}{c}}$$

ist, die Lösung, wenn B' eine andere Konstante ist,

$$\theta = B' \sin \frac{m}{c} (l - z) \cos (m t + \varepsilon)$$

$$= B' \frac{m}{c} (l - z) \cos (m t + \varepsilon) \quad \ldots \ldots \quad (90)$$

Hieraus folgt, daß für jeden gegebenen Wert von t der Winkel, um den ein Querschnitt relativ zum oberen Ende gedreht wird, dem Abstande des Querschnittes von diesem Ende proportional ist, d. h. die Drillung ist in jedem Augenblicke, solange die Schwingung dauert, gleichförmig. Die Länge des Drahtes stellt tatsächlich nur einen kleinen Teil der stationären Welle dar, in welcher das feste Ende ein Knoten ist. Wenn man $m l / c$ für $tg\,(m l / c)$ setzt, so erhält man aus Gl. (89)

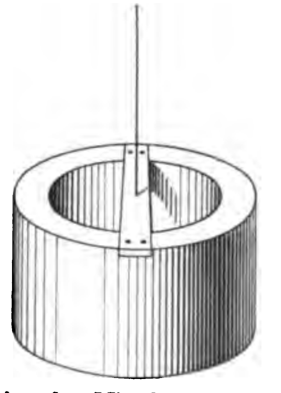
$$4 \pi^2 \frac{l}{T^2} = \frac{\pi r^4 n}{2 M k^2};$$

folglich ist

$$n = \frac{8 \pi M k^2 l}{r^4 T^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (91)$$

636. Experimentelle Bestimmung des Gestaltsmoduls. Es kann demnach durch Beobachtung der Torsionsschwingungsperiode eines Schwingungskörpers von bekanntem Trägheitsmomente, der an einem Stabe oder Draht befestigt ist, der Gestalts- oder Starrheitsmodul eines Materials bestimmt werden.

Fig. 348.



Ein Einwand gegen die Brauchbarkeit dieser Methode besteht in dem Umstande, daß die vierte Potenz des Radius des Drahtes in der Formel für n auftritt. Jegliche Ungenauigkeit in der Messung von r wird in r^4 enorm vergrößert erscheinen, es wird z. B. eine Ungenauigkeit von 1 Proz. in r^4 auf ungefähr 4 Proz. steigen. Man muß also einen recht empfindlichen Dickenmesser anwenden, die Dicke des Drahtes in verschiedenen Richtungen sowie an verschiedenen Stellen messen und aus allen Zahlen das Mittel nehmen.

Eine häufig benutzte Form des Schwingungskörpers ist die eines Hohlzylinders aus Messing oder Kupfer (Fig. 348), der so befestigt ist, daß Zylinderaxe und Draht in einer Linie verlaufen. Der Zylinder hängt an einer horizontalen Querstange, die mit dem unteren Drahtende verklammert oder verlötet ist. Ein (in der Zeichnung nicht veranschaulichtes) einfaches Befestigungsmittel liefern zwei, der Querstange nahe angepaßte Vertiefungen, je eine auf jeder Seite des Zylinders. Die Stangenenden ragen durch diese Löcher hindurch nach außen hervor, und zwei in die obere Stangenfläche eingeschnittene Ritzen

nehmen die oberen Kanten der Vertiefungen auf, so daß es bei den Schwingungen keine Bewegung des Zylinders relativ zum unteren Drahtende gibt.

Das Trägheitsmoment eines Schwingungskörpers von dieser Form kann sehr leicht bestimmt werden. Das Trägheitsmoment des Zylinders von der Masse M_c und innerem und äußerem Radius r und r' ist, wie unschwer gefunden wird,

$$M_c \frac{r^2 + r'^2}{2},$$

wobei mit Leichtigkeit eine Korrektion für die als Öffnungen für die Querstange herausgeschnittenen Stücke gemacht werden kann. Das Trägheitsmoment der Stange, wenn sie von der Masse m, der Länge $2l$ und der Breite $2b$ ist, beträgt

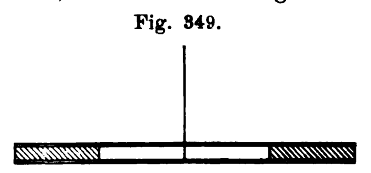
$$m \frac{l^2 + b^2}{3}.$$

Für die zur Aufnahme der oberen Kanten der Löcher bestimmten Einschnitte an den Stangenenden wird die Korrektion am besten in Verbindung mit der Korrektion für die Löcher in dem Zylinder gemacht, indem die Tiefe der Ritzen der vertikalen Breite der Löcher hinzugefügt wird. Dann kann das Trägheitsmoment der Stange so genommen werden, als ob die Ritzen nicht vorhanden wären. Der in Gl. (88) einzusetzende Wert von Mk^2 ist alsdann

$$M_c \frac{r^2 + r'^2}{2} + m \frac{l^2 + b^2}{3}.$$

637. Maxwellsche „Schwingungsnadel". Eine andere Methode, nach der man vorgehen kann, stellt die Anwendung der Maxwellschen Schwingungsnadel (Fig. 349) dar. Dieses Instrument besteht aus einer hohlen Messingröhre, in die vier gleiche Messingröhren, jede von ein Viertel der Länge der großen Röhre, eingepaßt werden können. Zwei von diesen sind leer, die beiden anderen mit Blei gefüllt. Die beiden leeren Röhren werden in die Mitte, die beiden gefüllten an den Enden eingelegt. Die äußere Röhre wird mit dem Drahte starr verbunden, indem man diesen an einem aus dem Röhrenende hervorragenden starren Stäbchen verlötet oder festklammert, und es wird die Schwingungsperiode bestimmt. Darauf werden die gefüllten Röhrchen in die Mitte und die leeren an die Enden gebracht, und die Periode wird von neuem bestimmt. Wenn m die Masse des Bleies in jedem der kleinen gefüllten Zylinder, d. h. der Massenunterschied zwischen den gefüllten und den leeren Zylindern ist, und $2s$ die

Fig. 349.



Länge eines jeden der vier Zylinder, so ist der Unterschied der Trägheitsmomente μ_1 und μ_2 der beiden Anordnungen

$$\mu_1 - \mu_2 = 16\, m s^2.$$

Wenn die Perioden in den beiden Experimenten T_1 und T_2 sind, so ergibt die Formel für n:

$$n = \frac{8\pi\mu_1 l}{r^4 T_1^2} = \frac{8\pi\mu_2 l}{r^4 T_2^2} = \frac{8\pi(\mu_1 - \mu_2) l}{r^4 (T_1^2 - T_2^2)} = \frac{128\pi m l s^2}{r^4 (T_1^2 - T_2^2)}; \quad (92)$$

man braucht also die Trägheitsmomente selbst gar nicht zu kennen.

In entsprechender Weise kann man auch verfahren, wenn man einen massiven Querstab einmal für sich, das andere Mal mit an die Enden angeschraubten (nicht angehängten) Gewichten benutzt.

638. Torsionsmoment eines Stabes von kreisförmigem Querschnitt. Bis jetzt wurde angenommen, daß der um seine Axe gedrillte Zylinder ein gerader Kreiszylinder sei, und für das Torsionskräftepaar, das erforderlich ist, um ihm eine Drillung θ/l zu erteilen, wurde der Wert $\frac{1}{2}\pi n r^4 \theta/l$ gefunden. Der Faktor $\frac{1}{2}\pi r^4$ kann in die Form $\pi r^2 . r^2/2$ gebracht werden, wo πr^2 der Flächeninhalt des Querschnittes und $r^2/2$ das Quadrat des Trägheitsradius einer gleichförmigen Kreisscheibe um eine durch ihren Mittelpunkt hindurchgehende Axe senkrecht zu ihrer Ebene ist. Der Faktor $\frac{1}{2}\pi n r^4$ ist daher gleich dem Trägheitsmomente einer Scheibe vom Radius r und von der Masse n pro Flächeneinheit um ihre Axe. Dieser Faktor heißt das Torsionsmoment des Stabes. Es wurde zuerst von Coulomb nachgewiesen (und dieses Ergebnis ist durch spätere Experimente bestätigt worden), daß das elastische Kräftepaar der Drillung mit θ/l proportional ist, solange die Elastizitätsgrenze nicht überschritten ist; mit anderen Worten: das Hookesche Gesetz ist als gültig für Scherung bewiesen worden.

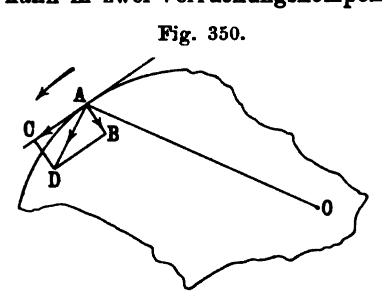
Man wird bemerken, daß ein vorgeschriebenes Torsionsmoment mit weniger Material erzielt werden kann, indem man statt des Stabes eine hohle Zylinderröhre von kreisförmigem Querschnitte benutzt. Indessen darf die Röhre nicht zu dünnwandig genommen werden, da sie sonst, wenn sie einem Biegungsdrucke unterworfen wird, zusammenklappen kann.

Die Tatsache, daß das Kräftepaar dem Produkte von n, dem Trägheitsmomente des Querschnittes um die Axe und der Drillung gleich ist, ist als Coulombsches Gesetz bezeichnet worden. Dieses Gesetz gilt aber nur für Stäbe und Röhren von kreisförmigem Querschnitt.

639. Torsion eines nicht kreisförmigen Zylinders. Verwerfung der Querschnitte. Das Trägheitsmoment des Querschnittes kann, wie sich aus dem Vorangegangenen schließen läßt, als Faktor lediglich benutzt werden, um das Torsionsmoment eines Zylinders von

kreisförmigem Querschnitte anzugeben. Denn nur in diesem Falle ist, wie angeführt, eine in einem Querschnitte von der Axe nach der Oberfläche gezogene Linie senkrecht zur Begrenzung des Querschnittes; in allen anderen Fällen ist das Problem wesentlich komplizierter, und das Torsionsmoment spielt keine einfache Rolle mehr. Betrachten wir etwa den in Fig. 350 gezeigten Fall; dort bildet die Linie OA einen stumpfen Winkel mit der Tangente AC an die Querschnittsbegrenzung in A. Eine Verrückung des Querschnittspunktes A senkrecht zu OA, also diejenige Art von Verrückung, welche stattfindet, wenn jeder Querschnitt in seiner eigenen Ebene um die Zylinderaxe gedreht wird, kann in zwei Verrückungskomponenten zerlegt werden, eine AB senkrecht zur Tangente in A und eine längs der Tangente AC an den Querschnitt. Die erste dieser Verrückungen ist eine Scherung der Substanz in der Richtung nach innen von der äußeren Seitenfläche des Zylinders. Um dies zu erreichen, muß, wie man aus § 634 ersieht, auf die Oberfläche tangentialer Druck ausgeübt werden, damit eine reine Torsionsdeformation, d. h. Drillung ohne Verwerfung der Querschnitte, bestehen könne. Wenn wir die x-Axe nach außen von der Zylinderaxe senkrecht zur Tangente in A, und die y-Axe nach vorn längs der Tangente in der Drillungsrichtung nehmen, so ist der Winkel α (§ 634) gleich null, und es ist nach Gl. (87) $H = -n\tau y$. Dies ist eine mit z parallele Tangentialkraft vom Betrage $n\tau y$ pro Flächeneinheit, längs der Seitenfläche und nach dem festen Ende zu gerichtet; letzteres deshalb, weil die positive Richtung der z-Axe in Fig. 350 vom Papier zum Leser, die in Rede stehende Kraft aber nach hinten geht. Es ist die zur Aufrechterhaltung der Ebenheit des Querschnittes notwendige Kraft. Wenn keine solche Kraft wirksam ist, wird jeder Punkt A des Querschnittes in der Richtung nach dem freien Ende verrückt werden, wenn die Rotation in der Pfeilrichtung stattfindet. Wenn also Fig. 351 den Querschnitt vom freien Ende aus gesehen darstellt, würde der Punkt A sich über das Papier erheben, und, wenn die Tangentialkraft in der Oberfläche nicht vorhanden wäre, würden Punkte zwischen A und O sich erheben, aber, je nach ihrer Lage, zu verschiedenen Höhen.

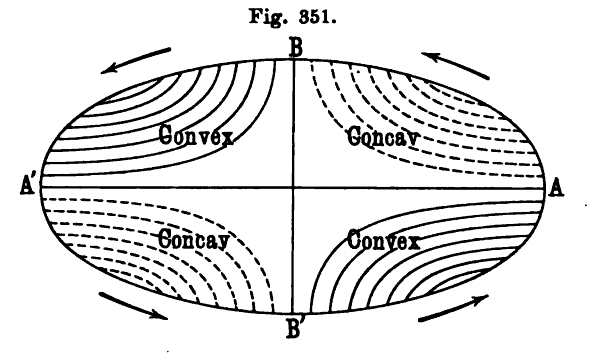
Fig. 350.



Anderseits würden in einem Teile des Querschnittes, in dem OAC ein spitzer Winkel ist, die verschiedenen Punkte unter die Papierebene herabgedrückt werden. Z. B. würde ein Querschnitt eines elliptischen Zylinders in abwechselnden Quadranten heruntergedrückt und gehoben werden, wie in Fig. 351 durch die gestrichelten und ausgezogenen Kurven angezeigt ist. Diese sind Schnittlinien des verworfenen Quer-

schnittes mit Ebenen senkrecht zur Zylinderaxe. Die Axen AA' und BB' verbleiben in einer Ebene; die Abstände, bis zu denen andere Punkte verschoben werden, liegen in der durch die Kurven angegebenen

Fig. 351.



Reihe, angefangen mit den äußersten gestrichelten Kurven, wo die größte Konkavität herrscht, bis zu den äußersten ausgezogenen Kurven, wo die größte Konvexität herrscht.

640. De St. Venantsche Theorie der Torsion. St. Venant hat eine Torsionstheorie gegeben, in der die Verwerfung der Schnitte in Rechnung gezogen ist. Die Verrückungen u, v sind wie in § 634 genommen, während w als eine Funktion von x, y angenommen wird, die nach der Natur der Begrenzung zu bestimmen ist. Folglich ist

$$u = -yz\tau, \quad v = xz\tau, \quad w = \varphi(x, y)$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

wie vorher. Jetzt ist aber

$$a = x\tau + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad b = -y\tau + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad c = 0 \quad . \quad . \quad (93)$$

Folglich ist

$$S = n\left(x\tau + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right), \quad T = -n\left(y\tau - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \quad . \quad . \quad (94)$$

Nun ist

$$\cos\alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{dx}{ds},$$

und demnach

$$T\cos\alpha + S\sin\alpha = -n\left(x\tau + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dx}{ds} - n\left(y\tau - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{dy}{ds}.$$

Da es aber nach der Hypothese keine Kraft längs der Oberfläche gibt, so ist

$$T\cos\alpha + S\sin\alpha = 0.$$

Folglich ist

$$\tau(x dx + y dy) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx - \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

Nun sei ψ eine solche Funktion, daß

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

ist; dann läßt sich die Gl. (95) integrieren, und man erhält

$$\tfrac{1}{2}\tau(x^2 + y^2) + \psi = const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

als Gleichung der Begrenzung des Stabes. Offenbar sind φ und ψ das, was oben (§ 365) als konjugierte Funktionen der Koordinaten definiert worden ist, und ψ muß in jedem Punkte die Bedingung erfüllen:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

Als einfachst mögliches Beispiel nehmen wir $\varphi\ (= w) = -kxy$, wo k eine Konstante ist. Dies ergibt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -kx = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -ky = -\frac{\partial \psi}{\partial y};$$

und folglich

$$d\psi = -kx dx + ky dy,$$
$$\psi = \tfrac{1}{2}k(y^2 - x^2),$$

und somit ist die Gleichung der Begrenzung [Gl. (96)]

$$(\tau - k)x^2 + (\tau + k)y^2 = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

welches, wenn k geeignet gewählt ist, eine Ellipse ist. Hält man neben die Gl. (98) die Ellipsengleichung in der gewöhnlichen Form

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

so findet man durch Vergleichung die Proportion:

$$\alpha^2 : \beta^2 = \frac{1}{\tau - k} : \frac{1}{\tau + k},$$

und aufgelöst:

$$k = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

Die Deformationen sind demnach

$$a = x\tau - kx = \frac{2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\tau x,$$

$$b = -y\tau - ky = -\frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}\tau y,$$

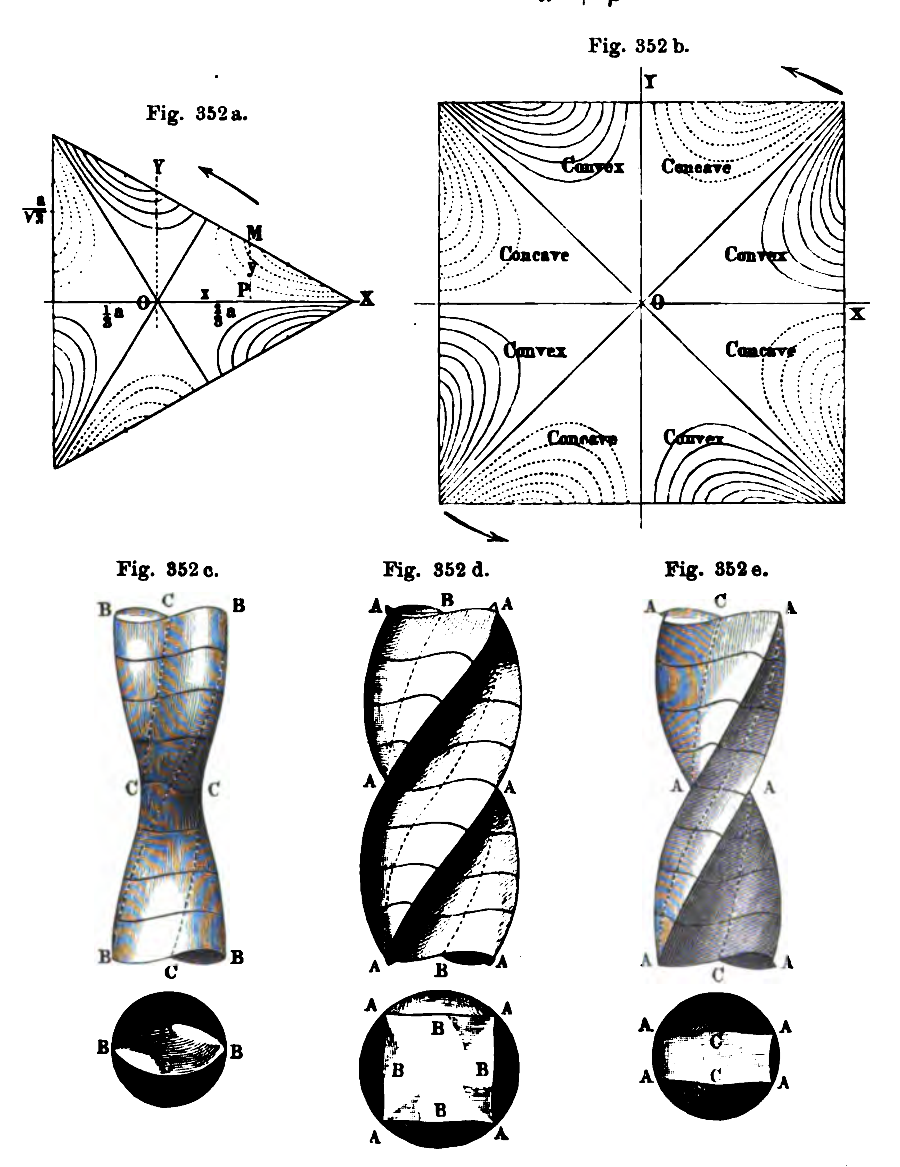
$$c = 0.$$

Die Deformation am Ende der großen Axe ist also

$$a_0 = (\tau - k)\,\alpha = \frac{2\,\alpha\,\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\,\tau,$$

am Ende der kleinen Axe

$$b_0 = -\,(\tau + k)\,\beta = -\,\frac{2\,\beta\,\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}\,\tau,$$



und das Verhältnis der Zahlenwerte bei den Deformationen ist daher

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{\beta\,(\tau + k)}{\alpha\,(\tau - k)} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Hiernach verhalten sich die Deformationen an den Enden der Axen umgekehrt wie die Axenlängen. Der elliptisch-zylindrische Stab wird demnach an den Enden der kleinen Axe am stärksten und an den Enden der großen Axe am schwächsten deformiert.

Für das Dreieck und das Quadrat sind die Verhältnisse im Querschnitt durch die Fig. 352 a und Fig. 352 b (a. v. S.) veranschaulicht. Endlich zeigen die Figuren 352 c, d, e das Aussehen von stark tordierten Stäben mit elliptischem, quadratischem und rechteckigem Querschnitte; wie man sieht, erfahren alle diese Stäbe eine Änderung der äußeren Gestalt; nur bei kreisförmigem Querschnitte bleibt die letztere bei der Torsion ungeändert.

Es ist hier kein Raum, auf diese Fälle näher einzugehen.

---

641. Biegung und Drillung dünner Stäbe. Wir müssen jetzt kurz die endliche Biegung und Drillung ursprünglich gerader Stäbe von kleinem, gleichförmigem Querschnitt, der als entweder rechtwinkelig oder kreisförmig angenommen wird, betrachten. Alsdann soll die Theorie von der Biegung von Stäben prismatischen Querschnitts in verschiedenen Ebenen ganz kurz behandelt werden.

Es wird angenommen, daß der Stab am einen Ende festgehalten wird, während am anderen eine Kraft und ein Kräftepaar, beide von gegebener Größe und Richtung, angreifen. Betrachten wir eine Scheibe des Stabes zwischen zwei Querschnitten, die im undeformierten Zustande des Stabes parallel waren. Das Material auf jeder Seite erteilt dem betreffenden Querschnitte eine Kraft und ein resultierendes Kräftepaar. Nach den oben § 176 dargelegten Methoden kann jede Kraft und jedes Kräftepaar in eine Kraft im Schwerpunkte des Querschnittes und ein Kräftepaar um eine bestimmte Axe übersetzt werden. Es seien in dem undeformierten Stabe drei Axen in jedem Querschnitte gewählt, eine von ihnen als Tangente an die Schwerpunktslinie, die beiden anderen senkrecht zueinander und, wenn der Stab von rechtwinkliger Gestalt ist, auch zu den Seiten des Querschnittes.

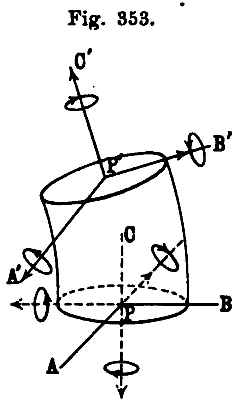
Auf diese Weise erhält man zwei die Axe enthaltende, zueinander rechtwinklige Ebenen; dieselben werden als Hauptbiegungsebenen des Stabes bezeichnet werden.

642. Gleichungen der Drucke. Die auf diese Weise senkrecht zur Stabaxe gezogenen Axen heißen Queraxen oder Transversalen. Wir können eine positive Richtung längs der Stabaxe wählen und diese als z-Axe nehmen. Dann gewinnen wir mit den beiden anderen Axen für jeden Querschnitt das gewöhnliche System von drei Axen x, y, z (Fig. 3). Nun werde der Stab in der xz- oder yz-Ebene gebogen. Die

einzige Wirkung ist die, daß die z-Axe aufhört eine gerade Linie zu sein und daß die x- und y-Axen aufhören, in den verschiedenen Querschnitten einander parallel zu sein. Wenn aber der Krümmungsradius des Stabes in jedem Querschnitte sehr groß ist im Vergleich mit den Querschnittsdimensionen des Stabes, so werden die Querschnitte unverzerrt verbleiben, und die x- und y-Axen in jedem von ihnen werden immer noch zueinander senkrecht bleiben. Ferner werden, wenn dem Stabe ein geringer Grad von Drillung τ um die z-Axe erteilt wird, so daß ihr reziproker Wert $1/\tau$ ebenfalls im Vergleich mit der größten Dimension des Querschnittes groß ist, die Querschnitte immer noch eben verbleiben, und sie werden auch unter einer Kombination solcher Deformationen eben bleiben.

Betrachten wir alsdann zwei Querschnitte (Fig. 353) in zwei benachbarten Punkten P und P' im Abstande ds in dem deformierten Stabe; wir haben ein System von Axen, die wir PA, PB, PC im Punkte P, und ein gegen das erste leicht geneigtes System im Punkte P', das wir $P'A'$, $P'B'$, $P'C'$ nennen wollen. Das System in P' kann als aus dem in P gewonnen betrachtet werden, indem man sich das anfängliche ohne Rotation längs der Axe um die Strecke ds fortbewegt denkt und dann die Axen um die Axen PA, PB, PC um die Winkel $\varkappa ds$, λds, τds dreht. Die mit den x, y, z-Axen (d. h. mit den Linien PA, PB, PC) parallelen Kraftkomponenten mögen für P mit S_1, S_2, T, und für P' mit $S_1 + dS_1$, $S_2 + dS_2$, $T + dT$ bezeichnet werden. Sie wirken, wie in Fig. 353 gezeichnet ist: die in P' in der positiven und die in P in der negativen Axenrichtung, da diese Kräfte der betreffenden Schicht jedesmal von der jenseits befindlichen Substanz des Stabes erteilt werden. Die in den Querschnitten wirksamen Kräfte S_1 und S_2 werden gewöhnlich die Scherungskräfte, die Kräfte T die Spannungen genannt. Lösen wir jetzt die Kräfte in P' parallel den Axen in P auf. Die Axe $P'A'$ bildet mit der Axe PC in P den Winkel $\pi/2 + \lambda ds$, die Axe $P'B'$ bildet mit derselben Axe den Winkel $\pi/2 - \varkappa ds$. Die Komponenten $S_1 + dS_1$ und $S_2 + dS_2$ haben demnach Komponenten längs der Axe PC vom Betrage $-(S_1 + dS_1)\lambda ds$, $+(S_2 + dS_2)\varkappa ds$, während $T + dT$ längs $P'C'$, bis zu Größen von zweiter Ordnung, einfach $T + dT$ längs PC ergibt. Die gesamte elastische Kraft auf das Element in der Richtung PC ist daher $dT - S_1\lambda ds + S_2\varkappa ds$. Diese Größe, zusammen mit der in der Richtung PC auf die Schicht wirkenden Kraft Zds muß ein im Gleichgewicht befindliches System sein. Eben solche Gleichgewichtssysteme werden für die Kräfte parallel den anderen beiden Axen gewonnen.

Fig. 353.



Wenn die von außen auf die Schicht wirksamen Kräfte $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$ sind, so sind demnach die Gleichgewichtsgleichungen der Kräfte:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dS_1}{ds} - S_2\tau + T\lambda + X &= 0\\ \frac{dS_2}{ds} - T\varkappa + S_1\tau + Y &= 0\\ \frac{dT}{ds} - S_1\lambda + S_2\varkappa + Z &= 0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

Ebenso erhält man, wenn G_1, G_2, H die oben erwähnten Kräftepaare bezeichnen, deren Axen längs PA, PB, PC, aber in entgegengesetzten Richtungen laufen, und $G_1 + dG_1$, $G_2 + dG_2$, $H + dH$ in derselben Weise diejenigen Kräftepaare bezeichnet, deren Axen längs $P'A'$, $P'B'$, $P'C'$ laufen, in Erwägung, daß $S_1 + dS_1$, $S_2 + dS_2$ Momente $-(S_2 + dS_2)\,ds$, $+(S_1 + dS_1)\,ds$ um die Axen PA bezw. PB haben:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dG_1}{ds} - G_2\tau + H\lambda - S_2 &= 0\\ \frac{dG_2}{ds} - H\varkappa + G_1\tau + S_1 &= 0\\ \frac{dH}{ds} - G_1\lambda + G_2\varkappa \quad\quad &= 0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

G_1 und G_2 heißen die Hauptbiegungskräftepaare und H das Torsionskräftepaar. Die beiden Kräftepaare G_1 und G_2 sind natürlich einem einzelnen Kräftepaare vom Betrage $\sqrt{G_1^2 + G_2^2}$ und um eine um einen Winkel $\operatorname{arctg}(G_2/G_1)$ gegen die Richtung des Kräftepaares G_1 geneigte Axe äquivalent.

Da $\varkappa\,ds$, $\lambda\,ds$, $\tau\,ds$ die Winkel sind, um die das Element um die Axen PA, PB gebogen und um die Axe PC gedrillt wird, so leuchtet es ein, daß $\varkappa$ die Krümmung ist, die dem Elemente in der BPC-Ebene und λ die Krümmung ist, die ihm in der APC-Ebene erteilt worden ist, während τ der Winkel ist, um den die Queraxen in einer Ebene der Scheibe relativ zu denen eines Querschnittes im Abstande eins herumgedreht worden sind. Wir sahen oben, daß $H = C\tau$ ist, wo C vom Material und der Ausdehnung und Gestalt des Querschnittes abhängt. Für einen Stab von kreisförmigem Querschnitte oder für eine durch koaxiale Kreiszylinder eingeschlossene Röhre ist C das Produkt aus n und dem Trägheitsmomente um die Axe des Stabes oder der Röhre.

643. Biegungsmomente. Kinetisches Analogon der Biegung und Torsion eines dünnen Stabes. Für den Fall der Biegung gilt, wie später bewiesen werden soll,

$$G_1 = A\varkappa, \quad G_2 = B\lambda,$$

wo

A = Youngscher Modul $\times$ Trägheitsmoment des Querschnittes um PA,

B = Youngscher Modul $\times$ Trägheitsmoment des Querschnittes um PB

ist. A und B heißen die Hauptbiegungsmomente des Drahtes oder Stabes. Setzt man diese Werte der Kräftepaare in die Gl. (101) ein, so erhält man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\varkappa}{ds} - (B - C)\lambda\tau &= S_2 \\ B\frac{d\lambda}{ds} - (C - A)\tau\varkappa &= -\ S_1 \\ C\frac{d\tau}{ds} - (A - B)\varkappa\lambda &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (102)$$

Diese Gleichungen sind den Eulerschen Bewegungsgleichungen eines starren Körpers um seine Hauptaxen [vergl. S. 305, Gl. (95)] genau analog, nur daß es sich hier um räumliche, dort um zeitliche Änderungsgrade der maßgebenden Größen (hier Differentialquotienten nach s, dort nach t) handelt. Die räumliche Anordnung im Gleichgewichtszustande wird also hier eine analoge sein, wie dort die Aufeinanderfolge der Konfigurationen bei der Bewegung. Diese Analogie, auf die ganz besonders Kirchhoff (Crelles J. f. Math. **56**, § 3, 1858) hingewiesen hat, ist so interessant, daß wir noch etwas näher auf sie eingehen wollen.

Da PA, PB, PC in den Richtungen der Hauptaxen des Querschnittes gezogen sind, und A, B, C die Trägheitsmomente des Querschnittes um diese Axen mal gewissen Faktoren sind, so kann man A, B, C als die Trägheitsmomente eines starren Körpers betrachten [in der Gl. (95) der S. 305 sind es direkt die Trägheitsmomente]. Nimmt man alsdann an, daß der Schwerpunkt dieses Körpers sich mit der Geschwindigkeit eins längs der Körperpaare bewegt, während seine Hauptaxen immer die Lagen einnehmen, die die Axen PA, PB, PC in Fig. 353 der Reihe nach in den Querschnitten haben, so werden die Werte $d\varkappa/ds$, $d\lambda/ds$, $d\tau/ds$ die Änderungsgrade sein, mit denen $\varkappa, \lambda, \tau$ sich mit der Zeit ändern, wenn sich der Körper bewegt. Man kann dann einen zweiten starren Körper annehmen, der mit einem Punkte seiner Axe fest bleibt und sich um seine Hauptaxen OA, OB, OC (§ 282) so dreht, daß diese immer den Hauptaxen des sich am Stabe entlang bewegenden Körpers parallel sind. Nun sind aber $\varkappa$, λ, τ die Geschwindigkeiten, sagen wir ω_1, ω_2, ω_3 in jedem Querschnitte, mit denen sich der Körper um seine Hauptaxen dreht, es wird also aus $d\varkappa/ds$, $d\lambda/ds$, $d\tau/ds$ jetzt $\dot\omega_1$, $\dot\omega_2$, $\dot\omega_3$, und es ergeben sich genau die Eulerschen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} - (B-C)\,\omega_2\omega_3 &= S_2 \\ B\frac{d\omega_2}{dt} - (C-A)\,\omega_3\omega_1 &= -S_1 \\ C\frac{d\omega_3}{dt} - (A-B)\,\omega_1\omega_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (103)$$

Demnach sind die Änderungen der Winkelgeschwindigkeiten des zweiten Körpers in seiner hypothetischen Bewegung genau gleich den Änderungen der Winkelgeschwindigkeiten des starren Körpers mit einem festen Punkte unter Kräftepaaren um die x- und y-Axe, dessen in § 282 Erwähnung geschieht, und unser elastisches Problem kommt auf das Kreiselproblem zurück, das in demselben Kapitel (§ 255 ff.) erörtert worden ist.

Die Resultante von $\varkappa$, λ, τ von der Größe $\omega = \sqrt{\varkappa^2 + \lambda^2 + \tau^2}$ ist dabei das Analogon der Winkelgeschwindigkeit desjenigen Körpers, dessen Bewegungsgleichungen durch Gl. (103) gegeben sind. Die Bewegung findet um diejenige Axe statt, welche die Richtungskosinus $\varkappa/\omega$, λ/ω, τ/ω hat, und welche daher die der Momentanaxe entsprechende Linie ist.

Wenn S_1 und S_2 null sind, wie in § 287, so erhält man wie dort [nach Gl. (102)] die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A\varkappa^2 + B\lambda^2 + C\tau^2 &= K^2 \\ A^2\varkappa^2 + B^2\lambda^2 + C^2\tau^2 &= G^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (104)$$

wo K und G Konstanten sind.

644. Kinetisches Analogon. Potentielle Energie des deformierten Stabes. Es geht aus den soeben durchgeführten Betrachtungen klar hervor, daß die Biegungen $\varkappa$, λ in den Hauptebenen und die Drillung τ unabhängig voneinander ausgeübt werden können. Folglich ist die bei der Hervorrufung dieser Deformationen aus der Nulllage im Elemente geleistete Arbeit, wenn G_1, G_2, H die Endwerte der Kräftepaare sind,

$$\frac{1}{2}\,(G_1\varkappa + G_2\lambda + H\tau)\,ds = \frac{1}{2}\,K^2 ds \quad . \; . \; . \quad (105)$$

Also ist K^2 das Doppelte der potentiellen Energie des deformierten Stabes pro Längeneinheit.

Die Kräftepaarkomponenten G_1, G_2, H sind die Momente der Bewegungsgröße des starren Körpers um die Axe und stellen die impulsiven Kräftepaare dar, die notwendig sind, um die Bewegung aus der Ruhe zu erzeugen, und G ist das resultierende impulsive Kräftepaar. Die Gl. (104) bestätigen daher, daß die potentielle Energie pro Längeneinheit und das impulsive Kräftepaar in allen den Querschnitten des Stabes dieselben sind.

Von dem starren Körper möge angenommen werden, daß er in einem Punkte fest ist und daß er die Drehung von einer Anfangslage aus beginnt, in welcher seine Hauptaxen den Hauptaxen eines Endquerschnittes parallel sind. Wenn dann der Körper sich mit Komponenten der Winkelgeschwindigkeit gleich den Werten von $\varkappa$, λ, τ für den Endpunkt zu drehen beginnt und wenn dann der Körper sich selbst überlassen wird, so werden die Winkelgeschwindigkeiten um seine Hauptaxen der Reihe nach die Werte von $\varkappa$, λ, τ für aufeinander folgende Stabquerschnitte annehmen, so daß sich der Körper nach einer Zeit s mit den Winkelgeschwindigkeiten bewegen wird, die gleich den Werten der Größen $\varkappa$, λ, τ für den Querschnitt im Abstande s vom Ende des Stabes sind.

Wenn nur an den Enden Kräftepaare angreifen, werden S_1 und S_2 überall längs des Stabes null sein, und es wird das Moment des resultierenden Kräftepaares sowie die Lage seiner Axe im Raume für jeden Querschnitt des Körpers ungeändert bleiben, gleichviel wie sich die (im Körper festen) Hauptaxen und die Winkelgeschwindigkeiten um dieselben ändern mögen.

645. Fall gleicher Biegungsmomente. Ein in Schraubenform gedrillter und gebogener Stab. Wenn die beiden Biegungsmomente A und B gleich sind, und die beiden am freien Ende angreifenden Kraftkomponenten S_1 und S_2 null sind, ergibt sich ein sehr einfacher und wichtiger Fall. Es bleibt auf das freie Stabende nur die Kraftkomponente T und das Kräftepaar wirksam. Die dritte der Gl. (100) zeigt, daß T, beim Fehlen einer wirksamen Kraft Z, am Stabe entlang konstant ist. Die Gl. (103) lauten in diesem Falle:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} - (A - C)\,\omega_2\,\omega_3 &= 0 \\ A\frac{d\omega_2}{dt} - (C - A)\,\omega_3\,\omega_1 &= 0 \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

Die dritte Gleichung besagt, daß $d\tau/ds = 0$, oder daß τ am Stabe entlang eine Konstante ist. Ferner ergeben, da τ eine Konstante ist, die beiden ersten Gleichungen

$$A(\varkappa^2 + \lambda^2) = const,$$

und die resultierende Krümmung ist in allen Punkten dieselbe. Die Krümmung in der yz-Ebene ist $\varkappa$, die in der xz-Ebene ist λ; folglich ist die resultierende Krümmung

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\varkappa^2 + \lambda^2};$$

und da die Biegung um Px Konvexität gegen die positive Richtung von Py und die Biegung um Py Konkavität gegen die positive Rich-

tung von Px ergibt, so sind die x- und y-Richtungskosinus der Normalen $\lambda\varrho$ und $-\varkappa\varrho$; der z-Richtungskosinus ist natürlich null. Die Richtungskosinus der Binormalen sind daher $\varkappa\varrho$, $\lambda\varrho$, 0. Sie sind die Projektionen eines Einheitsvektors längs der Binormalen in P. In P' sind die Projektionen der Binormalen auf $P'x'$, $P'y'$, $P'z'$ gleich $\varkappa\varrho + d(\varkappa\varrho)$, u. s. w., und das sind Vektorkomponenten, die gegen die Px-, Py-, Pz-Axen in kleinen, von den Rotationen herrührenden Winkeln geneigt sind. Da die Axen in P' sich um den Winkel τds um Pz, um den Winkel $\varkappa ds$ um Px und um den Winkel λds um Py gedreht haben, so sind die Projektionen der Vektoren auf Px, Py, Pz bis auf kleine Größen von der ersten Ordnung

$$\varkappa\varrho + d(\varkappa\varrho) - \lambda\varrho\tau ds, \quad \lambda\varrho + d(\lambda\varrho) + \varkappa\varrho\tau ds, \quad \lambda\varrho\varkappa ds - \varkappa\varrho\lambda ds,$$

so daß sich die Richtungskosinus in Bezug auf Px, Py, Pz um

$$d(\varkappa\varrho) - \lambda\varrho\tau ds, \quad d(\lambda\varrho) + \varkappa\varrho\tau ds, \quad 0$$

geändert haben. Der Winkel, etwa $d\beta$, um den sich die Binormale gedreht hat, ist die Quadratwurzel der Summe der Quadrate dieser Größen. Es sei φ der Winkel zwischen der Binormalen und der Axe PA (d. h. der Winkel φ, den OD mit OA bildet, wie in Fig. 354), dann ist $\varkappa\varrho = \cos\varphi$, $\lambda\varrho = -\sin\varphi$. Folglich ist

$$d\beta^2 = (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\left(-\frac{d\varphi}{ds} + \tau\right)^2 ds^2,$$

oder

$$\frac{d\beta}{ds} = -\frac{d\varphi}{ds} + \tau \quad \ldots\ldots\ldots \quad (107)$$

Wenn jetzt der Fall einer Schraube angenommen wird, so ergibt sich nach den beiden ersten der Gl. (102):

$$A\frac{d\varkappa}{ds} - (A - C)\lambda\tau = 0, \quad A\frac{d\lambda}{ds} - (C - A)\tau\varkappa = 0.$$

Multipliziert man die erste hiervon mit λ, die zweite mit $\varkappa$ und subtrahiert, so erhält man

$$\lambda\frac{d\varkappa}{ds} - \varkappa\frac{d\lambda}{ds} = \frac{A - C}{A}(\varkappa^2 + \lambda^2)\tau.$$

Da aber $\varphi = \operatorname{arctg}(-\lambda/\varkappa)$ ist, so ist

$$-\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\varkappa\frac{d\lambda}{ds} - \lambda\frac{d\varkappa}{ds}}{\lambda^2 + \varkappa^2} = \frac{C - A}{A}\tau.$$

Also ist, da τ konstant ist, $d\varphi/ds$ ebenfalls konstant. Da ferner $d\beta/ds = -(d\varphi/ds) + \tau$ und anderseits gleich dem Windungsgrad $1/\sigma$ ist, so ist

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{C}{A}\tau \quad \ldots\ldots\ldots \quad (108)$$

und dies ist gleichfalls konstant.

In jedem Querschnitte muß das Kräftepaar $A\sqrt{\varkappa^2 + \lambda^2}$ in der Schmiegungsebene und das Kräftepaar $C\tau$ um die Stabaxe wirken. Wenn, wie wir jetzt annehmen, die Form des Stabes eine Schraube ist, dann ist

$$\sqrt{\varkappa^2 + \lambda^2} = \frac{1}{\varrho},$$

wo ϱ der konstante Krümmungsradius ist. Folglich ist, wenn α der Winkel, um den der Stab in jedem Punkte gegen den Querschnitt des Zylinders geneigt ist und a der Radius des Zylinders ist:

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\varkappa^2 + \lambda^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a}.$$

Auch ist

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{a},$$

und daher

$$\tau = \frac{A}{C}\,\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

Diese Werte für Krümmung und Windungsgrad können leicht folgendermaßen gewonnen werden. Denken wir uns ein schmales Papierband so um einen Zylinder herumgewunden, daß die Mittellinie des Papiers eine Schraube bildet. Das Papier ist in jedem Punkte um eine erzeugende Linie des Zylinders gebogen. Die Drehung um die erzeugende Linie kann in zwei Komponenten zerlegt werden, in eine um eine Linie quer durch das Band, senkrecht zur Mittellinie, und eine andere um die Mittellinie des Bandes. Der auf einer Strecke ds der Mittellinie um die erzeugende Linie beschriebene Winkel ist $ds\cos\alpha/a$. Somit sind die soeben gedachten Komponenten gleich $ds\cos^2\alpha/a$ und $ds\cos\alpha\sin\alpha/a$. Folglich sind Krümmung und Windungsgrad $\cos^2\alpha/a$ und $\sin\alpha\cos\alpha/a$, wie oben angegeben.

646. Ein durch ein am Ende angreifendes Kräftepaar in Schraubenform erhaltener Stab. In jedem Querschnitte des Stabes sind zwei Kräftepaare wirksam, eines $C\tau$ mit der Axe dem Stabe entlang, und eines $A\cos^2\alpha/a$, mit der Axe senkrecht zur Oskulationsebene. Das resultierende Kräftepaar ist somit

$$\sqrt{C^2\tau^2 + \frac{A^2\cos^4\alpha}{a^2}}.$$

Aber mit Rücksicht auf den oben für τ erhaltenen Wert wird daraus $A\cos\alpha/a$ Die Axe des Kräftepaares $A\cos^2\alpha/a$ liegt in der zum Zylinder tangentialen Ebene; folglich liegt die Axe des resultierenden Kräftepaares in derselben Ebene und bildet mit dem Stab den Winkel

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{A\cos^2\alpha}{a\,C\tau}\right).$$

Nun ist aber $A\cos^2\alpha/a\,C\tau = ctg\,\alpha$, und folglich ist die Axe des resultierenden Kräftepaares parallel zur Zylinderaxe, d. h. das Kräftepaar wirkt in einer zur Zylinderaxe senkrechten Ebene.

Hieraus folgt, daß das Kräftepaar am freien Ende $A\cos\alpha/a$ sein muß. Man sieht also ein, daß, wenn ein Ende eines Stabes von rundem Querschnitt fest und ein Kräftepaar G am anderen Ende wirksam ist, der Stab zu einer Schraube von der Krümmung $G\cos\alpha/a$ und der Drillung $G\sin\alpha/C$ deformiert wird. Der Winkel der Schraube und der Radius ihres Zylinders werden durch die Größe des Kräftepaares und die Entfernung des festen Stabendes von der Ebene des angreifenden Kräftepaares bestimmt. Wenn d diese Entfernung und l die Länge des Stabes ist, so muß

$$\sin\alpha = \frac{d}{l}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{l}$$

sein. Der Radius des Zylinders ist somit:

$$\frac{G}{A\cos\alpha} \quad \text{oder} \quad \frac{G}{A}\,\frac{l}{\sqrt{l^2 - d^2}}.$$

647. Ein durch eine axiale Kraft in Schraubenform erhaltener Stab. Wenn das eine Stabende festgehalten wird, während am anderen eine Kraft R angreift, so wird der Stab, vorausgesetzt, daß eine genügende Drillung gegeben ist, zu einer Schraube deformiert werden, deren Axe mit der Wirkungslinie von R zusammenfällt. Dies wird auch dann die Form des deformierten Stabes sein, wenn außer der Kraft R am freien Ende ein Kräftepaar G angreift, dessen Axe mit R parallel ist.

Um dies einzusehen, denken wir uns, daß der Stab die Schraubenform angenommen habe. Die Kraft R ergibt ein auf das Stabstück zwischen dem freien Ende und dem Querschnitt wirkendes Kräftepaar vom Moment Ra und eine mit R gleiche und parallele Kraft im Querschnitt. Das eben angeführte Kräftepaar muß durch die von der Drillung und Biegung des Stabes herrührende elastische Reaktion ausgeglichen werden. Es möge noch ein Kräftepaar mehr, mit der Axe parallel zu R, am Ende angreifen. Unter Berücksichtigung der Richtung von Drillung und Biegung des Stabes ist

$$G\sin\alpha + Ra\cos\alpha = C\tau$$

$$-G\cos\alpha + Ra\sin\alpha = -A\frac{\cos^2\alpha}{a},$$

und somit

$$R = C\tau\frac{\cos\alpha}{a} - A\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{a^2} \quad \ldots\ldots \quad (110)$$

$$G = C\tau\sin\alpha + A\frac{\cos^3\alpha}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (111)$$

Ist das Kräftepaar null, so ist

$$\tau = -\frac{A}{C}\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{a} \quad \text{und} \quad R = -A\frac{\cos^2\alpha}{a^2\sin\alpha}.$$

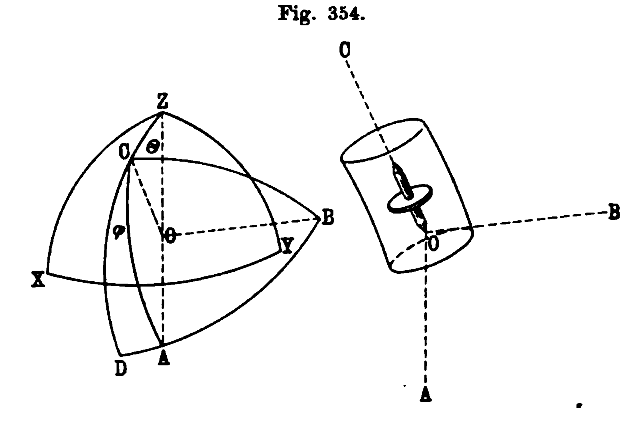
Ist die Kraft null, so ist

$$\tau = \frac{A}{C}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{a} \quad \text{und} \quad G = A\frac{\cos\alpha}{a}.$$

Die letzteren Resultate sind die schon oben § 645 gewonnenen.

648. Kinetisches Analogon eines in Schraubenform gebogenen Stabes. Die im Querschnitt wirksamen Kräftepaare erschöpfen die Wirkung dort nicht vollkommen. Durch jeden Querschnitt hindurch wirkt außerdem noch die nach der Poinsotschen Methode vom

Fig. 354.



Ende her übertragene Kraft R. Die Deformation im Stabe kann mit großem Vorteil im einzelnen studiert werden, indem man eine Kraft und ein in einer zur Wirkungslinie der Kraft senkrechten Ebene wirksames Kräftepaar an einem Stabende angreifend annimmt, während das andere festgehalten wird. Man wird finden, daß alle Bedingungen durch diejenige Deformation erfüllt sind, welche das elastische Analogon der stationären Bewegung des Kreisels unter der Wirkung der Schwere (5. Kapitel) bildet. Der Leser mag sich von den folgenden Resultaten überzeugen. Es mögen, wie in § 282 und Fig. 153 oder Fig. 354, θ als die Neigung der Kreiselaxe OC gegen die Vertikale OZ genommen werden, OA, OB, OC die Richtungen der Hauptaxen sein und θ, φ, ψ die Winkel bezeichnen, welche, wie in Fig. 355, die Lagen der Hauptaxen OA, OB, OC in Bezug auf feste Axen, OZ vertikal und OX, OY horizontal, bestimmen. Die Kraft in dem kinetischen Analogon hat Komponenten S_1, S_2, T parallel den Richtungen der Hauptaxen; und wenn R die vertikal gerichtete Kraft am freien Stabende ist, so sind die Werte von S_2 und $-S_1$, die auf der rechten Seite der beiden ersten der Gl. (102) stehen, $R\sin\theta\sin\varphi$ bezw. $R\sin\theta\cos\varphi$.

Ist die Bewegung stationär, so ist die Drehungsgeschwindigkeit ω_3 ($= \tau$) um die Axe konstant und zwar gleich

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta,$$

wo $\dot\varphi$ die Drehungsgeschwindigkeit des Körpers um OC relativ zur Ebene ZOC, und $\dot\psi$ die aus der Bewegung des Körpers als Ganzes um die Vertikale OZ herrührende Komponente der Drehungsgeschwindigkeit ist. Also ist in dem elastischen Analogon

$$\frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\psi}{ds}\cos\theta$$

konstant. Ferner sind sowohl $\dot\psi$ ($= d\psi/ds$) als θ konstant in der stationären Bewegung, und so ist $d\varphi/ds$ den Stab entlang konstant.

Fernere Resultate sind:

$$\sin\theta\frac{d\psi}{ds} = \sqrt{\varkappa^2 + \lambda^2} = \frac{1}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

so daß $1/\varrho$ konstant ist. Sodann ist $\varphi = arc\,tg(-\lambda/\varkappa)$, und es ist somit φ mit dem Winkel zwischen der Binormalen OD und der Hauptaxe OA (Fig. 354) identifiziert. Also gewinnt man, da $\cos\theta\, d\psi/ds = (Ag\theta)/r$ ist, für den Windungsgrad $1/\sigma$ den Wert:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{ctg\,\theta}{\varrho}.$$

Die beiden ersten der Gl. (102) mit den oben gegebenen Werten von S_2 und $-S_1$ führen schließlich zu dem Resultate

$$C\tau\varrho - A\cot\theta = R\varrho^2\sin\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

was, da $ctg\,\theta = tg\,\alpha$ ist, mit Gl. (110) übereinstimmt.

649. Deformation eines Drahtes aus einer Schraubenform in eine andere. Als ein letztes Beispiel für die Deformation einer Spiralfeder seien die Werte der Kraft und des Kräftepaares eines Renks (vergl. § 177) festgestellt, der notwendig ist, um einen Draht, der ohne Zwang die Form einer Schraube vom Radius b und der Steigung β hat, die Form einer Schraube vom Radius a und der Steigung α zu geben, unter der Bedingung, daß der Renk derart ist, daß er die Linie auf der Drahtoberfläche, die mit dem Zylinder vom Radius b in Kontakt war, nunmehr mit dem Zylinder vom Radius a in Kontakt erhalte. In diesem Falle darf $\varkappa$ als null und τ als identisch mit $1/\sigma$ angenommen werden.

Die Änderung in τ ist daher

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{a} - \frac{\sin\beta\cos\beta}{b},$$

und die Änderung der Krümmung

$$\frac{\cos^2\alpha}{a} - \frac{\cos^2\beta}{b}.$$

Die Werte von R und G für den Renk werden dadurch gewonnen, daß man in Gl. (110), (111) für die dort vorkommende Drillung und Krümmung diese Differenzen einsetzt. Also ist

$$\left.\begin{aligned} Ra &= C\cos\alpha\left(\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{a} - \frac{\sin\beta\cos\beta}{b}\right) \\ &\qquad - A\sin\alpha\left(\frac{\cos^2\alpha}{a} - \frac{\cos^2\beta}{b}\right) \\ G &= C\sin\alpha\left(\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{a} - \frac{\sin\beta\cos\beta}{b}\right) \\ &\qquad + A\cos\alpha\left(\frac{\cos^2\alpha}{a} - \frac{\cos^2\beta}{b}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (114)$$

Wenn die Steigungen α, β der Spirale klein sind, ist das zweite Glied auf der rechten Seite in der ersten dieser Gleichungen klein im Vergleich mit dem ersten. Vernachlässigt man es und beachtet man, daß

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{a}{b}, \quad \sin\alpha = \alpha = \frac{h}{l}, \quad \sin\beta = \beta = \frac{h_0}{l}$$

ist, wo h, h_0 die axialen Längen der Spirale in den beiden Fällen sind, und l die Länge des Drahtes ist, so erhält man:

$$R = C\cos\alpha\cos\beta\,\frac{h - h_0}{abl} \quad \text{oder} \quad h - h_0 = \frac{abl}{C\cos\alpha\cos\beta}\,R \qquad (115)$$

Natürlich sind a und b tatsächlich sehr annähernd gleich, und es ist $\cos\alpha\cos\beta$ nahezu eins.

Die letzte Gleichung spricht eine von J. Thomson gegebene Regel zur Auffindung der durch eine axiale Kraft R erzeugten Verlängerung einer Spiralfeder von kleiner Steigung aus. Der Draht werde längs der Zylinderaxe ausgezogen und am einen Ende festgehalten, während am Rande einer kreisrunden Scheibe vom selben Radius wie der Zylinder, die in ihrer Mitte senkrecht zum Draht befestigt ist, eine Kraft R tangential angreift. Diese Kraft wird den Draht drillen, bis die Torsionsreaktion das Kräftepaar Ra gerade aufhebt. Die Strecke, um die sich ein Punkt auf dem Rande der Scheibe bewegt hat, ist $h - h_0$.

---

650. Biegung eines gleichförmigen Stabes. Hauptaxen. Elastische Mittellinie. Wir wollen jetzt ganz kurz die in einer Ebene verlaufende Biegung eines dünnen gleichförmigen Stabes betrachten, der gerade ist, so lange er keinem deformierenden Zwange unterliegt. Es wird wie vorher angenommen werden, daß die Krümmung in jedem Punkte eine solche ist, daß der Krümmungsradius groß ist im Vergleich

mit jeder Dimension des Stabquerschnittes, und überdies, daß die Breite des Stabes senkrecht zur Biegungsebene klein ist im Vergleich mit dem geometrischen Mittel aus dem Krümmungsradius und der Dicke in der Biegungsebene. Der hierdurch ausgeschlossene Ausnahmefall ist der eines breiten dünnen Bandes, wie eine flache Uhrfeder, das zu einem so kleinen Kreise zusammengebogen ist, daß die Breite mit dem angeführten geometrischen Mittelwerte vergleichbar wird. Wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind, und wenn der Stab in der Weise beansprucht wird, daß die axiale Dilatation oder transversale Scherung relativ unbedeutend ist, kann man, wie de St. Venant in seiner Theorie der Biegung von Prismen dargelegt hat, als Annäherung an das wirkliche Verhalten den Querschnitt als von Verdrehung frei ansehen.

Nun stellen wir uns eine sehr dünne Schicht des Stabes vor, in einem beliebigen Querschnitte, mit ihren Flächen dem Querschnitt parallel. Diese Scheibe wird Hauptaxen des Trägheitsmoments senkrecht zueinander haben, auf die wir uns als auf die Hauptaxen des Trägheitsmoments des Querschnittes beziehen wollen; den Trägheitsmittelpunkt der Scheibe werden wir als Trägheitsmittelpunkt des Querschnittes betrachten. Wenn der Stab gebogen wird, bleiben diese Axen nicht gerade Linien, sondern werden Kurven.

Wir werden diejenige gerade Linie, welche die Trägheitsmittelpunkte der Querschnitte enthält, die elastische Mittellinie oder einfach die Mittellinie des Stabes nennen.

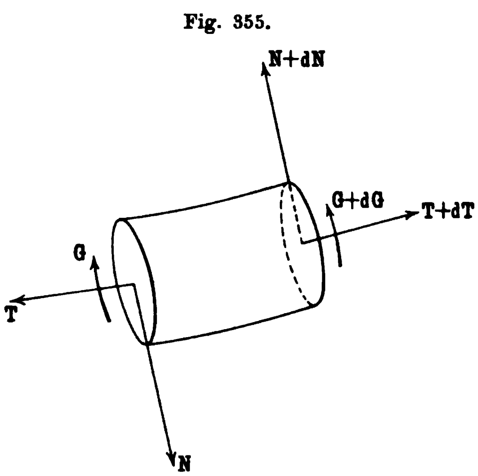
651. Haupt-Biegungsebenen. In jedem Querschnitte kann eine Tangente an die elastische Mittellinie gezogen und durch diese Tangente können zwei Ebenen so gelegt werden, daß sie die beiden Kurven berühren, die in dem undeformierten Stabe die Hauptaxen des Trägheitsmoments des Querschnittes waren. Diese Ebenen werden die Hauptbiegungsebenen des Stabes genannt. Es soll zunächst angenommen werden, daß die Biegung in einer Hauptebene liegt, d. h. so, daß die Krümmungsradien jeder der Linien, die der undeformierten elastischen Mittellinie parallel waren, jetzt einer Hauptbiegungsebene parallel sind.

Die Wirkung der Biegung ist die, eine Kraft und ein Kräftepaar zu erzeugen, mit denen die Substanz auf der einen Seite eines Querschnittelements auf die auf der anderen Seite des Elementes befindliche Substanz wirkt. Betrachten wir alsdann einen die elastische Mittellinie in einem Punkte P schneidenden Querschnitt, und unterscheiden wir die Substanz auf den beiden Seiten des Querschnittes als die Substanz auf der linken und die auf der rechten Seite des Querschnittes. Die in jedem Querschnittelement auf die Substanz der rechten Seite wirkende Kraft und Kräftepaar kann nach der Poinsotschen Methode in eine Einzelkraft in P und ein, den Querschnitt um eine zur Biegungsebene senkrechte Axe zu drehen bestrebtes Kräftepaar verwandelt werden. Die Kraft wird zwei Komponenten ergeben, eine, T, längs der Tangente an

die Mittellinie in P, die andere N, pro Längeneinheit der Mittellinie, nach dem Krümmungsmittelpunkte des Elementes der elastischen Mittellinie in P. Diese Komponenten sollen also T und N heißen. Die letztere läuft dem Querschnitt entlang und wird gewöhnlich Scherungskraft genannt, die erstere ist eine streckende Kraft längs der elastischen Mittellinie.

652. Gleichgewichtsgleichungen. Der Gleichgewichtsgleichungen einer Schicht des Stabes wird es drei geben, deren zwei durch Auflösung der Kräfte tangential zur elastischen Mittellinie und normal zur Mittellinie in der Biegungsebene gefunden werden, und deren dritte ausdrückt, daß die Momente der auf sie wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sind. Es sei in Fig. 355 T die streckende Kraft nach links längs der Tangente an die Mittellinie am linken Ende der Schicht, dann wird $T + dT$ die streckende Kraft nach rechts längs der Tangente am rechten Ende der Schicht bezeichnen. Ferner seien X, Y die Komponenten der äußeren Kraft längs der Mittellinie und nach innen, d. h. nach dem Krümmungsmittelpunkte zu gerichtet, jede pro Längeneinheit des Elementes. Die Scherungskraft am linken Ende des Elementes ist vom Krümmungsmittelpunkte weg, die am rechten Ende ist nach dem Krümmungsmittelpunkte zu gerichtet, und zwar ist jene vom Betrage N, diese vom Betrage $N + dN$. Alles dies liefert zwei Resultanten: Eine Resultante längs der Tangente an die Mittellinie am rechten Ende des Elementes vom Betrage

Fig. 355.



$$dT - Nd\theta + Xds,$$

die für den Gleichgewichtszustand verschwinden; und eine zweite nach dem Krümmungsmittelpunkte zu als $dN + Td\theta + Yds$, die ebenfalls verschwinden muß. Wenn R der Krümmungsradius ist, so ist $d\theta = ds/R$. Somit ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\frac{dT}{ds} - \frac{N}{R} + X = 0, \quad \frac{dN}{ds} + \frac{T}{R} + Y = 0 \quad . \quad . \ (116)$$

Eine dritte Gleichung erhält man aus den auf die Schicht wirkenden elastischen Kräftepaaren G, $G + dG$, aus dem von den angreifenden

Kräften X, Y herrührenden Kräftepaar Hds und den Momenten der inneren Kräfte T, N. Offenbar ist diese Gleichung:

$$\frac{dG}{ds} + N + H = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

Natürlich gibt es außerdem in jedem wirklichen Falle Bedingungen, die an den Stabenden erfüllt sein müssen; dieselben werden in den folgenden Beispielen vorkommen. Die soeben gefundenen Gleichungen sind manchmal von Nutzen, aber in den meisten Fällen erreicht man die Lösung des Problems am besten durch direkte Anwendung der Grundprinzipien.

653. Ermittelung des Biegungskräftepaares im Querschnitte. Es ist zunächst notwendig, sich klar zu machen, in welcher Weise das Kräftepaar G von der Größe der Biegung im Querschnitt abhängt. Eine vollständige Behandlung dieses Punktes ist unmöglich ohne Eingehen auf Betrachtungen über die allgemeine Theorie, Betrachtungen, die außerhalb des Rahmens dieses Werkes liegen; was hier darüber gesagt wird, müßte, wenn der Raum es zuließe, ausführlicher begründet und sogar, bis zu einem gewissen Grade, berichtigt werden. Genau genommen gibt es gar keine mit der Stabaxe parallele Linie, die unverändert in der Länge bleibt; alle ändern sich, und auch die elastische Mittellinie ist unter Umständen weit davon entfernt, mit der dilatationsfreien oder, wie man sie nennen kann, neutralen Linie, zusammenzufallen. Mit einer gewissen Annäherung an den Wert des Kräftepaares G kann man indessen annehmen: Stablinien, die auf der konvexen Seite einer zylindrischen Fläche durch die elastische Mittellinie senkrecht zur Biegungsebene liegen, erfahren eine Längsdehnung, diejenigen, welche auf der innerer Seite dieses Zylinders liegen, erfahren eine Verkürzung im Vergleich mit der elastischen Mittellinie; der Betrag dieser relativen Dilatation oder Kontraktion ist dem Abstande des Punktes von der Zylinderoberfläche proportional. Es wird also durch jedes Querschnittselement hindurch, in welchem relative Dehnung stattfindet, auf die Substanz auf der einen Seite A des Querschnittes von der Substanz auf der anderen Seite B ein Zug ausgeübt; dagegen wird durch jedes Element, in welchem relative Kontraktion stattfindet, auf die Substanz auf der A-Seite von der Substanz auf der B-Seite ein Druck ausgeübt, in jedem Falle relativ zur Wirkung durch ein Element in der Mittellinie hindurch. Dies ist in Fig. 356 veranschaulicht. Es wird angenommen, daß, wenn die Einheitsdehnung oder Kontraktion e ist, die auf ein Flächenelement df des Querschnittes wirksame Kraft $Eedf$ ist, wo E der Elastizitätsmodul für das betreffende Material ist. Dies kommt der Annahme gleich, daß jede Längsfaser der Substanz sich der Breite nach in voller Freiheit ausdehnt und zusammenzieht, gerade als ob ihre seitliche Oberfläche frei wäre. Somit wirkt durch jeden Querschnitt

hindurch ein Kräftepaar mit der Tendenz, den Querschnitt in die Biegungsebene herumzudrehen, so daß es den Stab gerade richten würde, und dieses Kräftepaar wird aufgehoben und der Stab gebogen erhalten durch das im Querschnitt wirksame Moment der den Stab von außen angreifenden Kräfte und durch das Moment beliebiger angreifender Kräftepaare.

Daß die Fasern des Materials der Breite nach schwellen oder schrumpfen, je nachdem sie der Längsrichtung nach verkürzt oder ver-

Fig. 356.

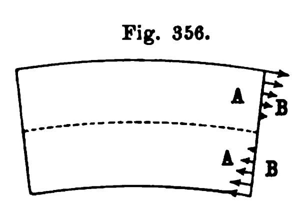
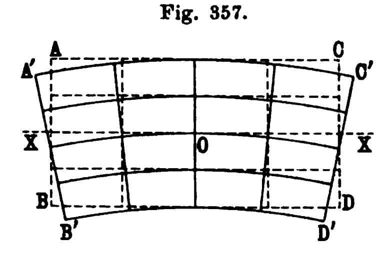
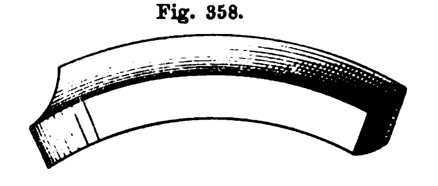


Fig. 357.



längert werden, zeigt sich in der Tatsache, daß der Querschnitt aus der durch die gestrichelten Linien in Fig. 357 angegebenen rechteckigen Form in die durch die ausgezogenen Linien angegebene gekrümmte Form verschoben wird. Die konvexe Seite des Querschnittes liegt auf der in der Biegungsebene konkaven des Stabes und umgekehrt. In Fig. 358 ist eine räumlich-perspektivische Andeutung der Gestalt gegeben, wie man sie durch Biegung eines Kautschukparallelepipedes sich leicht vor Augen führen kann. Für den in § 650 erwähnten Fall einer flachen Feder

Fig. 358.



würde — vorausgesetzt, daß die dort gegebene Bedingung erfüllt ist — die halbe Dicke AX des Stabes viel bedeutender sein, als die Entfernung zwischen A' und der Linie XX und viel geringer als der Abstand zwischen B' und derselben Linie. Die Elongationen und Kontraktionen an den Kanten würden dann von den in der hier gegebenen annähernden Behandlung der Biegung angenommenen sehr verschieden sein.

Für eine eingehende Behandlung der Frage muß auf die Untersuchungen von St. Venant verwiesen werden.

Unter der Annahme, daß der Querschnitt eben und rechtwinklig bleibt, kann man leicht das durch den Querschnitt hindurch wirkende Kräftepaar berechnen. x sei der Abstand der betrachteten Faser von der Hauptaxe, um welche die Biegung stattfindet, und ds sei der Abstand auf der elastischen Mittellinie zwischen dem betrachteten Querschnitt und dem anderen Querschnitt einer Schicht des Stabes. Die Einheitsdehnung einer Faser im Abstande x in oder parallel der Bie-

gungsebene ist mit x proportional; sie soll ax genannt werden. Das um die eben hervorgehobene Hauptaxe gerichtete Moment der auf ein Flächenelement df wirkenden Kraft ist daher Eax^2df. Den Betrag des Kräftepaares erhält man durch Integration dieses Ausdruckes über den ganzen Querschnitt, da das von der Kontraktion herrührende Moment bestrebt ist, den Querschnitt in derselben Weise herumzudrehen. Folglich ist, wenn G das Biegungskräftepaar ist:

$$G = Ea\int x^2 df = EaJ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

wo J das Trägheitsmoment des Querschnittes ist. Es bleibt noch der Proportionalitätsfaktor a zu bestimmen. Die Neigung des einen Endquerschnittes der Schicht gegen den anderen ist $ax(ds/x)$ oder ads. Dies ist aber der Winkel $d\theta$ zwischen den Krümmungsradien der elastischen Mittellinie an den Stellen, wo sie die Querschnitte trifft. Folglich ist $a = d\theta/ds = 1/R$. Somit ist

$$G = EJ\frac{1}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

in Worten: Das Kräftepaar ist gleich dem Produkte aus dem Dehnungsmodul, dem Trägheitsmoment des Querschnittes und der Krümmung. Die Größe EJ wird häufig das Biegungsmoment oder der Biegungswiderstand des Stabes genannt.

Ist der Querschnitt des Stabes ein Rechteck von den Dimensionen $2a$, $2b$, so ist das Biegungsmoment $4Ea^3b/3$ oder $4Eab^3/3$, je nachdem die Biegungsebene die den beiden Seiten von der Länge $2a$ oder denen von der Länge $2b$ parallele Ebene ist. Wie man hieraus ersieht, kann der Biegungswiderstand eines Balkens, also das zur Erzeugung der Krümmung eins in einem Querschnitte erforderliche Kräftepaar beliebig groß gemacht werden, indem die Dimensionen in der Biegungsebene genügend vergrößert werden. Der Leser mag selbst die Schwierigkeit, eine Latte in ihrer eigenen Ebene zu biegen, mit der Leichtigkeit vergleichen, mit der sie sich in einer Ebene senkrecht zu ihrer Breite liegen läßt. Während das erforderliche Kräftepaar mit der Breite (quer zur Biegungsebene) einfach proportional ist, wächst es wie der Kubus der Dicke des Balkens (in der Biegungsebene), d. h. bei einem doppelt so dicken Balken ist schon die achtfache, bei einem 10mal so dicken die 1000fache Kraft erforderlich.

654. Die elastische Linie. Dynamisches Analogon. Der Fall eines durch Kräfte, die an seinen Enden angreifen, gebogenen Drahtes läßt die Erläuterung durch ein dynamisches Analogon zu. In einem Querschnitt P, in dem die Krümmung $1/\varrho$ beträgt, werde eine Tangente an den Draht gezogen, die einen Winkel θ mit der Wirkungslinie einer am einen Drahtende angreifenden Kraft K bildet, während der Draht von einem durch den Teil jenseits P (Fig. 359) auf ihn wirkenden Kräftepaar gebogen erhalten wird. Dieses Kräftepaar ist B/ϱ und

wirkt in dem durch den gebogenen Pfeil angedeuteten Sinne. Wenn aber θ der in der Zeichnung angegebene Winkel ist und ds (oder PQ) in der Richtung von P nach Q genommen wird, so ist $1/\varrho = -d\theta/ds$. Das Kräftepaar in P ist demnach numerisch gleich $-Bd\theta/ds$. Ferner ist das Moment der Kraft K um P gleich $Kl\sin\theta$, wenn l der Abstand des Punktes P vom Schnittpunkt T der Tangente mit der Linie von K ist. Folglich ergibt sich

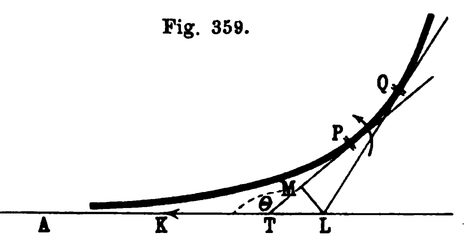


Fig. 359.

$$B\frac{d\theta}{ds} + Kl\sin\theta = 0.$$

Hieraus erhält man durch Differentiation

$$B\frac{d^2\theta}{ds^2} + K\frac{dl}{ds}\sin\theta + Kl\cos\theta\frac{d\theta}{ds} = 0 \quad . \quad . \quad (120)$$

Nun möge die Tangente in Q die Wirkungslinie von K in L schneiden, und LM sei senkrecht zu TP. Dann ist offenbar

$$dl = ds - (TM) = ds + \frac{(LM)}{tg\,\theta} = ds - l\,d\theta\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Folglich ist

$$\sin\theta\,\frac{dl}{ds} = \sin\theta - l\cos\theta\,\frac{d\theta}{ds},$$

und aus Gl. (120) wird

$$B\frac{d^2\theta}{ds^2} + K\sin\theta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

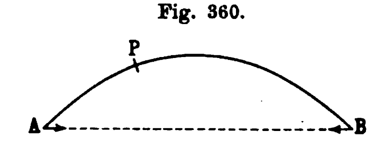
also die nach einer andern Methode gefundene und etwas anders geschriebene Gl. (117).

Wenn ds, statt eines Streckenelementes, ein Zeitelement bedeutet, so wird die Gl. (121) die Bewegungsgleichung eines einfachen Pendels von der Länge Bg/K, das in einem endlichen Winkel schwingt. Wenn also im Verlauf der Schwingung des Pendels die verschiedenen Werte von θ der Reihe nach für die einzelnen Zeitpunkte genommen werden, so entsprechen diesen Neigungen des Pendelfadens gegen die Horizontale die Neigungen der Tangente gegen die Wirkungslinie von K in den einzelnen Querschnitten des Drahtes.

Die Kurve, in die der Draht gebogen wird und mit der sich zuerst Bernoulli eingehend beschäftigte, heißt die linea elastica oder elastische

Kurve. Verschiedene Formen davon sind in den Fig. 360 bis 365 dargestellt. Bei der elastischen Linie mit Inflexionspunkten, wie in Fig. 361, werden die Richtungen ihrer Tangenten durch ein schwingendes Pendel dargestellt (wenn es zur Erzielung eines passenden Schwingungsbogens notwendig ist, mit einem Anschlag versehen). Kommen dagegen, wie in Fig. 364, keine Inflexionspunkte in der elastischen Kurve vor, so werden die Richtungen der Tangenten durch ein rotierendes Pendel angegeben, d. h. ein Pendel, das sich in einer vertikalen Ebene stets in demselben Sinne dreht.

Fig. 360.



655. Gestalten der elastischen Linie. — Wir können nun einige einfache Probleme lösen. Es sei zunächst der Fall eines gleichförmigen Bogens betrachtet, der durch eine in der Sehne wirkende dehnende Kraft gebogen ist, wie in Fig. 360.

Wenn K die Dehnkraft in der Sehne ist und x, y die Koordinaten (von A als Anfangspunkt, der Sehne entlang und senkrecht zu ihr) des betrachteten Querschnitts P sind, so ist $G = Ky$. Folglich ist $EJ/R = Ky$, wo R der Krümmungsradius ist, oder, wenn $EJ/K = a^2$ gesetzt wird:

$$Ry = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

Nach einer bekannten Formel der Infinitesimalgeometrie ist aber

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

und somit

$$y = a^2 \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = a^2 \frac{\frac{dp}{dx}}{(1 + p^2)^{3/2}},$$

wenn p die Bezeichnung für dy/dx ist. Dies kann in der Form

$$y\,dy = a^2 \frac{p\,dp}{(1 + p^2)^{3/2}}$$

geschrieben werden, was durch Integration

$$y^2 = C - 2a^2 \frac{1}{(1 + p^2)^{1/2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

oder

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \frac{C - y^2}{\sqrt{4a^4 - (C - y^2)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123\text{a})$$

ergibt. Hieraus folgt

$$x = \int \frac{(C - y^2)\,dy}{\sqrt{4a^4 - (C - y^2)^2}} \quad \ldots\ldots \quad 124)$$

worin entweder der positive oder der negative Wert der Quadratwurzel genommen werden kann.

Gl. (123) kann in der Form

$$+\sqrt{1 + p^2} = \frac{2a^2}{C - y^2}$$

geschrieben werden. Folglich ist, wenn $p = 0$ ist, $C - y^2 = +2a^2$ und

$$y = \pm\sqrt{C \pm 2a^2} \quad \ldots\ldots \quad (125)$$

Dies ergibt die Punkte der Maximal- oder Minimalwerte von y, je nachdem das obere oder das untere Vorzeichen unter der Wurzel auf der

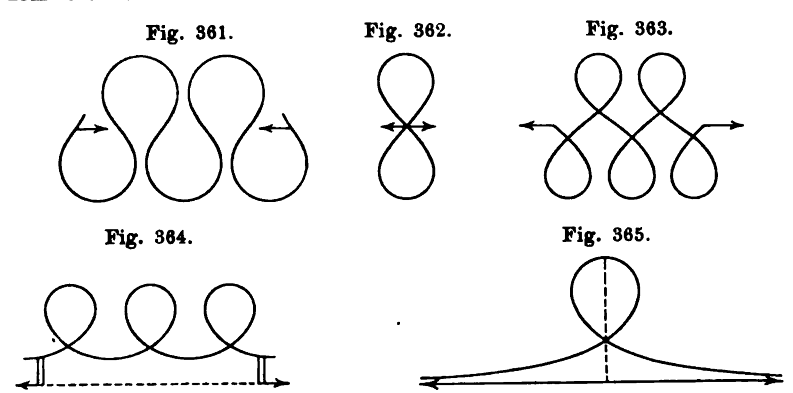


Fig. 361. Fig. 362. Fig. 363. Fig. 364. Fig. 365.

rechten Seite gewählt wird. Wenn C kleiner ist als $2a^2$, kann das negative Vorzeichen unter der Wurzel rechts nicht genommen werden. Nimmt man dann das obere Vorzeichen, so sieht man, daß das obere und das untere Vorzeichen vor der Wurzel gleiche und entgegengesetzte Zahlenmaxima von y ergeben, wie in den Fig. 361 bis 363. Ist $C > 2a^2$, so gibt es abwechselnd Maximal-Minimalwerte wie in Fig. 364. Diese Figur entspricht dem positiven Vorzeichen vor der Wurzel; das negative Vorzeichen würde eine ebensolche Kurve auf der entgegengesetzten Seite der x-Axe liefern.

Wenn y klein ist, kann die Gleichung der Kurve durch allmähliche Annäherung gefunden werden. Hierfür sei der Leser auf die Theoretische Physik von Thomson und Tait, Bd. I, 2. Teil, § 611 verwiesen.

Die Fig. 364 und 365 zeigen verschiedene Formen der elastischen Linie ohne Inflexion. Fig. 365 ist die Kurve für den Grenzfall, wo C gerade gleich $2a^2$ in Gl. (123) gesetzt wird. Die Gleichung der Kurve ist (wie der Leser selbst feststellen möge), wenn die y-Axe die gestrichelte Symmetrielinie ist:

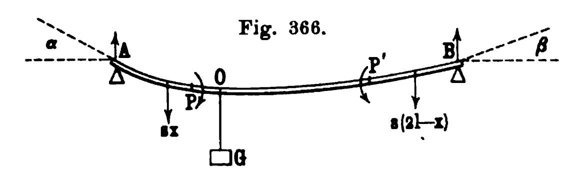
$$x = \mp \sqrt{4a^2 - y^2} \pm a \log \frac{2a + \sqrt{4a^2 - y^2}}{y} \quad . \quad . \quad (126)$$

Die Kurve hat zwei Äste, die vom Scheitelpunkt ausgehen, und deren einer bei $x = +\infty$, der andre bei $x = -\infty$ endet. Die Gleichung drückt den zweiten oder den ersten Ast aus, je nachdem das obere oder das untere Vorzeichen auf der rechten Seite benutzt wird. Diese Kurve ist physikalisch wichtig als die Kurve der kapillaren Oberfläche längs einer in eine Flüssigkeit eintauchenden ebenen Platte.

656. Biegung eines am Ende auf Unterlagen lose aufliegenden Stabes; freie Enden. Ein gleichförmiger Stab wird an den Enden auf gleich hohe Unterlagen aufgelegt und durch sein eigenes Gewicht und ein zwischen den Unterlagen befestigtes Gewicht G gebogen.

Es seien A, B (Fig. 366) die Unterlagen und 0 der Punkt, an dem das Gewicht angreift. Es sei ferner $2l$ die Länge des Stabes,

Fig. 366.



a der Abstand zwischen 0 und A und s das Gewicht des Stabes pro Längeneinheit. Es ist notwendig, zuerst die Krümmung in einem Querschnitt P in einem horizontalen Abstand $x\,(< a)$ von A zu bestimmen. Die Schneide bei A trägt die Hälfte des Stabgewichts und den Teil $(2l - a)/2l$ von G. Folglich wirkt in A eine aufwärts gerichtete Kraft $sl + G(2l - a)/2l$. In dem Querschnitt in der Mitte zwischen A und P wirkt eine nach unten gerichtete Kraft sx. Der horizontale Abstand dieses Punktes von P ist, unter der Annahme, daß die Biegung nur klein sei, $^1/_2\,x$. Das ganze, dem linken Ende des von P rechts befindlichen Stabstückes durch das Stabstück links von P erteilte Kräftepaar ist somit

$$\left(sl + \frac{2l - a}{2l}\,G\right)x - \frac{1}{2}\,sx^2,$$

wenn die durch den Pfeil dargestellte Drehungsrichtung als positiv gilt. Wenn y nach unten gemessen und B für das Biegungsmoment EJ gesetzt wird, erhält man

$$-B\frac{d^2y}{dx^2} = \left[sl + \frac{2l - a}{2l}\,G\right]x - \frac{1}{2}\,sx^2.$$

Integriert man diese Gleichung mit Rücksicht auf x, so erhält man

$$-B\frac{dy}{dx} = \left[sl + \frac{2l - a}{2l}\,G\right]\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}\,sx^3 - B\,tg\,\alpha \quad . \quad . \quad (127)$$

wenn α die Neigung des Stabes gegen die Horizontale in A ist. Durch abermalige Integration ergibt sich

$$-By = \left(sl + \frac{2l-a}{2l}G\right)\frac{x^3}{6} - \frac{1}{24}sx^4 - Bx\,tg\,\alpha \quad . \; . \; (128)$$

ohne eine hinzuzufügende Konstante, da y null ist, wenn x null ist. Hierin ist

$$sl + G\frac{2l-a}{2l} = K_1,$$

die in A angreifende Kraft; setzt man die entsprechende in B angreifende Kraft

$$sl + \frac{Ga}{2l} = K_2,$$

so ergibt eine entsprechende Rechnung für einen Punkt P' rechts von 0

$$-By = \frac{1}{6}K_2(2l-x)^3 - \frac{1}{24}s(2l-x)^4 - B(2l-x)\,tg\,\beta \quad . \; . \; (129)$$

wo β die Neigung des Stabes gegen die Horizontale in B ist (wie in Fig. 366 angedeutet) und x jetzt den Abstand AP' bezeichnet.

Die in den Gl. (127), (128) und (129) für y und dy/dx gegebenen Werte müssen für $x = a$ zusammenfallen. Wenn man also b für $2l - a$ setzt, erhält man für $x = a$:

$$\left.\begin{aligned} -By &= \frac{1}{6}K_1a^3 - \frac{1}{24}sa^4 - Ba\,tg\,\alpha \\ -By &= \frac{1}{6}K_2b^3 - \frac{1}{24}sb^4 - Bb\,tg\,\beta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (130)$$

$$\left.\begin{aligned} -B\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}K_1a^2 - \frac{1}{6}sa^3 - B\,tg\,\alpha \\ -B\frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{2}K_2b^2 + \frac{1}{6}sb^3 + B\,tg\,\beta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (131)$$

Die beiden ersten Gl. (130) ergeben, wenn y aus ihnen eliminiert wird:

$$B\,(a\,tg\,\alpha - b\,tg\,\beta) = \frac{1}{6}(K_1a^3 - K_2b^3) - \frac{1}{24}s(a^4 - b^4),$$

und die beiden andern, (131), wenn dy/dx eliminiert wird:

$$B\,(tg\,\alpha + tg\,\beta) = \frac{1}{2}(K_1a^2 + K_2b^2) - \frac{1}{6}s(a^3 + b^3);$$

daraus folgt, wenn β eliminiert wird:

$$B(a+b)\,tg\,\alpha = \frac{1}{6}K_1a^2(3b+a) + \frac{1}{3}K_2b^3 - \frac{1}{24}s(4a^3b + a^4 + 3b^4)$$

und ebenso, wenn anderseits α eliminiert wird:

$$B(a+b)\,tg\,\beta = \frac{1}{6}K_2 b^2(3a+b) + \frac{1}{3}K_1 a^3 - \frac{1}{24}s(4b^3a + b^4 + 3a^4).$$

Nun ist aber $K_1 = sl + Gb/(a+b)$ und $K_2 = sl + Ga/(a+b)$. Setzt man dies in die beiden letzten Gleichungen ein und reduziert, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} B(a+b)\,tg\,\alpha &= \frac{1}{6}Gab(a+2b) + \frac{1}{24}s(a+b)^4 \\ B(a+b)\,tg\,\beta &= \frac{1}{6}Gab(b+2a) + \frac{1}{24}s(a+b)^4 \end{aligned}\right\} \quad (132)$$

wodurch die Neigungen des Stabes an seinen Enden bestimmt sind; das erste Glied rechts rührt von dem angehängten Gewichte, das zweite von dem Eigengewichte des Stabes her. Der Leser mag die gefundenen Resultate näher studieren, indem er entweder G oder s als zu vernachlässigende Größe annimmt.

Der Wert von y ist für jeden Wert von x durch Gl. (128) und (129) gegeben, wenn die Werte von $tg\,\alpha$ oder $tg\,\beta$ und K_1 oder K_2 eingesetzt werden. Der Leser mag sich davon überzeugen, daß die nur der Aufhängung eines Gewichtes G an einem Punkte Q zuzuschreibende Krümmung des Stabes an einem andern Punkte P derjenigen Krümmung gleich ist, welche im Punkte Q hervorgerufen werden würde, wenn G im Punkte P aufgehängt worden wäre. Wenn G am Mittelpunkte angreift, so daß $a = b = l$ und $K_1 = \frac{1}{2}\,Gsl$ wird, so erhält man nach Reduktion:

$$By = \frac{1}{6}\,Gl^3 + \frac{5}{24}\,sl^4 \quad \ldots\ldots \quad (133)$$

wodurch die Senkung des Stabes im Mittelpunkt gegeben ist.

Wenn das Eigengewicht $2\,sl$ des Stabes selbst zu vernachlässigen ist im Vergleich mit G, so ist

$$y = \frac{1}{6}\,\frac{Gl^3}{B} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (134)$$

Durch Beobachtung dieses Wertes von y kann der Elastizitätsmodul E ($= B/J$) für das Material des Stabes bestimmt werden. Es ist nämlich

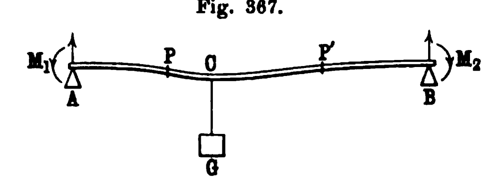
$$E = \frac{1}{6}\,\frac{Gl^3}{Jy} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (135)$$

Der Leser mag selbst das Problem eines Stabes lösen, der in seinem Mittelpunkt auf einer Schneide aufgehängt ist und durch sein eigenes Gewicht gebogen wird. Es wird sich finden, daß die Enden gegen den Mittelpunkt um einen Betrag von $\frac{3}{24}\,sl^4/B$ herunterhängen.

657. Ein an den Enden unterstützter Stab; horizontale Enden. Der Leser mag gleichfalls das Problem eines Stabes lösen, der, an seinen Enden auf zwei Unterlagen ruhend und durch ein einziges, an einem beliebigen Punkte C angreifendes Gewicht gebogen, im Gegen-

satze zu dem bisherigen Falle aber der Bedingung unterliegt, daß die Enden unter dem Zwange stehen, horizontal zu bleiben. Um diese horizontale Lage zu erzielen, muß man sich Kräftepaare M_1, M_2 an den Enden wirkend denken, wie in Fig. 367. Für einen Punkt P zwischen A und C ergibt sich

Fig. 367.



$$B\frac{d^2y}{dx^2} = M_1 - K_1 x \quad \ldots\ldots \quad (136)$$

und für einen Punkt P' zwischen C und B

$$B\frac{d^2y}{dx^2} = M_2 - K_2(2l - x) \quad \ldots\ldots \quad (137)$$

Diese Formeln ergeben integriert für P und P'

$$\left.\begin{aligned} By &= \frac{1}{2} M_1 x^2 - \frac{1}{6} K_1 x^3 \\ By &= \frac{1}{2} M_2 (2l - x)^2 - \frac{1}{6} K_2 (2l - x)^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (138)$$

Diese Werte von y müssen aber in C zusammentreffen, wo $x = a$, $2l - x = b$ angenommen wird. Folglich ist

$$a^2(3M_1 - K_1 a) = b^2(3M_2 - K_2 b).$$

Auch muß dy/dx, wie es aus den beiden Gl. (138) gewonnen wird, für C dasselbe sein, und diese Bedingung ergibt

$$a(2M_1 - K_1 a) = -b(2M_2 - K_2 b).$$

Zwei weitere Gleichungen werden dadurch gewonnen, daß man die Momente um B und A nimmt, nämlich

$$K_1 = \frac{Gb + M_1 - M_2}{a + b}, \quad K_2 = \frac{Ga + M_2 - M_1}{a + b},$$

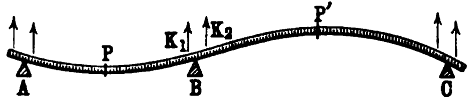
aus denen dann mit Hilfe der vorhergehenden Gleichungen die Werte von M_1, M_2, K_1, K_2 ermittelt werden können.

Die in Gl. (138) eingesetzten Resultate ergeben schließlich die Biegung in jedem beliebigen Punkte in AC oder CB. Die Inflexionspunkte können durch Einsetzen der Werte von M_1, K_1 in Gl. (136) und M_2, K_2 in Gl. (137) und Nullsetzung von d^2y/dx^2 ermittelt werden.

658. Clapeyronsches Theorem der drei Momente. Es soll hier ein weiteres Problem betrachtet werden, das in der Technik von Wichtigkeit ist. Denken wir uns einen nur durch sein eigenes Gewicht gebogenen Stab auf einer beliebigen Anzahl von gleich hohen Unter-

lagen in den Punkten A; B u. s. w. (Fig. 368) ruhend. Wir können von einer beliebigen Unterlage, etwa B, ausgehen, wenn wir die auf die Stabteile auf beiden Seiten dieser Unterlage wirkenden Scherungskräfte K_1, K_2 und das in B auf die Substanz des Stabes auf jeder Seite der Unterlage durch die Substanz auf der andern Seite wirkende Kräfte-

Fig. 368.

paar M_B betrachten. Rechnet man den Abstand x von B nach rechts, so ergibt sich für einen Punkt P':

$$B\frac{d^2y}{dx^2} = M_B - K_2x + \frac{1}{2}sx^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (139)$$

entsprechend ergibt sich, wenn man den Abstand nach links für einen Punkt P nimmt:

$$B\frac{d^2y}{dx^2} = M_B - K_1x + \frac{1}{2}sx^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

Da y nach unten gerechnet wird, so ist nach Gl. (139), wenn β die Neigung des Stabes gegen die Horizontale bei der Unterlage B ist,

$$By = \frac{1}{2}M_Bx^2 - \frac{1}{6}K_2x^3 + \frac{1}{24}sx^4 - Bx\,tg\,\beta \quad . \quad . \quad (141)$$

und nach Gl. (140)

$$By = \frac{1}{2}M_Bx^2 - \frac{1}{6}K_1x^3 + \frac{1}{24}sx^4 + Bx\,tg\,\beta \quad . \quad . \quad (142)$$

Das x bedeutet in der ersten dieser Formeln den Abstand zwischen P' und B, in der zweiten den Abstand zwischen P und B.

Wenn a der Abstand BA und b der Abstand BC ist, M_A und M_C die Biegungskräftepaare in A und C sind, dann ist, da Bd^2y/dx^2 in Gl. (140) das Kräftepaar in A wird, wenn $x = a$ ist, und Bd^2y/dx^2 in Gl. (139) dasjenige in C, wenn $x = b$ ist,

$$M_A = M_B - K_1a + \frac{1}{2}sa^2, \quad M_C = M_B - K_2b + \frac{1}{2}sb^2 \quad . \quad . \quad (143)$$

woraus K_1 und K_2 aus den Biegungskräftepaaren M_A, M_B, M_C und den Abständen a, b bestimmt werden können.

Ferner ergibt sich aus Gl. (141) und (142), da $y = 0$ ist, wenn $x = b$ und wenn $x = a$ ist:

$$\frac{1}{2}M_Bb - \frac{1}{6}K_2b^2 + \frac{1}{24}sb^3 - B\,tg\,\beta = 0$$

$$\frac{1}{2}M_Ba - \frac{1}{6}K_1a^2 + \frac{1}{24}sa^3 + B\,tg\,\beta = 0.$$

Eliminiert man hieraus K_1 und K_2 nach Gl. (143), so erhält man

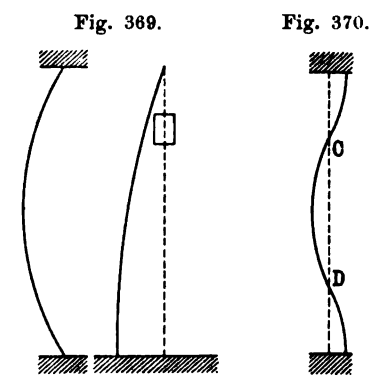
$$a(M_A + 2\,M_B) + b(M_C + 2\,M_B) = \frac{1}{4}\,s(a^3 + b^3) \quad . \; . \; (144)$$

eine die drei Kräftepaare M_A, M_B, M_C in den drei aufeinander folgenden Unterlagen miteinander verbindende Beziehung.

Für nähere Einzelheiten über allgemeine Elastizitätstheorie und Erörterung einiger ihrer tiefsten Probleme sei der Leser auf Thomson und Tait und auf die St. Venantschen Untersuchungen verwiesen. Übrigens ist auf diesem Gebiete viel mit Hilfe graphischer Methoden geleistet worden, besonders in der Behandlung der Probleme von praktischer oder industrieller Bedeutung, doch muß hierfür auf die Lehrbücher der angewandten Mechanik verwiesen werden.

659. Festigkeit eines langen Stabes unter Druckwirkung („Säulenfestigkeit"). Ein an den Enden abgerundeter Stab. Das folgende Problem der elastischen Linie ist von praktischer Bedeutung. Ein langer gerader Stab von gegebenem Biegungsmoment B, das in allen durch die Axe gelegten Ebenen dasselbe ist, wirkt als ein Pfeiler, der einem Enddruck von gegebenem Betrag K Widerstand leistet. Offenbar wird der Stab, wenn der Druck zu groß wird und die Enden so festgehalten werden, daß sie sich nicht nach der Seite bewegen können, an einem Zwischenpunkte nachgeben, er wird durchbrechen (indem er nämlich auf der einen Seite zusammengepreßt und auf der anderen auseinandergerissen wird); oder aber, wenn ein Ende für seitliche Bewegung frei ist, wird er die in der zweiten Zeichnung der Fig. 369 angegebene Lage annehmen. Es gibt zwei Fälle, die wir betrachten können: 1. der, in welchem die Enden hinsichtlich der Richtung ohne Zwang sind, dadurch, daß sie verrundet sind und sich infolgedessen frei drehen können; 2. der, in dem die Tangenten an die Stabenden gezwungen sind, die Richtung der Drucklinie zu haben, wie in Fig. 370. Wir wollen annehmen, daß in beiden Fällen die Stabenden in der Drucklinie liegen. Im ersten Falle sind die Enden Punkte von der Krümmung null, d. h. Inflexionspunkte auf der elastischen Linie; im zweiten Falle gibt es Inflexionspunkte bei C und D.

Fig. 369. Fig. 370.



Der Stab werde leicht abgebogen, während die Enden in der Drucklinie festgehalten werden, wie in der ersten Zeichnung der Fig. 369; dann ist, wenn x längs der Drucklinie von einem festen Ende aus

gemessen und der Abstand eines Stabpunktes von dieser Linie mit y bezeichnet wird, unter Einsetzung von m^2 für K/B:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2 y = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$y = A \cos(mx + \alpha),$$

unter der Bedingung, daß $y = 0$ ist, wenn $x = 0$ ist und wenn $x = 2l$, der Länge des Stabes, ist. Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn

$$\alpha = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad 2ml + \alpha = (2n + 3)\frac{\pi}{2}$$

ist, so daß $2ml = \pi$ oder

$$\frac{K}{B}(2l)^2 = \pi^2 \quad \dots \dots \dots \quad (145)$$

ist. Also wird der Stab unstabil sein, wenn K/B einen größeren Wert hat als $\pi^2/4l^2$.

660. Ein an beiden Enden befestigter Stab resp. Säule. Im zweiten Falle (§ 659) muß ein Kräftepaar vom Moment M an jedem Ende angreifen, um die Tangenten an die Enden in der Drucklinie zu erhalten. In der Praxis kann dies geschehen, indem man die Säulenenden eben macht und sie zwingt, zur Drucklinie senkrecht zu bleiben. Folglich lautet die Gleichung des Gleichgewichts:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2\left(y - \frac{M}{K}\right) = 0$$

und ihre Lösung:

$$y = \frac{M}{K} + A\cos(mx + \alpha).$$

Die Bedingungen sind, daß wiederum $y = 0$ sei, wenn $x = 0$ und wenn $x = 2l$ ist; ferner aber, daß $dy/dx = 0$ ist, wenn $x = 0$, wenn $x = l$ und wenn $x = 2l$ ist. Diese Bedingungen sind alle erfüllt, wenn

1. $\frac{M}{K} = A$, 2. $\alpha = (2n + 1)\pi$,

3. $ml + \alpha = (2n + 2)\pi$, 4. $m2l + \alpha = (2n + 3)\pi$

gesetzt wird. Folglich ist

$$ml = \pi$$

oder

$$\frac{K}{B}(2l)^2 = 4\pi^2 \quad \dots \dots \dots \quad (146)$$

Demnach wird der Stab unstabil sein, wenn $K/B > \pi^2/l^2$ ist. Der Stab hat also die vierfache Widerstandskraft gegen Druck, wie der (ebenso lange) Stab aus § 659.

Der Wert von y an den Inflexionspunkten ist M/K, und mitten zwischen diesen Punkten ist er $2M/K$. Also liegen die Inflexionspunkte $\frac{1}{2}l$ von den Enden entfernt. Man sieht leicht ein, daß dies den größten Abstand der die Enden verbindenden Linie von der Verbindungslinie der Inflexionspunkte ergibt. Man wird ferner bemerken, daß der mittlere Teil, der die halbe Länge, l, des ganzen Pfeilers hat, wie ein den in § 659 aufgeführten Bedingungen unterliegender Pfeiler wirkt, und daß der Wert von K/B, nämlich π^2/l^2, entsprechend ist.

Es gibt noch andere Fälle, die aber alle in derselben Weise bearbeitet werden können. Man wird bemerken, daß die Theorie $\pi^2/4l^2$, π^2/l^2, $9\pi^2/16l^2$ als die Grenzwerte von K/B für drei Säulen von derselben

Fig. 371.

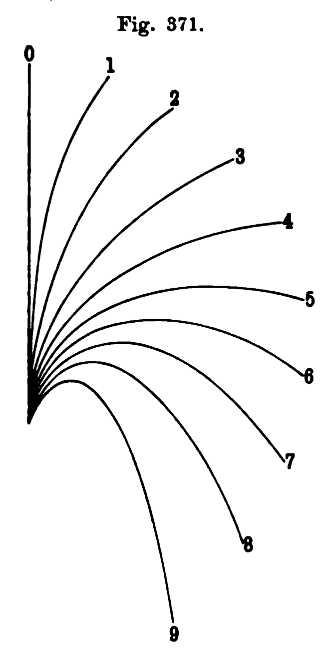
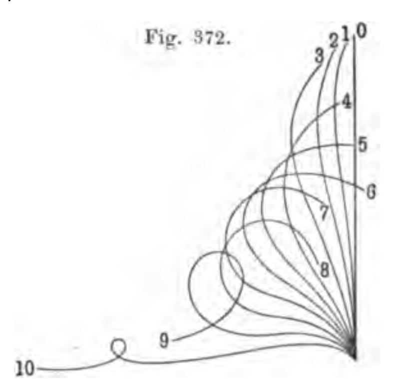


Fig. 372.



Länge $2l$ mit ihren Enden in der Drucklinie ergibt, deren erste abgerundete Enden, deren zweite befestigte Enden in der Druckrichtung und deren dritte ein abgerundetes und ein in der Druckrichtung befestigtes Ende hat. Die Ergebnisse im Falle seitlicher Verrückung der Enden können ohne weiteres aus einer Betrachtung der Wirkung eines der in Fig. 370 zwischen einem Inflexionspunkt und dem anstoßenden Ende gelegenen Stabteiles oder der einen Hälfte des mittleren Teiles, je nach dem vorliegenden Falle, gewonnen werden.

In Fig. 371 und 372 sind für zwei verschiedene Fälle die mit steigender Beanspruchung eintretenden Gestalten von Stäben mit freiem Kopfende veranschaulicht.

661. Kurzer Balken. In der Praxis gebräuchliche Formel. Es wird ohne weiteres einleuchten, daß der Balken, wenn er sehr kurz ist, nicht in der hier betrachteten Weise seitlich ausweichen, sondern der zermalmenden Kraft nachgeben wird. Eine empirische Formel von

Gordon als Ergebnis der Hodgkinsonschen Experimente über die Stärke von Säulen unter verschiedenen Umständen findet sich in Rankines „Angewandter Mechanik".

Wenn P der gesamte wirksame Druck ist, f und a Konstanten sind, L die Länge des Balkens, S die Fläche und k den Trägheitsradius des Querschnittes bezeichnet, so lautet die Formel:

$$P = \frac{fS}{1 + 4a\frac{L^2}{k^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (147)$$

Die Werte von f und a werden so gewählt, daß die P-Werte mit dem Experiment übereinstimmen. Es findet sich, daß die obige Theorie nur dann mit dem Experiment übereinstimmt, wenn der Balken sehr lang ist; für Balken von auch nur mittlerer Länge muß die empirische Formel benutzt werden. Die Hodgkinsonschen Experimente ergeben folgende Werte von f und a:

	f (kg/qcm)	a
Schmiedeeisen, massiver rechteckiger Querschnitt . .	2520	$\frac{1}{3000}$
Gußeisen, hohler Zylinder	5600	$\frac{1}{800}$
„ massiver „	5600	$\frac{1}{400}$

Die erwähnten Experimente beweisen, daß eine Säule oder ein Balken, wenn sie an beiden Enden verrundet sind, so daß sie dort in Bezug auf Richtung frei sind, dieselbe Biegsamkeit und dieselbe Stärke haben wie eine Säule von demselben Material und Querschnitt, die an beiden Enden festgemacht und von der doppelten Länge ist. Dieses Ergebnis ist in Gl. (145) und (146) ausgedrückt.

662. Unvollkommenheit der Elastizität. Dauernde Deformation. Das Thema der den gewöhnlichen Substanzen anhaftenden Unvollkommenheit der Elastizität und der Elastizitätsgrenzen ist viel zu umfassend, um in diesem Kapitel behandelt zu werden; aber einige Andeutungen über das Verhalten gewöhnlicher Materialien müssen gemacht werden. Unter gewissen Umständen scheint es tatsächlich selbst nach starken Deformationen eine vollkommene Rückkehr zur ursprünglichen Gestalt zu geben; z. B. wird eine Elfenbein- oder Stahlkugel, wenn man sie auf eine Marmortafel herunterfallen läßt, merklich abgeplattet und gewinnt dann ihre vollkommene Kugelgestalt wieder. Anderseits gibt es Umstände, unter denen die Wiederherstellung nur näherungsweise erfolgt; einem Eisen- oder Stahldraht kann nur eine

mäßige Verlängerung erteilt werden, ohne daß sie Ursache einer dauernden Verlängerung wird. Ferner scheint die Fähigkeit der Körper, ihre Gestalt wiederzugewinnen, von der Zeit abhängig zu sein, während welcher der Körper in deformiertem Zustande erhalten wird. Ein für lange Zeit in Dehnung erhaltenes Gummiband erweist sich seiner Fähigkeit, sich wieder zusammenzuziehen, verlustig gegangen, ebenso ein eisernes Band. Es scheint, daß das Material im Verlaufe der Zeit eine neue molekulare Anordnung annimmt, in der die potentielle Energie des Zuges nicht mehr vorhanden ist. Wenn der Körper diesen neuen inneren Zustand annimmt, wird die Energie in situ zerstreut. Man sagt dann von der Substanz, daß sie eine dauernde Deformation erlitten hat.

Die Verlängerung eines Drahtes, selbst wenn er keine vollkommene Wiederherstellung nach Entfernung des Zwanges erfährt, ist annähernd proportional der dehnenden Kraft. Die Dilatationskurve (die Abscissen stellen die Dilatationen, die Ordinaten den Zug dar) ist zuerst eine gerade Linie, nachher nehmen die Dilatationen schneller zu als der Zug, und die Kurve ist nach unten konkav. Bei noch weiterer Elongation erreicht der Zug die sog. Elastizitätsgrenze, und eine kleine Zunahme der dehnenden Kraft bewirkt eine bedeutende Zunahme der Länge. Das Objekt hat angefangen an gewissen Stellen plastisch zu werden.

663. Wirkung der abwechselnden Anwendung und Aufhebung des Zwanges auf die Elastizitätsgrenzen. Man hat beobachtet, daß, wenn ein — nicht zu starker — Zug eine Reihe von Malen nacheinander angewandt und wieder aufgehoben wird, die Substanz einen stationären Zustand annimmt, in welchem die durch die Anwendung des Zwanges hervorgerufene Dilatation mit seiner Aufhebung wieder aufhört. Ein analoges Ergebnis zeigt sich, wenn andere Änderungen durch Anwendung von Zwang erzeugt werden — z. B. Änderungen im induzierten Magnetismus eines Eisendrahtes unter der Wirkung einer magnetisierenden Kraft. Mit der Anwendung und Aufhebung dehnender Kraft und seitlichen Druckes finden quasi elastische Änderungen der Magnetisierung statt, die erst nach einer beträchtlichen Anzahl von Anwendungen und Aufhebungen der Beanspruchung einen konstanten Wert annehmen. Also scheint es, daß durch den Zwang in dem Eisen eine molekulare Änderung erzeugt wird, die von verwandter oder gleicher Natur ist wie die bei der Magnetisierung in Betracht kommende molekulare Änderung, und die nach wiederholter Anwendung und Aufhebung der Beanspruchung einen konstanten Wert annimmt.

Man hat ferner experimentell an Drähten beobachtet, daß die meisten einer raschen Folge von Dehnungen und Zusammenziehungen ausgesetzten Substanzen eine Verringerung der den Zusammenhang der

Teile zerreißenden Beanspruchung, der sog. **Zugfestigkeit**, aufweisen. Ferner ist, wenn ein Draht durch ganz allmähliche Steigerung der Belastung bis zum Zerreißungspunkte gedehnt wird, die hierzu erforderliche Beanspruchung sehr wesentlich größer, als wenn die Belastung plötzlich vollzogen wird; es scheint, daß der Draht durch die allmähliche Behandlung „temperiert" und zu größerer Festigkeit „erzogen" wird.

Die langsame Dehnung von Drähten, die unter Belastung stehen, ist ein Gegenstand sehr interessanter Beobachtung. Bei geringer Belastung vollzieht sich die Dehnung momentan, bei etwas größerer immer noch in kurzer Zeit; nähert sich indessen die Belastung der kritischen, so erstreckt sich die Dehnung über eine beträchtliche Zeit, und es ist schwer, diese Zeit abzuwarten und zu bestimmen, weil die Dehnung mit fortschreitender Zeit immer geringer wird und annähernd wie eine Exponentialfunktion der Zeit (mit negativem t im Exponenten) verläuft.

Für jede feste Substanz gibt es eine Grenze, jenseits deren sie nicht beansprucht werden kann, ohne dauernde Deformation zu erleiden; diese Grenze heißt „Elastizitätsgrenze". Bei einem und demselben Stoffe kann sie sehr verschieden sein, je nach der Art der Beanspruchung, und es ist demgemäß zu unterscheiden zwischen Dehnungsgrenze, Biegungsgrenze, Torsionsgrenze u. s. w. Unterhalb der Elastizitätsgrenze besitzt der Stoff „elastische Vollkommenheit", d. h. er kehrt nach Aufhebung der Beanspruchung genau in den Anfangszustand zurück, sei es sofort, sei es (nach stärkerer Beanspruchung) allmählich. Übrigens ist die Elastizitätsgrenze keine eigentlich bestimmte, mathematische Größe, die sich beliebig genau angeben läßt; sie hängt vielmehr in hohem Maße von der Feinheit der Feststellung einer dauernden Deformation ab: je empfindlicher diese Feststellung, desto tiefer herunter rückt jene Grenze; in der Praxis muß man daher eine Übereinkunft treffen, was man als dauernde Deformation — z. B. bei der Dehnung $^1/_2$ mm auf 1 m — gelten lassen will.

Charakteristisch für eine Substanz ist ferner die gegenseitige Lage ihrer beiden kritischen Punkte, der Elastizitätsgrenze und der Festigkeitsgrenze; bei manchen, wie Glas (bei normaler Temperatur), fällt die letztere mit der ersteren nahe zusammen, solche Stoffe heißen spröde; bei anderen kann man starke dauernde Deformation hervorrufen, ohne ihren Zusammenhang zu gefährden — solche Stoffe, wie Blei, heißen plastisch oder geschmeidig. In Wahrheit sind vermutlich alle Stoffe unter geeigneten Umständen plastisch. Diese Plastizität wollen wir nun noch etwas genauer ins Auge fassen.

664. Plastizität. Grenzdruck. Viele Stoffe geraten, wenn sie genügend großen Beanspruchungen unterworfen werden, in einen Zustand, in dem sie fortdauernd ihre Gestalt ändern; sie kommen, wie man sagen kann, in „Fluß", verhalten sich also in gewisser Hinsicht wie Flüssig-

keiten. Wird dann der Druck beseitigt, so haben sie eine neue Gestalt angenommen, die sie nun dauernd bewahren. Ein naheliegendes Beispiel sind die Münzen, die aus Gold-, Silberscheiben oder dergl. durch den Druck des Stempels hergestellt werden und ihren Kopf, ihr Wappen, ihre Inschrift nun für Jahrhunderte konservieren.

Besonders interessante Versuche über die Plastizität und den Fluß fester Stoffe sowie über den Grenzdruck, bei dem der Fluß eintritt, die „Solidität", hat Tresca (Mém. de l'Acad. des Sciences, Paris, Bd. XVIII u. XX, 1868 u. 1872) angestellt. Es wurde z. B. Blei aus einer Öffnung im Boden eines Gefäßes herausgetrieben u. s. w. Dabei ergab sich als Grenzdruck für Blei rund 200 000 g für das Quadratzentimeter.

Ist G der Grenzdruck und wird ein größerer Druck G_1 angewandt, so setzt sich der Fluß fort, wenn auch nicht unbegrenzt. Es kann nämlich vorkommen, daß mit fortschreitendem Fluß die angreifenden Kräfte sich dem Werte G nähern, z. B. beim Druck auf einen Stab, der dabei nicht nur an Länge einbüßt, sondern auch an Querschnitt zunimmt, so daß der Druck für die Querschnittseinheit abnimmt. Ein sehr bezeichnendes Beispiel dieses Verhaltens liefert der Druck einer Linse (Kugelfläche) gegen eine ebene Platte desselben Materials; hier paßt sich — bei plastischen Substanzen — der Körper einem bestimmten Einheitsdrucke an, den man als Grundlage für eine exakte Definition der Härte plastischer Körper benutzen kann [vergl. Auerbach, Wied. Ann. Bd. 45 (1892)].

Bei einer Flüssigkeit ist der Grenzdruck natürlich null. Bei Körpern, die an der Grenze zwischen beiden Aggregatzuständen stehen, wie Pech oder erwärmtes Siegellack, ist eine gewisse „Solidität" vorhanden. Wenn ein Stab aus derartigem Material gebogen und das biegende Kräftepaar dann plötzlich entfernt wird, so geht die Biegung um einen gewissen Betrag zurück, als ob die Substanz wirkliche Gestaltselastizität besäße. Man muß indes bedenken, daß für den Widerstand eines elastischen Körpers gegen Biegung beide Elastizitätsmoduln eines isotropen Körpers in Betracht kommen. Der zähe Stab bietet also einen Gestaltwiderstand dar, der von der Geschwindigkeit der Gestaltänderung abhängt; außerdem aber einen wahren Volumenwiderstand. Jener ist sehr groß, selbst für kleine Deformationsgrade. Die komprimierten und dilatierten Teile können sich von der erfahrenen Volumenänderung nicht sofort befreien, weil die Rückveränderung des Volumens nur mit einer gleichzeitigen Gestaltänderung vor sich gehen kann, die ihrerseits Zeit braucht. Wird also das angreifende Kräftepaar entfernt, so findet, infolge der Reaktion gegen Kompression und Dilatation, elastische Rückkehr statt; wird dagegen das Kräftepaar aufrecht erhalten, so hilft sich die Substanz durch seitliche Dilatation der komprimierten und seitliche Kontraktion des dilatierten Gebietes, und es tritt ein gewisser Grad von Rückbiegung ein.

Übrigens ist es wahrscheinlich, daß Pech, wenn es rasch und periodisch wechselnder Beanspruchung von geringem Betrage unterworfen wird, eine wirkliche Solidität besitzt; denn wenn man ein Stück Pech in Glockenform gießt, gibt es beim Anschlagen einen richtigen musikalischen Ton von bestimmter Höhe von sich, ein Beweis, daß die Gegenkraft mit der Abweichung der Glocke von ihrer mittleren oder Gleichgewichtsgestalt proportional ist.

Dies gilt, wie gesagt, für periodische Beanspruchung; bei stetiger, wenn auch kleiner Beanspruchung dagegen — es genügt hierzu das eigene Gewicht des Pechs — gibt es allmählich nach und fließt schließlich in eine dünne Schicht aus. Bei anderen Stoffen ist hierzu schon eine größere Kraft erforderlich, bei Blei eine sehr große, und bei vielen Metallen ist die Solidität so groß, daß überhaupt kein noch so geringer und noch so langsamer Fluß stattfindet. So hat man z. B. in alten Gräbern und in den Ruinen alter Städte Ornamente, Schmuckstücke und Kunstwerke aus Gold, Silber oder Bronze gefunden, die Tausende von Jahren alt sind und doch alle Linien und Feinheiten noch mit solcher Schärfe aufweisen, als ob sie eben erst hergestellt worden wären.

665. Zähigkeit der festen Körper. Von den hier betrachteten Eigenschaften der festen Körper wohl zu unterscheiden ist ihre Zähigkeit oder innere Reibung, in dem in § 343 (S. 373) und § 348 (S. 376) erläuterten Sinne. Die Gestaltänderung eines festen Körpers involviert eine relative Bewegung seiner kleinsten Teile gegeneinander, und dieser Bewegung leisten die Reibungskräfte Widerstand. Dies wird in sehr einfacher Weise durch die Tatsache bewiesen, daß die Schwingungen einer Stimmgabel weit rascher abklingen, als es nach der Energieabgabe an die umgebende Luft, d. h. nach der äußeren Reibung allein, zu erwarten wäre; viel kräftiger als diese äußere muß also die innere Reibung sein; ähnliches folgt aus den Erscheinungen der Torsionsschwingungen u. a. m. Es ist dies sogar eine mit Vorteil angewandte Methode, um die innere Reibung zu messen.

666. Elastische Ermüdung. Innere Reibung der festen Körper. Es ist bemerkenswert, daß in den erwähnten Fällen, besonders bei Torsionsschwingungen, die Abnahme der Amplituden (unter gewissen Umständen, die noch nicht völlig klar gestellt sind) von der Zeit abhängt, während deren die Schwingungen bereits unterhalten wurden. Derartige Versuche hat Lord Kelvin im Jahre 1865 angestellt (Proc. R. Soc., Mai 1865); sie zeigten, daß ein Draht, der tage- oder wochenlang in Schwingungen erhalten wurde, eine wesentlich stärkere Dämpfung besaß als ein anderer, der während dieser Zeit in Ruhe blieb. Diese Ergebnisse stimmen freilich nicht mit den späteren von Streintz (Pogg. Ann. S. 153, 1874), Pisati (Sitz.-Ber. Wien. Ak. **80** (2), 1879) u. a., welche das entgegengesetzte Resultat erhielten.

Die Zähigkeit einer großen Zahl von Drähten bei verschiedenen Temperaturen ist von Blyth und Dunlop und dem Verfasser dieses Werkes untersucht worden, mit dem Ergebnis, daß in Stahl, Messing und Kupfer (Handels- wie reinem Kupfer) die Dämpfung, also auch die innere Reibung bei 90° merklich größer ist als bei 15°; nur bei einem Draht aus Neusilber verhielt es sich umgekehrt. Man hätte erwarten sollen, daß sich alle Metalle wie das Neusilber verhielten, weil mit steigender Temperatur eine Annäherung an den Zustand der Flüssigkeiten stattfindet, deren innere Reibung natürlich sehr viel kleiner ist als die der festen Körper. Auch W. Voigt hat eine systematische Untersuchung der Zähigkeit der Metalle angestellt (Wied. Ann. S. 47, 1892), aber nur für Kupfer und Nickel Ergebnisse erhalten, die als reiner Ausdruck der inneren Reibung anzusehen sind (die Zahlenwerte der Zähigkeit sind hier, wie zu erwarten, ganz kolossal); für die übrigen Metalle kompliziert sich die Deutung der Resultate durch die offenbare Mitwirkung der elastischen Nachwirkung und event. noch anderer Faktoren.

Von Wichtigkeit ist ferner, daß auch die Schwingungsdauer (Voigt) und die Schwingungsweite (Gray, Blyth und Dunlop) von Einfluß auf das Dämpfungsverhältnis ist; es bedarf daher noch weiterer Aufklärung dieser Fragen.

667. Resilienz eines deformierten Körpers. Wirkung der plötzlichen Anwendung einer Kraft. Rein sprachlich bedeutet Resilienz eines deformierten Körpers die Reaktion desselben gegen die angewandten deformierenden Kräfte, die Tendenz zurückzuspringen. In der wissenschaftlichen Elastizitätslehre benutzt man indessen den Ausdruck in etwas anderem Sinne, man versteht darunter die bei einer gegebenen Deformation eines Körpers geleistete Arbeit.

Wenn der elastische Widerstand dem Hookeschen Gesetze genügt, so ist das Maß der Resilienz offenbar das Produkt aus der zuletzt angewandten Kraft und der halben zuletzt stattfindenden Deformation. Wird z. B. eine Spiralfeder durch ein Gewicht von 6 kg um 60 cm ausgezogen, so ist ihre Resilienz in erg:

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 1000 \times 60 \times 981 = 176\,580\,000,$$

oder in Meterkilogrammen:

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 0{,}6 = 1{,}8.$$

Von der Beanspruchung wird hier angenommen, daß sie in kleinen Stufen gesteigert werde. Wenn die Endkraft gleich in voller Höhe plötzlich einsetzte, so würde eine Dehnung eintreten, doppelt so groß wie die vorige. Denn das Gewicht würde bei der Dehnung der Feder nach unten rücken, seine Geschwindigkeit würde sich steigern, bis die

nach oben gerichtete, von der Dehnung herrührende Gegenkraft gerade gleich dem Gewichte wäre, dann würde sie ebensolange wieder abnehmen, das Gewicht also im ganzen herabsinken, so lange, bis die nach oben gerichtete elastische Kraft gleich dem doppelten Gewichte wäre. Dann erst kehrt das Gewicht um, die Feder zieht sich entsprechend zusammen, und es beginnt eine Reihe von auf und ab gerichteten, allmählich abnehmenden Schwingungen.

Diese Betrachtung wird dem Leser zugleich klar machen, wie es kommt, daß ein Körper durch eine plötzliche Beanspruchung brechen kann, während er eine ebensogroße, wenn sie ganz allmählich angewandt wird, ohne Schaden aushält. Es ist das der Gegensatz zwischen statischer und dynamischer Festigkeit; der extreme Fall der letzteren ist die Stoßfestigkeit.

Der Betrag der Arbeit, die der Körper wieder abgibt, wenn ihm erlaubt wird, in seine ursprüngliche Konfiguration zurückzukehren, kann unter Umständen merklich verschieden sein von der bei seiner Deformation geleisteten, und zwar selbst in dem Falle, daß das Hookesche

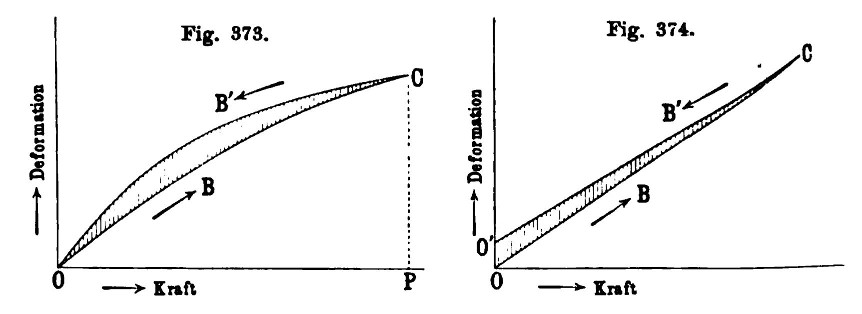


Fig. 373. Fig. 374.

Gesetz für den betreffenden Vorgang erfüllt ist. Man kann sich das durch graphische Darstellung nach der in § 187 (S. 198) angegebenen Art leicht klar machen. Nimmt man nämlich als Abscissen die Kräfte, als Ordinaten die Deformationen, so erhält man eine Kurve der aufsteigenden Deformationen OBC (Fig. 373). Für absteigende Kräfte wird dann die Kurve eine andere, $CB'O$, und zwar liegt sie überall höher als die erste Kurve; bei jeder unvollkommenen Federwage kann man das ganz im groben sehen. Die entsprechenden, von der Abscissenaxe, der Endordinate und der Kurve eingeschlossenen Flächen, also $OPCBO$ bezw. $OPCB'O$ sind die betreffenden Arbeiten, ihre Differenz, d. h. die von den beiden Kurven eingeschlossene Fläche $OBCB'O$, ist daher die bei dem „Kreisprozeß" anscheinend verloren gegangene, in Wahrheit aber zerstreute (in Wärme und innere Zustandsänderung des Körpers übergegangene) Energie. Soweit der allgemeine Fall. Ist speziell das Hookesche Gesetz, und zwar für Hin- und Rückweg, erfüllt, so ist ein Kreisprozeß dieser Art nicht möglich, da die Kurven dann gerade Linien sind und folglich, wenn sie gleiche Endpunkte

haben, zusammenfallen müssen. Es kann aber (Fig. 374) von C aus die absteigende Gerade $CB'O'$ über der aufsteigenden verlaufen, sie endet dann aber in einem Punkte O' über dem Nullpunkt; der Prozeß ist ungeschlossen, es ist am Schlusse eine permanente Deformation vorhanden, die dann, infolge der „elastischen Nachwirkung", event. noch nachträglich allmählich verschwindet.

668. Resilienz eines gedrillten Stabes oder Schaftes. Die Resilienz eines gedrillten Stabes findet man offenbar, indem man das Endkräftepaar L mit der Hälfte des Winkels θ multipliziert, um den das eine Ende gegen das andere gedrillt worden ist. Man hat also:

$$R = \frac{1}{2} L\theta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (148)$$

Das Kräftepaar ist aber für einen geraden kreiszylindrischen Stab

$$L = \frac{1}{2} \pi n r^4 \theta / l,$$

wo r der Querschnittradius, l die Länge und n der Torsionsmodul ist; also wird

$$R = \frac{\pi}{4} n \frac{r^4}{l} \theta^2.$$

Entsprechend wird für eine gerade zylindrische Röhre

$$R = \frac{1}{2} nA \frac{k^2}{l} \theta^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (149)$$

wo A der Querschnitt und k sein Trägheitsradius ist.

Versteht man unter θ_1 den Torsionswinkel, den der Stab eben noch ertragen kann, ohne daß die äußersten Schichten ins Fließen kommen, so hat man

$$R_1 = \frac{\pi}{4} n \frac{r^4}{l} \theta_1^2;$$

anderseits ist das der Drehung des äußersten Mantels widerstehende Kräftepaar

$$L' = 2\pi n \frac{r^3 dr}{l} \theta_1,$$

und die Fläche ist $2\pi r dr$. Daher ist die Tangentialkraft pro Flächeneinheit, welche in dem Querschnitte der Scherungsdeformation Widerstand leistet, gleich $nr\theta_1/l$ oder, wie wir sagen wollen, gleich η. Damit wird aber der Wert des Kräftepaares

$$L_1 = \frac{\pi}{2} \eta r^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (150)$$

Wird nun jeder Teil des Querschnittes bis zum Grenzdruck deformiert, so geben die äußeren Schichten nach und geraten ins Fließen; das weiterer Drehung widerstehende Kräftepaar ist dann

$$L_2 = 2\pi \int_0^r \eta x^2 dx = \frac{2\pi}{3} \eta r^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

also das 4,3 fache von L_1.

669. Torsion einer Welle für Kraftübertragung. Im Falle einer Welle, die zur Kraftübertragung mittels Torsion dient, ist das Kräftepaar $L = \frac{1}{2}\pi n r^4 \theta / l$, und der Betrag an Arbeit, der in der Minute geleistet wird, ist $(\frac{1}{2}\pi n r^4 \theta / l)\, 2\pi N$ oder $\pi^2 n N r^4 \theta / l$, wo N die Tourenzahl pro Minute ist. Geht man zu Pferdestärken P über, die sich auf die Sekunde beziehen, und deren eine 75 Meterkilogrammen entspricht, so erhält man

$$\begin{aligned} \pi^2 n N \cdot \frac{r^4 \theta}{l} &= P \times 60 \times 75 \\ &= 4500\, P. \end{aligned}$$

Nun ist der größte Scherungsdruck, den man dem Material zumuten darf, er heiße S, gleich $n r \theta / l$, es wird also

$$\pi^2 N S r^3 = 4500\; P$$

oder

$$r^3 = \frac{4500}{\pi^2 S} \frac{P}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (152)$$

hieraus ergibt sich der Radius, den man der Welle zu geben hat.

Für Stahl beispielsweise kann man in runder Zahl S für das Quadratzentimeter zu 1000 kg ansetzen, also für das Quadratmeter, das man nehmen muß, da auch P sich auf Meter bezieht, zu 10000000 kg; so erhält man in Metern:

$$r = \sqrt[3]{\frac{4500}{9{,}87 \times 10^7} \cdot \frac{P}{N}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

oder in Zentimetern:

$$r = 3{,}57 \sqrt[3]{\frac{P}{N}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (154)$$

Es herrscht keine Übereinstimmung unter den Fachleuten über die Frage, welche Größe das wahre Maß sei für die Tendenz einer Substanz, den Zusammenhang ihrer Teile trotz angreifender Kräfte zu bewahren. Coulomb nahm an, daß es die größte in ihr hervorgerufene Scherung, Poncelet und später St. Venant, daß es die größte Dilatation sei; nach Tresca und G. H. Darwin ist die maximale Differenz zwischen der größten und der kleinsten Hauptspannung maßgebend, ein Maß, das eher mit dem Coulombschen verwandt ist.

Beim Druck einer Kugelfläche gegen eine ebene Fläche desselben spröden Materials ist, wie Auerbach bei seinen Versuchen zur absoluten Härtemessung nachwies, der Grenzdruck, bei dem der erste Sprung eintritt, verschieden je nach dem Radius der Linse.

Eine sehr eingehende Untersuchung dieser Frage hat neuerdings Voigt durchgeführt und gefunden, daß im allgemeinen weder die Deformationen an sich noch die Spannungen an sich entscheidend sind für das Zerreißen, sondern daß die Verhältnisse weit verwickelter sind; es kann jedoch hier darauf nicht näher eingegangen werden.

In der Praxis pflegt man den Druck u. s. w., unter welchem das Material Schaden erleiden würde, durch eine Zahl f zu dividieren, die man den „Sicherheitsfaktor" für die betreffende Art der Beanspruchung nennt, und für den man, je nach den Umständen, Werte zwischen 3 und 12 wählt. Das Nähere hierüber findet man in den praktischen Lehrbüchern der Elastizität und Festigkeit.

---

670. Stoß elastischer Kugeln. Die Lehre vom elastischen Stoß ist zu ausgedehnt, um hier ausführlich behandelt werden zu können. Übrigens ist das Problem in strenger, von der Lehre von den elastischen Schwingungen ausgehender Theorie bisher nur für Kugeln gelöst und vollständig durchgeführt worden, in einer außerordentlich interessanten Abhandlung von Hertz, in der die Geschwindigkeiten nach dem Stoße, die Stoßfläche, die Stoßdauer, kurz alle in Betracht kommenden Größen exakt abgeleitet werden. Es kann hier darauf nicht eingegangen werden; wir müssen uns mit einigen einfachen Betrachtungen begnügen.

Newton fand, daß, wenn zwei elastische Kugeln sich in der ihre Mittelpunkte verbindenden geraden Linie bewegen und dann zusammenstoßen, ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße zu denen vor dem Stoße in einer von der Natur der Körper abhängigen Beziehung stehen. Sind nämlich u_1 und u_2 die Geschwindigkeiten vor, v_1 und v_2 die nach dem Stoße, und m_1 und m_2 die Massen der Kugeln, so hat man für die Bewegungsgröße vor dem Stoße $m_1 u_1 + m_2 u_2$; und da dies nach dem dritten Bewegungsgesetze auch die Bewegungsgröße nach dem Stoße sein muß, erhält man die Gleichung

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Die Annäherungsgeschwindigkeit der Kugeln aneinander war vor dem Stoße $u_1 - u_2$, nachher ist die Trennungsgeschwindigkeit $v_2 - v_1$; setzt man nun, nach Newton, diese beiden Differenzen in ein bestimmtes Verhältnis e zueinander, so bekommt man die zweite Gleichung

$$v_2 - v_1 = e(u_1 - u_2).$$

Die Zahl e kann man den Restitutionskoeffizienten der Kugeln nennen.

In allen Fällen von Zusammenstößen zwischen zwei Körpern muß die von dem einen Körper in irgend einer Richtung eingebüßte Bewegungsgröße gleich der von dem anderen Körper in derselben Richtung gewonnenen Bewegungsgröße sein, und zwar gilt dies nicht nur für den Vergleich des Zustandes vor dem Zusammenstoße mit dem

nachher, sondern auch für jede Phase des Zusammenstoßes selbst. Nun muß es in dem hier betrachteten Falle offenbar einen Moment während des Stoßes geben, in welchem die Geschwindigkeiten der beiden Körper einander gerade gleich sind — und zwar offenbar gleich der Geschwindigkeit des Schwerpunktes der beiden Körper vorher wie nachher (denn nach dem Schwerpunktssatze ändert sich diese, wie wir wissen, nicht). Diese Geschwindigkeit sei V, dann gilt die Gleichung:

$$(m_1 + m_2) V = m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Aus diesen und den früheren Gleichungen folgt aber, wie man leicht nachweist:

$$V - v_1 = e(u_1 - V), \quad v_2 - V = e(V - u_2) \quad . \quad . \quad (155)$$

Aber $u_1 - V$ war die Geschwindigkeit der Kugel m_1 vor dem Stoße relativ zum Schwerpunkte, und $V - v_1$ ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes gegenüber der Kugel m_1 nach dem Stoße. Diese relative Geschwindigkeit wird also, wie man sieht, durch den Stoß erstens der Richtung nach umgekehrt und zweitens der Größe nach im Verhältnis von $e : 1$ geändert; und zwar gilt dies, wie die Doppelgleichung (155) lehrt, für beide Kugeln.

Da die Wirkungen der Kugeln aufeinander gleich und entgegengesetzt sind, muß die Geschwindigkeit V des Schwerpunktes der Kugeln während des Stoßes stets gleich der Geschwindigkeit der Berührungsfläche sein. War also z. B. $u_2 = 0$, so folgt aus Gl. (155): $v_2 - V = eV$. Nimmt man außerdem an, daß $e = 1$ ist, was für Kugeln aus vollkommen elastischem Material, also z. B. für Kugeln aus Elfenbein oder Stahl, nahezu erfüllt ist, so erhält man:

$$V = \frac{1}{2} v_2 = \frac{1}{2} u_1;$$

das ist die schon in § 145 (S. 146) aufgestellte Beziehung.

Im allgemeinen Falle setzt sich die kinetische Energie der beiden Kugeln vor dem Stoße zusammen aus der Energie, die sie haben würden, wenn sie sich beide mit der Geschwindigkeit ihres Schwerpunktes bewegten, und aus der Energie ihrer Bewegungen relativ zum Schwerpunkte. Die erstere ist vorher wie nachher:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2,$$

die letztere ist vor dem Stoße:

$$\frac{1}{2} m_1 (V - u_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (u_2 - V)^2,$$

nach dem Stoße:

$$e^2 \left[\frac{1}{2} m_1 (V - u_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (u_2 - V)^2\right],$$

der Verlust beträgt also:

$$\frac{1}{2}(1-e^2)\,[m_1(V-u_1)^2+m_2(u_2-V)^2].$$

Diese Energie wird ohne Zweifel hauptsächlich in Schwingungsenergie der Kugeln, also schließlich in Wärme verwandelt, der Rest zum Teil in die Energie der Luftschwingungen, entsprechend dem beim Zusammenstoße hervorgerufenen Ton; aber auch dieser Teil geht schließlich in Wärme über.

671. Zusammenstoß zweier Stäbe mit ihren Enden. Betrachten wir zwei ähnliche prismatische Stäbe, mit ebenen Enden, von demselben Stoffe und von gleicher Länge, mit ihren Axen in einer Linie, auf ihren Querschnitten ähnlich gelegen und sich in der Richtung der gemeinsamen Axe bewegend. Sie stoßen mit ihren Enden zusammmen; und während die Enden die Dauer des Zusammenstoßes über in Kontakt bleiben, läuft längs jedes der Stäbe eine Kompressionswelle von dem getroffenen nach dem freien Ende. Während jeder Zeiteinheit ändert sich die Bewegungsgröße in jedem Stabe um gleich viel, und so bleibt die Kraft zwischen ihnen während der ganzen Berührungszeit konstant. Nachdem die Kompressionswelle bis zum freien Ende gelangt ist, beginnt der Stab sich wieder auszudehnen, und eine Dilatationswelle läuft von dem freien Ende eines jeden Stabes nach dem anderen Ende zurück. Hat sie das letztere erreicht, so trennen sich die Stäbe voneinander mit derselben relativen Geschwindigkeit, mit der sie vor dem Stoße sich einander näherten, aber mit vertauschten absoluten Geschwindigkeiten.

Bezeichnen v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten vor dem Stoße, so ist die gemeinsame Geschwindigkeit ihrer Enden während des Stoßes $\frac{1}{2}(v_1+v_2)$. Aber ein Teil des ersten Stabes, der von der Welle noch nicht erreicht ist, bewegt sich noch mit der Geschwindigkeit v_1, und folglich hat sich das Stabstück, das die Welle bereits durchlaufen hat, um $v_1 t - \frac{1}{2}(v_1+v_2)t$, also um $\frac{1}{2}(v_1-v_2)t$ verkürzt. Die ursprüngliche Länge dieses Stückes war aber, wenn a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle ist, gleich at. Folglich ist das anfängliche Kompressionsverhältnis, und zwar für den einen Stab wie für den anderen, gleich $\frac{1}{2}(v_1-v_2)/a$.

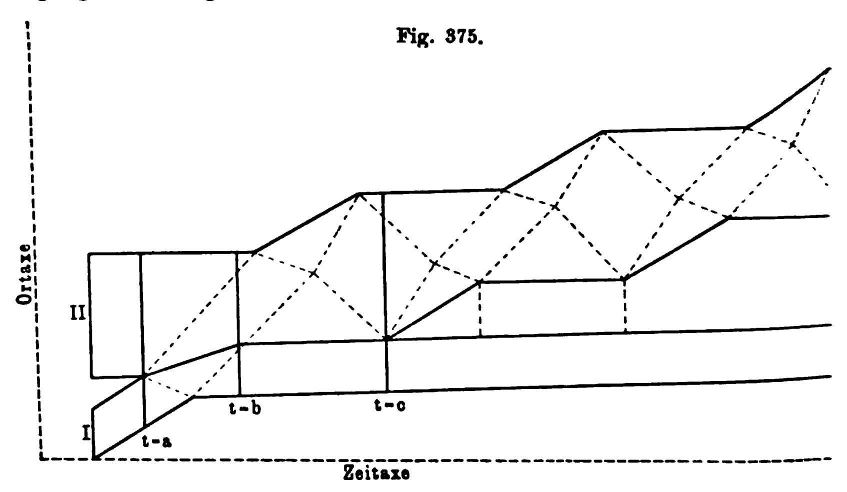
Jeder Teil eines jeden Stabes fährt fort, sich mit der Geschwindigkeit v_1 bezw. v_2 zu bewegen, bis die Welle ihn erreicht. Sobald dies geschieht, geht sie plötzlich in $\frac{1}{2}(v_1+v_2)$ über und behält diesen Wert bei, bis die zurückkehrende Dilatationswelle ihn erreicht, und springt in diesem Augenblicke auf v_2 für den ersten, auf v_1 für den zweiten Stab.

Es sei bemerkt, daß das Zurückprallen eines Stabes nach dem Stoße auf eine unnachgiebige Wand genau so stattfindet, als ob er in

der hier beschriebenen Weise mit einem gleichen, sich mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung bewegenden Stabe zusammengestoßen wäre.

Ganz anders — und besonders interessant — gestaltet sich die Sache, wenn die Stäbe, ohne daß sonst etwas geändert würde, verschieden lang genommen werden. Die gemeinsame Geschwindigkeit der zugekehrten Enden wird auch hier im Moment des Stoßes $\frac{1}{2}(v_1 + v_2)$. Auch hier wird eine Kompressionswelle im Betrage $\frac{1}{2}(v_1 - v_2)/a$ die beiden Stäbe entlang laufen und von den freien Enden als Dilatationswelle reflektiert werden. Auch hier wird der erste kürzere Stab wie dort mit der Geschwindigkeit v_2 von dem anderen abprallen, gerade als ob er mit einem Stabe von der eigenen Länge zusammengestoßen wäre. Der längere Stab aber wird in einem Zustande longitudinaler Schwingungen zurückgelassen. Dieser Zustand rührt her zunächst von der

Fig. 375.



durch den Stoß erzeugten, ihn durchlaufenden Kompressionswelle, und über diese lagert sich alsdann, nachdem der kürzere Stab abgeprallt ist, eine zweite, ähnliche Schwingung infolge des plötzlichen Aufhörens des Druckes auf das gestoßene Ende.

In sehr schöner Weise wird dieser Vorgang durch die von de Saint-Vénant gegebene graphische Darstellung (Fig. 375) veranschaulicht. Die Vertikalaxe ist die Axe der Stäbe, die Horizontalaxe ist die Zeit. I, II sind die Stäbe vor dem Stoße, $t = a$ ist der Moment des beginnenden Stoßes; im Moment $t = b$ ist der kurze Stab bereits wieder spannungslos, hat er wieder seine natürliche Länge angenommen; er bleibt aber noch weiter in Kontakt mit dem längeren, da dieser sich gerade im Stadium der Dilatation befindet, und erst zur Zeit $t = c$ findet die wirkliche Trennung der Stäbe statt. Der kurze Stab geht dann als starrer Körper weiter, der lange hingegen pulsiert weiter,

während er sich als Ganzes nach oben bewegt; seine Bewegung ist der eines Wurmes vergleichbar, der sich erst reckt, dann die hinteren Glieder nachschiebt u. s. w. Zugleich erkennt man aus der Zeichnung in den gestrichelten Linien den Verlauf der Wellen.

672. Kristalle. Kontroversen betreffend die Elastizitätskonstanten. Wir haben in diesem Kapitel lediglich die Elastizitätsverhältnisse isotroper Körper behandelt. Für Kristalle gestalten sich die Dinge natürlich weitaus verwickelter, und der uns zu Gebote stehende Raum erlaubt nicht, auf diesen Gegenstand, trotz seiner großen allgemein physikalischen Wichtigkeit, näher einzugehen. Nur wenige Worte mögen hier Platz finden. Zunächst kann jede der sechs Druckkomponenten als homogene lineare Funktion von jeder der sechs Dilatationskomponenten betrachtet werden, so daß sich im ganzen 36 „Elastizitätskonstanten" ergeben würden [nämlich (11) . . . (16), (21) ... (26), u. s. w.]. Da aber, wie Franz Neumann, Lord Kelvin und Kirchhoff gezeigt haben, ein elastisches Potential existiert, d. h. da die sechs Drucke die partiellen Differentialquotienten einer und derselben homogenen quadratischen Funktion der sechs Dilatationen sind, werden die Koeffizienten (12) und (21) u. s. w. notwendig gleich, es werden überhaupt 30 von ihnen paarweise gleich, nur die sechs von der Form (11) u. s. w. bleiben einzeln; im ganzen reduziert sich somit die Zahl der Elastizitätskonstanten auf 21. Weitere Reduktion tritt ein, wenn besondere Symmetrieverhältnisse vorhanden sind, also bei allen Krystallsystemen außer dem triklinen; bei dem regulären System sind nur noch drei Konstanten vorhanden, also nur eine mehr als bei isotropen Körpern.

Weitere Reduktion der Zahl der Konstanten erhält man, wenn man bestimmte molekulare Vorstellungen betreffend die Teilchen der Körper und ihre Wechselwirkung zu Grunde legt und insbesondere annimmt, daß diese Wirkung von der Richtung unabhängig sei. Für isotrope Körper führt diese Annahme ebenfalls eine Reduktion der Konstantenzahl, von 2 auf 1, herbei, indem sich zeigt, daß dann Volumen- und Gestaltelastizität oder, wie man es auch ausdrücken kann, Querkontraktion und Längsdilatation in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen müssen, und zwar letztere im Verhältnis 1 : 4, d. h. es müßte die Elastizitätszahl n für alle isotropen Stoffe gleich 1/4 sein. Diese Schlußfolgerung hat sich nicht bewahrheitet; und wenn gegen die älteren betreffenden Versuche eingewendet wurde, daß dann eben jene Substanzen nicht homogen waren, so läßt sich dieser Einwand hinsichtlich der neueren Versuche, zumal mit Jenaer Gläsern, nicht mehr aufrecht erhalten; denn diese Gläser können von der idealen Isotropie höchstens ganz unbedeutend abweichen, und sie liefern doch, wie Straubel gezeigt hat, ganz beträchtlich verschiedene Werte von μ. Aber noch mehr: auch die für Kristalle aus jener Vorstellung sich er-

gebenden Beziehungen zwischen den Konstanten sind, wie Voigt in einer großen Reihe von Arbeiten gezeigt hat, oft nicht annähernd erfüllt. Man muß also, wenn man die Molekulartheorie aufrecht erhalten will, die Annahme der Unabhängigkeit der Wirkung von der Richtung fallen lassen, d. h. den Molekeln zahlreicher Substanzen Polarität zuschreiben.

Zum Schlusse sei noch eine kleine Tafel von Zahlenwerten der Elastizitätskonstanten für einige praktisch wichtige Stoffe beigefügt; sie gründet sich hauptsächlich auf Bestimmungen, die in den letzten Jahren in Großbritannien durchgeführt worden sind.

Anhang zum 15. Kapitel.

Tafel von Elastizitätskonstanten.

Moduln in 10^6 g pro Quadratzentimeter.

Substanz	E	Autor	Gestaltmodul n	Autor	Volumenmodul k	Modul einfacher Dehnung $k + \frac{4}{3}n$	Elastizitätszahl μ	Dichte
Aluminium (5 Proz. Kupfer)	703	Glasg. Univ. Phys. Lab. Record.	265	Glasg. Univ. Phys. Lab. Record.	675	1028	0,326	2,86
Messing	1001	Rankine	373	Everett	1054	1551	0,342	8,47
Kupfer	1254	Wertheim	456	"	1672	2280	0,375	8,9
Neusilber	1380	T. Gray	496	T. Gray	2113	2774	0,391	8,8
Glas (flint)	614	Everett	243	Everett	432	756	0,263	2,94
Eisen (gegossen)	1374	"	542	"	985	1708	0,267	7,24
" (geschmiedet)	2040	Rankine	785	"	1694	2741	0,300	7,68
Stahldraht (Piano)	2182	Everett	834	"	1895	3007	0,308	7,73
Platinoid	1222	Bottomley	476	Bottomley	941	1576	0,294	8,78
Platin	1704	Wertheim	622	McFarlane	2181	3010	0,369	20,81
Quarzfaden	600	Boys	238	Boys	417	734	0,26	—
Silber	736	Wertheim	270	McFarlane	895	1255	0,363	10,21
Zink	873	"	360	"	506	986	0,212	7,11
Tonschiefer	329	T. Gray und Milne	177	T. Gray und Milne	96	332	—	2,68
Schiefer	686	"	—	—	—	—	—	2,74
Quecksilber	—	—	—	—	552,5	—	—	13,596
Wasser	—	—	—	—	22,63	—	—	1,0

(Entnommen aus Macleans Exercises in Natural Philosophy. London, Longmans & Co., 1900.)

Sechzehntes Kapitel.

Kapillarität.

673. Ursache der Kapillaritätserscheinungen. Im vierten Kapitel sind einige Rechnungen über die Wirkungen der Oberflächenspannung einer Flüssigkeit mitgeteilt worden; hier sollen die physikalische Ursache der Oberflächenspannung, die Erscheinungen, die aus ihr hervorgehen, und einige Methoden, durch die sie gemessen werden kann, kurz betrachtet werden.

Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß es Wechselkräfte gibt zwischen den Molekeln der Substanzen, d. h. zwischen denjenigen ihrer Teilchen, welche Urbestandteile sind in dem Sinne, daß sie nicht mehr geteilt werden können, ohne daß sich die physikalischen Eigenschaften der Substanz ändern. Es scheint nicht gänzlich ausgeschlossen, daß diese Kräfte nichts anderes seien als die Gravitationsanziehungen zwischen den Teilchen; Anziehungen, die bei kleinen Abständen stark genug werden können, um sich bemerklich zu machen infolge der Heterogenität der in einer mit den Dimensionen der molekularen Struktur vergleichbaren Nähe befindlichen Nachbarsubstanz. — Oder es kann auch, wie viele glauben, besondere Kräfte der Kohäsion u. s. w. geben, Kräfte, die sich von der Gravitation deutlich unterscheiden, und die ins Spiel gerufen werden, wenn die Molekeln einer und derselben oder verschiedener Substanzen einander genügend nahe gebracht werden. Sicher ist indessen, daß, wenn es möglich sein wird, sämtliche Umstände der Wirkungen der Molekeln aufeinander zu berücksichtigen und die Wirkungen ihrer relativen Bewegungen in Rechnung zu ziehen, eine erhebliche Verminderung der Anzahl der zwischen ihnen wirksamen Spezialkräfte sich ergeben wird; und daß daraus eine Einheit dynamischer Wirkungen hervorgehen wird, die zu denjenigen, welche wir zwischen gewöhnlichen Teilen der Materie in endlichem Abstande voneinander wirksam finden, in stetigem Übergange hinleiten wird.

Bis jetzt ist noch keine endgültige Aufstellung des Wirkungsgesetzes molekularer Kräfte möglich. Von der Natur der Molekel wissen wir so gut wie nichts; und wenn wir den sonst gültigen Satz

aufstellen, daß die zwischen zwei Molekeln wirksame Kraft längs der Verbindungslinie der Molekeln wirkt und von dem Abstande zwischen ihnen abhängt, so setzen wir entweder voraus, daß die Molekeln bloße Kraftzentren sind, oder daß sie Teilchen von kugelförmig angeordneter Materie sind, deren jedes so wirkt, als ob seine ganze Masse in seinem Mittelpunkte vereinigt wäre. Die Wahrscheinlichkeit spricht dafür, daß die Wirkung sehr annähernd dieselbe ist wie die von Kraftzentren. Aber gerade wie die Planeten einander nur annähernd so anziehen, als ob ihre Massen in ihren Mittelpunkten vereinigt wären, und wie es Erscheinungen gibt, z. B. Präzession und Nutation, die aus dem Umstande entstehen, daß die Mittelpunkte der planetaren Massen nicht genau Mittelpunkte der ganzen von ihnen ausgeübten äußeren Anziehungen sind, und gerade wie die Wirkungen dieser Anziehungen für einen Zuschauer von außen durch die Bewegungen der Planeten bedeutend modifiziert werden, so gibt es zweifellos auch Erscheinungen, die auf den Umstand zurückzuführen sind, daß die Molekeln nicht reine Kraftzentren sind, und vor allen Dingen darauf, daß sie sich in relativer Bewegung befinden.

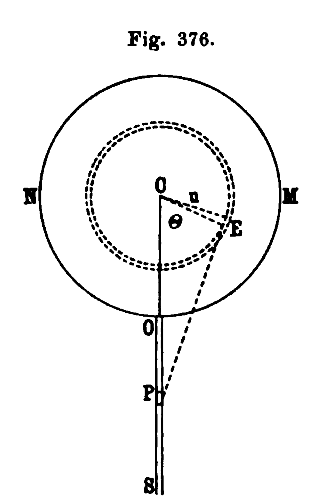
674. Nicht wahrnehmbare Kräfte in wahrnehmbaren Abständen. Eine sehr vollständige theoretische Darstellung der Kapillaritätserscheinungen kann auf der Annahme aufgebaut werden, daß die Glieder eines jeden Paares von Molekeln aufeinander wirken wie ein Paar von Kraftzentren, mit Kräften, die nur auf solche Entfernungen wahrnehmbar sind, welche mit den Dimensionen einer Molekel vergleichbar sind. Der Ausdruck „Dimensionen einer Molekel" muß aber näher präzisiert werden. In jedem Körper ist höchstwahrscheinlich nur ein kleiner Teil des ganzen von ihm eingenommenen Raumes wirklich mit Materie erfüllt; es gibt immer Zwischenräume, und zwar genügend große, um eine beträchtliche Bewegung der Teilchen gegeneinander zu erlauben. Die Erscheinungen der Diffusion der Flüssigkeiten ineinander beweisen, daß ihre Teilchen eine bedeutende relative Bewegung haben, und die Roberts-Austenschen Experimente neuesten Datums über die Diffusion von Gold durch Blei bei gewöhnlichen Temperaturen zeigen, daß selbst in einem festen Körper die Molekeln nicht in Ruhe sind. Somit sind die Dimensionen einer Molekel als die Dimensionen des mittleren Volumens des von einer Molekel eingenommenen Raumes zu verstehen, d. h. des Raumes, den man durch Teilung des Körpervolumens durch die Anzahl der in ihm enthaltenen Molekeln erhält. Über die Schätzungsmethoden der Anzahl von Molekeln in einem Körper wird im zweiten Bande einiges mitgeteilt werden.

Die durch die Molekel ausgeübte Anziehungskraft nach außen ist über einen sehr kleinen Abstand hinaus nicht wahrnehmbar, d. h. über einen sehr kleinen Abstand von dem Kraftzentrum hinaus, das man sich durch die Molekel dargestellt denken kann. Eine Kugel von dem

Radius dieses Abstandes kann die Wirkungssphäre der Molekel genannt werden. Dann wird offenbar, wenn eine regelmäßige Anordnung der Molekeln in einer Flüssigkeit statthat und eine sehr große Anzahl von ihnen sich in einem endlichen Teile des von der Flüssigkeit eingenommenen Raumes befindet, eine Molekel, die von allen Teilen der Flüssigkeitsgrenze weiter entfernt ist als der Radius der Wirkungssphäre, unter der Wirkung der sie umgebenden Molekeln stehen, so daß sie nach keiner Richtung eine Tendenz erfährt. Wenn sie sich dagegen in geringerem Abstande als dem Radius der Wirkungssphäre von der Flüssigkeitsgrenze befindet, so wird die Wirkung der Molekeln von der Flüssigkeitsseite her die der Molekeln von der anderen Seite überwiegen, und es werden Kräfte ins Spiel treten, die sich im Innern der Flüssigkeit nicht offenbaren.

675. Laplacesche Kapillaritätstheorie. Auf diese Idee von nicht wahrnehmbaren Kräften in wahrnehmbaren Abständen begründete Laplace seine Kapillaritätstheorie. Das hier Folgende ist eine Skizzierung mit einigen kleinen Abänderungen seiner Forschungsmethode. Er betrachtete zunächst die Anziehung einer Kugel von gleichförmiger Dichte auf einen langen, geraden, gleichförmigen Faden von derselben Dichte, der normal auf die Kugeloberfläche auftrifft. Es sei OMN in Fig. 376 die Kugel, OS der Faden, der als vom Querschnitt eins angenommen sei. ϱ sei die der Kugel und dem Stabe gemeinsame Dichte; es soll die Anziehung einer Schale vom Radius u und der Dicke du auf ein Stabelement dr in P betrachtet werden, das um r von C, dem Kugelmittelpunkte, entfernt ist. Es handle sich vorerst um die von einer Kugelzone auf das Element dr ausgeübte Anziehung; und zwar von einer Zone, die durch Umdrehung eines Elementes von der Breite $ud\theta$ im Punkte E um OS als Axe entstehen soll. Die Masse dieses Kugelstreifens ist $2\pi\varrho u^2 \sin\theta\, d\theta\, du$, und, wenn eine Masse m in E eine Anziehung $m\varphi(f)$ längs der Linie PE $(= f)$ auf die Masse eins in P ausübt, so ist die von der Kugelzone längs PC auf das Element dr ausgeübte Anziehung

Fig. 376.



$$2\pi\varrho^2 u^2 \sin\theta\, d\theta\, du\, dr\, \varphi(f)\, \frac{r - u\cos\theta}{f},$$

da

$$(r - u\cos\theta)/f = \cos CPE$$

ist. Nun ist aber $f^2 = r^2 + u^2 - 2ru\cos\theta$, so daß

$$\frac{r - u\cos\theta}{f} = \frac{df}{dr}$$

ist. Die von der Kugelzone auf das Element dr ausgeübte Anziehung ist demnach

$$2\pi\varrho^2 u^2 \sin\theta\, d\theta\, du\, dr\, \varphi(f)\, \frac{df}{dr}.$$

Es sei nun

$$\varphi(f)\, \frac{df}{dr} = -\frac{d}{dr}\,[\Pi(f)],$$

dann ist die von dem Kugelstreifen auf das Element dr ausgeübte Anziehung:

$$-2\pi\varrho^2 u^2 \sin\theta\, d\theta\, du\, dr\, \frac{d[\Pi(f)]}{dr}.$$

Wird dieser Ausdruck mit Rücksicht auf r zwischen den Grenzen b und ∞ integriert unter der Annahme, daß $\Pi(f)$ eine Größe ist, die mit größter Geschwindigkeit abnimmt, wenn f zunimmt, so findet sich als die Anziehung der Kugelzone auf den Faden:

$$2\pi\varrho^2 u^2 \sin\theta\, d\theta\, du\, \Pi(f)_{r=b},$$

wo b der Abstand CO ist.

Nun möge θ sich ändern, während r konstant und gleich b bleibt; dann verwandelt sich, da $\sin\theta\, d\theta = f df / bu$ ist, der vorige Ausdruck in:

$$2\pi\varrho^2\, \frac{u}{b}\, du\, \Pi(f) f df.$$

Dieser Ausdruck, integriert zwischen Grenzen von f, der Änderung von θ zwischen O und π entsprechend, ergibt:

$$-2\pi\varrho^2\, \frac{u}{b}\, du\, [\psi(b + u) - \psi(b - u)],$$

wo ψ eine Funktion von solcher Art ist, daß $\Pi(f) f df = -\psi'(f)$ ist. Der Abstand f ändert sich augenscheinlich von $b - u$ bis $b + u$.

Wenn, wie hier angenommen wird, der Abstand $b + u$ größer ist als derjenige, in welchem ein Materieteilchen eine merkliche Anziehung auf den Faden ausüben kann, so wird $\psi(b + u) = 0$ werden, und die gesamte von der Schale ausgeübte Anziehung ist alsdann

$$2\pi\varrho^2\, \frac{u}{b}\, du\, .\, \psi(b - u).$$

Es möge nun $b - u$ mit z bezeichnet werden, so daß $-u du = (b - z) dz$ ist; dann wird, wenn jetzt noch über z integriert wird, die ganze von der Kugel auf den Faden ausgeübte Anziehung

$$\left.\begin{aligned} -2\pi\varrho^2\int\limits_b^0 \frac{b-z}{b}\,\psi(z)dz &= 2\pi\varrho^2\int\limits_0^b \psi(z)dz \\ -2\pi\varrho^2\cdot\frac{1}{b}\int\limits_0^b \psi(z)z\,dz &= K-\frac{H}{b} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (1)$$

wenn die Zeichen K und H für die beiden Integrale gesetzt werden. Dies ist der berühmte Laplacesche Ausdruck für die Wirkung einer Flüssigkeitskugel auf einen normal auf sie auftreffenden Faden. Laplace setzte $\varrho = 1$, und die hier gegebenen Ausdrücke weichen von den seinigen dadurch ab, daß sie ϱ^2 als Faktor haben.

676. Normaldruck in einer Flüssigkeit. Die von einer Flüssigkeitskugel von endlichem Radius b auf einen außer ihr befindlichen, gleichförmigen und unendlich dünnen, normal zu ihrer Oberfläche bis in die Unendlichkeit verlaufenden Flüssigkeitsfaden ausgeübte Anziehung ist demnach

$$K - \frac{H}{b}$$

pro Querschnitteinheit des Fadens, so daß dieses der von der Basis des Fadens auf die Kugel wirksame und durch die Gegenwirkung der Kugel aufgehobene Druck sein muß. Die Größen K und H sind vom Kugelradius unabhängig; und da die Molekularkräfte, von welchen diese Größen abhängen, als in endlichen Abständen unwirksam angenommen werden, so ist es klar, daß $K - H/b$ die Anziehung ist, die von einer durch einen Teil einer Kugeloberfläche vom Radius b, zu der der Faden normal ist, begrenzten, im übrigen aber unbegrenzten Flüssigkeitsmasse auf den Faden pro Flächeneinheit ausgeübt wird. Es ist also nur notwendig, daß jeder Teil der Begrenzung der Flüssigkeitsmasse (außer der gekrümmten Oberfläche) in einem endlichen oder wahrnehmbaren Abstande von der Grundfläche des Fadens sich befinde, und daß der Faden selbst von endlicher Länge sei, um festzustellen, daß der Druck an seiner Grundfläche $K - H/b$ sein muß.

Die Größe H ist klein im Vergleich mit K. Denn es ist:

$$K = 2\pi\varrho^2 \int \psi(z)\,dz,$$

wo z der Abstand der Grundfläche des Fadens von der Oberfläche einer mit der Kugel vom Radius b konzentrischen und in ihr befindlichen Schale, $\psi(z)$ eine (unbekannte) Funktion von z und das Integral zwischen den Grenzen null und b genommen ist; anderseits ist

$$H = 2\pi\varrho^2 \int\limits_0^b \frac{z}{b}\,\psi(z)\,dz.$$

Die einzigen Werte von $\psi(z)\,dz$, die eine merkliche Wirkung beim Aufbau eines der Integrale haben, sind diejenigen, für welche z sehr klein ist im Vergleich mit b, wegen der Annahme, daß die Kräfte in endlichen Abständen nicht wahrnehmbar seien. Daher muß, wie behauptet wurde, H im Vergleich mit K klein sein.

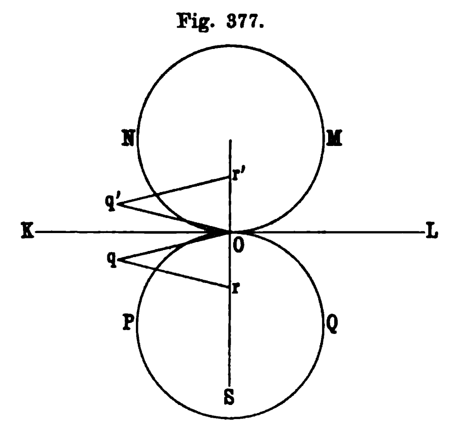


Fig. 377.

Man wird bemerken, daß, wenn b unendlich wird, H/b null wird, und daß daher das Integral K der Druck ist, der in der Grundfläche des Fadens erzeugt werden würde, wenn er gegen die ebene Begrenzung einer im übrigen unendlichen Flüssigkeitsmasse mündete, wie OS in Fig. 377 gegen die Ebene KL. Dann ist offenbar, wenn OMN die anziehende Kugel und OS den bei O die Kugel berührenden Faden darstellt, H/b der Betrag, der infolge des fehlenden Meniskus $MLOKN$ abgezogen werden muß; d. h. H/b ist der Druck, der durch den Meniskus, wenn er allein wirkte, erzeugt werden würde. K kann als Normaldruck auf die Flüssigkeit bezeichnet werden.

677. Normaldruck und Krümmungsdruck. Da es keine Anziehung auf einen Faden von endlicher Länge im Innern einer unendlichen Flüssigkeitsmasse gibt, so muß die nach oben auf den Faden OS von der Kugel OMN ausgeübte Anziehung der Anziehung in der entgegengesetzten Richtung, herrührend von derjenigen Masse unter der Kugel, welche notwendig wäre, um die anziehende Masse unendlich in allen Richtungen zu machen, gleich und entgegengesetzt sein. Diese letztere Anziehung muß aber der von der Kugel OPQ auf den Faden ausgeübten samt der von dem doppelten Meniskus $MLQONKP$ herrührenden Anziehung gleich sein. Die Anziehung des einen Meniskus $MLONK$ ist nach dem oben gefundenen Ergebnisse vom Betrage H/b und nach oben gerichtet. Folglich ist die nach unten gerichtete Anziehung der ganzen Flüssigkeit unterhalb der Fläche LOK auf den ebenfalls unterhalb der Fläche befindlichen und in ihr aufhörenden unendlichen Faden

$$K - \frac{H}{b} + \frac{H}{b}$$

oder K. Somit ist die Anziehung der gesamten unterhalb der Fläche LOK auf einen ebenfalls unterhalb der Fläche befindlichen und in ihr aufhörenden unendlichen Faden gleich der von einer unendlichen Masse

unterhalb der Fläche in derselben Richtung auf einen über der Fläche befindlichen und in ihr aufhörenden Faden ausgeübten Anziehung K.

Ferner ist die Anziehung des Meniskus $PKOLQ$ auf den Faden unterhalb der Fläche dieselbe wie die Anziehung des Meniskus $MLONK$ auf dieselbe Masse. Denn, betrachten wir irgend ein Element des Meniskus $PKOLQ$ in q, Fig. 377, und ein entsprechendes und gleiches Element von $MLOQN$ in q' einem Punkte auf der durch q zu LOK gezogenen Normale, der von der Fläche LOK ebenso weit wie q entfernt ist; zeichnet man alsdann die gleichschenkeligen Dreiecke Oqr, $Oq'r'$ (Fig. 377), so sieht man, daß das Element in q keine Wirkung längs dem Faden auf den Teil Or ausübt, ebensowenig wie q' auf Or'. Folglich ist die Wirkung von q' nach oben auf den in O abschließenden Faden dieselbe wie die von q auf den unterhalb r befindlichen Teil des Fadens. Somit ist die gesamte Wirkung des Meniskus $PKOLQ$ auf den Faden OS aufwärts gerichtet und vom selben Betrage wie die von $MLONK$ auf den Faden OS ausgeübte Anziehung. Wenn also S die nach unten ausgeübte Anziehung der Kugel POQ auf OS ist, so ist $S - H/b = K$, d. h.

$$S = K + \frac{H}{b} \cdot \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Also ist die von einer unendlichen, von einer konvexen sphärischen Oberfläche vom Radius b begrenzten Masse auf einen Massefaden von unbegrenzter Länge, der seine Basis in O hat, ausgeübte Anziehung gleich $K + H/b$ pro Flächeneinheit des Querschnittes, und diese Größe ist der Druck in O. Wenn anderseits die Oberfläche konkav ist, so ist der Druck $K - H/b$. Hieraus schloß Laplace, daß der von einem Teil einer Kugeloberfläche zwischen zwei sich in O im Radius schneidenden und um einen kleinen Winkel $d\theta$ gegeneinander geneigten Ebenen herrührende Teil dieser Anziehung

$$\left(K - \frac{H}{b}\right) d\theta$$

ist.

Laplace nimmt die Dichte der Flüssigkeit als eins an; unter der Annahme, daß die Dichte ϱ ist, müssen die Werte von K und H, wenn diese Größen die ihnen oben zugeschriebenen Bedeutungen haben, mit ϱ^2 multipliziert werden, da sowohl die Flüssigkeit als der Faden die Dichte ϱ haben. Es soll indessen vorausgesetzt werden, daß dies bei der Berechnung von H und K in Betracht gezogen worden ist, d. h. daß

$$K = 2\pi \int \varrho^2 \psi(z)\, dz$$

ist, und ebenso für H.

678. Sekundäres Prinzip der kontraktilen Haut. Der Leser wird bemerkt haben, daß H/b, der von der Oberflächenkrümmung herrührende Druck, als durch eine kontraktile Oberflächenschicht von

der Spannung $T = H/2$ herrührend betrachtet werden kann, wo T wie oben in § 204 definiert wird. Diese Idee einer kontraktilen „Haut" stammt von Thomas Young, der eine Theorie der Kapillaritätserscheinungen gab, worin er dieses sekundäre Prinzip benutzte, ehe Laplace die Frage aufnahm; und er strebte überdies an, die Wirkung mit Hilfe molekularer Kräfte zu erklären.

679. Physikalische Bedeutung von K. Die physikalische Bedeutung von K ist zwar oben erklärt worden, doch kann ihre etwas eingehendere Darlegung von Nutzen sein. Es ist dies der Zug pro Flächeneinheit des Querschnittes, der auf eine unendlich dünne Säule OS ausgeübt wird infolge der Anziehung einer unendlichen Masse, in die OS eingebettet ist, und die durch eine zu OS senkrechte, ebene Oberfläche begrenzt wird. Er muß daher in einem beliebigen Punkte S durch einen der Säule erteilten Druck K ausgeglichen werden. Der Vorgang ist derselbe, wie der zwischen zwei durch gegenseitige Anziehung zusammengehaltenen Teilen eines festen Körpers. Die eine Halbkugel der Erde wird durch die beiden gemeinsame Kontaktfläche an die andere angepreßt. Die entgegengesetzten Drucke, die je von der jenseits befindlichen Materie auf die entgegengesetzten Seiten einer Mittelschicht ausgeübt werden, werden natürlich durch elastische Reaktion ausgeglichen. Der Druck würde durch die Kraft pro Flächeneinheit gemessen werden, die aufgewandt werden müßte, um die Halbkugeln zu trennen. Daß Flüssigkeiten, wenn sie von Luft befreit worden sind, große Spannungen aushalten können, ist eine durch Experimente festgestellte Tatsache.

Weder ein in die Flüssigkeit eingetauchter fester Körper noch eine zwei Teile der Flüssigkeit trennende materielle Schicht erfährt den Druck K. Denn durch die Einschiebung eines festen Körpers entstehen weitere Oberflächen, deren jede Ursache eines Druckes K in die Flüssigkeit hinein auf jede in der Oberfläche endende Säule von der Fläche eins ist. Alles, was ein in die Flüssigkeit eingetauchtes System verursachen kann, hängt ab von dem der Oberfläche von außen erteilten Druck, von dem Druck, den die Flüssigkeit infolge der Gravitation erfährt und von den Wirkungen der Krümmung der Oberfläche und der Flüssigkeitsbewegung. Freilich, bei sehr innigem Kontakt kann ein Körper die Molekularwirkung von Seiten des benachbarten Fluidums oder festen Körpers erfahren (Beispiel: Adhäsion zwischen frischen Metallflächen).

Bildet sich jedoch innerhalb der Flüssigkeit eine kleine Hohlkugel vom Radius r, so wird der Druck in dieser $K - H/r$. Daß H/r unendlich groß werde, wird durch die Unstetigkeit der Substanz verhindert, wenn r so klein ist, daß es mit molekularen Dimensionen verglichen werden kann, so daß der Grenzdruck K ist. Dieser Punkt kann hier nicht völlig eingehend erörtert werden; es ist aber sehr wichtig, zu

beachten, daß, da das Gesetz sich ändert, wenn r von der Größenordnung der Kohäsionskräfte der Flüssigkeit ist, diese letztere von der Größenordnung von K/T ist. Also ist K der Druck im Inneren einer Hohlkugel von sehr kleinem Radius in der Flüssigkeit.

680. Youngsche Schätzung der Molekulardimensionen. Young nahm an, daß die von einer Molekel ausgeübte Anziehungskraft in dem ganzen Bereiche, in dem sie überhaupt wirksam ist, konstant und jenseits desselben gleich null wäre. Auf Grund dieser Theorie gelangte er zu einer Schätzung a des Bereiches als durch die Gleichung

$$T = \frac{1}{3} a K$$

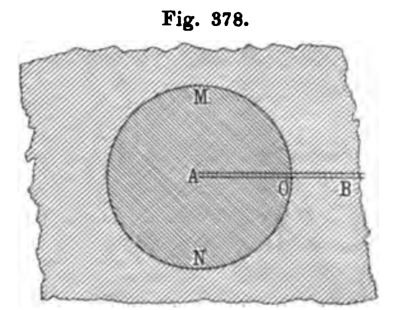
gegeben. Indem er K als 23000 Atmosphären und T als 3 Gran pro Zoll (0,078 g pro Zentimeter) setzte, fand er, daß „der Bereich der Kohäsionskraft auf ungefähr ein 250 milliontel eines Zolles (oder rund den 100 millionten Teil eines Zentimeters) beschränkt sein muß", und bemerkt folgendes zu diesem Ergebnis: „Innerhalb gleicher Ungewißheitsgrenzen können wir zu einer Art mutmaßlicher Schätzung der gegenseitigen Entfernungen der Teilchen von Dämpfen voneinander gelangen, und sogar zu einer Schätzung der tatsächlichen Größe der elementaren Atome von Flüssigkeiten, die nach der Annahme in naher Berührung miteinander sind; denn, wenn der Abstand, in dem die Kohäsionskraft zu wirken beginnt, bei derselben Temperatur konstant ist, und wenn die Dampfteilchen sich verdichten, wenn sie sich einander bis auf diesen Abstand nähern, so folgt, daß bei 60° F. (15° C.) der Abstand der Teilchen des reinen Wasserdampfes ungefähr 250 milliontel Zoll (ein 100 milliontel eines Zentimeters) beträgt; da nun ferner die Dichte dieses Dampfes ungefähr 1/60000 von der des Wassers ist, so muß der Abstand der Teilchen ungefähr 40 mal so groß sein, d. h., es muß der gegenseitige Abstand der Teilchen ungefähr den 10000 millionten Teil eines Zolles (den 4000 millionten eines Zentimeters) betragen." Nach einigen Bemerkungen über die Wirkung der Temperatur fährt er fort: „Im ganzen scheint der Schluß ziemlich sicher, daß ... der Diameter oder Abstand der Teilchen des Wassers zwischen dem 2 tausendtel und dem 10 tausendtel eines milliontel Zolles (einem 800 tel und einem 4 tausendtel eines milliontel Zentimeters) liegt." (Youngs Works I, 461.)

Es ist ferner zu beachten, daß, wenn ϱ die Dichte der Flüssigkeit und $F\varrho$ die Anziehung der unendlichen Masse über LOK (Fig. 377) pro Längeneinheit auf ein Element dx des Fadens OS ist, der als vom Querschnitt eins angenommen wird, die ganze Kraft $\int F\varrho\, dx$ ist, wobei das Integral längs der Länge OS genommen ist. Dies ist aber die ganze Arbeit, die geleistet werden müßte, um eine Menge Materie ϱ von der Basis O des Fadens in einem unendlichen Abstande von LOK fortzuschaffen. So kann man zu einer Schätzung von K gelangen, in-

dem man die bei der Verwandlung der Flüssigkeit in Dampf geleistete Arbeit mißt. Auf diese Weise hat man K zu ungefähr 25000 Atmosphären für Wasser gefunden.

681. Fall zweier sich berührender Flüssigkeiten. Lord Rayleigh hat die Laplaceschen Ergebnisse auf den Fall zweier sich berührenden Flüssigkeiten übertragen. Es sei in Fig. 378 OMN eine Kugel von der Dichte ϱ_2, und sie sei auf allen Seiten von einer unendlichen Flüssigkeit von der Dichte ϱ_1 umgeben. Es seien AO, OB zwei Säulen, die theoretisch unendlich lang sind, aber in der Wirklichkeit sich von der Oberfläche aus nach den beiden Seiten nur bis zu einer Entfernung erstrecken, die groß ist im Vergleich mit der Größenordnung der Molekularkräfte; diese Säulen treffen im Oberflächenpunkte O zusammen. Wenn jede Flüssigkeit so auf die andere wirkt, wie sie auf sich selbst wirken würde — abgesehen vom Unterschied der Dichte —, so kann angenommen werden, daß hier einfach der Fall einer ununterbrochenen unendlichen Flüssigkeitsmasse von der Dichte ϱ_1, mit einer superponierten Kugel OMN von der Dichte $\varrho_2 - \varrho_1$ vorliegt. Der Druck wird dem Faden AO entlang von A nach O abfallen, und der Betrag des Abfalles längs einem Element ds wird die Anziehung der Kugel von der Dichte $\varrho_2 - \varrho_1$ auf die Substanz des Elementes sein. Somit ist der gesamte Abfall des Druckes von A bis O

Fig. 378.



$$\varrho_2(\varrho_2 - \varrho_1)\left(K + \frac{H}{b}\right),$$

wo b der Radius der Kugel OMN ist und K und H die durch das Laplacesche Verfahren für eine Flüssigkeit von der Dichte eins gewonnenen Konstanten sind. Ebenso ist der Abfall des Druckes von O nach B

$$\varrho_1(\varrho_2 - \varrho_1)\left(K - \frac{H}{b}\right).$$

Der Druck in A übertrifft also den in B um die Summe dieser beiden Ausdrücke, d. h. um

$$(\varrho_2^2 - \varrho_1^2)K + (\varrho_2 - \varrho_1)^2 \frac{H}{b} = K' + \frac{H'}{b}.$$

Es gibt also einen Überdruck K', der von der Krümmung unabhängig und mit $\varrho_2^2 - \varrho_1^2$ proportional ist, und einen weiteren H'/b, der mit der Krümmung und mit $(\varrho_2 - \varrho_1)^2$ proportional ist.

Sind drei verschiedene Medien vorhanden, und sind H'_{12}, H'_{23}, H'_{31} die Werte von H' für das erste Medium in Berührung mit dem zweiten, das zweite in Berührung mit dem dritten und das dritte in Berührung mit dem ersten, dann ist, da diese mit $(\varrho_2 - \varrho_1)^2$, $(\varrho_3 - \varrho_2)^2$, $(\varrho_1 - \varrho_3)^2$ proportional sind:

$$\sqrt{H_{13}} = \sqrt{H_{12}} + \sqrt{H_{23}}.$$

Diese Beziehung wird durch das Experiment nicht bestätigt, und es muß deshalb die oben gemachte Annahme über die Wirkung einer Flüssigkeit auf die andere ungenau sein. In der Tat gibt es keinen zulänglichen physikalischen Grund, sie für genau zu halten.

Wenn das dritte Fluidum Luft ist, so ist annähernd $\varrho_3 = 0$, und folglich, wenn H_1 die Konstante für die erste Substanz in Berührung mit Luft, H_2 die Konstante für die zweite Substanz, ebenfalls in Berührung mit Luft ist:

$$\sqrt{H_{12}} = \sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}.$$

Diese Gleichung liefert, wenn $H_1 > H_2$ vorausgesetzt wird, die Ungleichung:

$$H_{12} < H_1 - H_2,$$

die durch das Experiment wirklich bestätigt wird. S. § 685.

Die oben mitgeteilte Untersuchung kann indessen dazu dienen, nachzuweisen, wie der kapillare Druck gänzlich verschwinden kann, wenn der Übergang von einem Fluidum zum anderen allmählich genug gemacht wird. Nehmen wir den Fall des Überganges von der Dichte null zur Dichte ϱ; der Wechsel möge in zwei Stufen vor sich gehen, zuerst von einem Fluidum von der Dichte null zu einem von der Dichte $^1/_2\,\varrho$, dann von diesem zu einem von der Dichte ϱ; die Flüssigkeitsschicht von der Halbdichte sei von einer, im Vergleich mit dem Krümmungsradius kleinen, im Vergleich mit dem Radius der Wirkungssphäre großen Dicke. An jeder Stufe ist die Differenz des kapillaren Druckes nur ein viertel von der aus dem plötzlichen Übergange von null zu ϱ folgenden, und so geht alles in allem durch Einlegung der Zwischenschicht die halbe Wirkung verloren. Gäbe es drei gleiche Stufen, so würde die Wirkung auf ein Drittel reduziert werden u. s. w. Wenn die Anzahl der Stufen unendlich wird, verschwindet der kapillare Druck vollständig.

682. Doppelt gekrümmte Oberfläche. Im allgemeinen ist die gekrümmte Oberfläche einer Flüssigkeit nicht ein Teil einer Kugel, sondern hat verschiedene Krümmungen erstens in ihren verschiedenen Punkten und zweitens in einem und demselben Punkte in den verschiedenen, durch die Normale in ihm gelegten Ebenen. Ganz allgemein kann indessen in der nächsten Umgebung jedes Punktes die Oberfläche als mit einer gegebenen bestimmten Oberfläche zweiten Grades zusammenfallend betrachtet werden. Denn, nehmen wir den Anfangspunkt in irgend einem Punkte der Oberfläche, die Normale in

diesem Punkte als z-Axe und die x- und y-Axen senkrecht zueinander in der Tangentialebene an den Anfangspunkt. Die Oberflächengleichung kann alsdann in der Form

$$z = \alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2 + \text{u. s. w.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

geschrieben werden, wo unter u. s. w. höhere Potenzen und Produkte von x und y begriffen sind. Folglich ist, wenn z sehr klein und von konstantem Wert c genommen wird, Gl. (3) die Gleichung des Schnittes der Oberfläche mit der zur Tangentialebene parallelen und in einem Abstande c von ihr belegenen Ebene. Wenn wir x und y als unendlich klein erster Ordnung nehmen und Größen, die unendlich klein von der dritten oder höherer Ordnung sind, nämlich x^3, x^2y, xy^2 u. s. w., vernachlässigen, so ergibt sich als Gleichung des Durchschnittes

$$\alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2 = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Dies ist die Gleichung der sogenannten Indikatrix der Oberfläche; sie ist eine Ellipse oder eine Hyperbel oder ein paar paralleler gerader Linien, je nachdem $\alpha\beta - \gamma^2$ positiv, negativ oder null ist.

Die Krümmung der Oberfläche im Anfangspunkte in der zx-Ebene ist d^2z/dx^2, und ist nach Gl. (3) folglich 2α, und ebenso ist die Krümmung in der zy-Fläche 2β. Denn dz/dx ist die Tangente der im Punkte O stattfindenden Neigung der Tangente zur Oberfläche in der xz-Fläche, also nach unseren Festsetzungen gleich null. Das Verhältnis, in dem diese Null-Tangente mit x wächst, muß das Verhältnis sein, in dem die Tangentenlinie in O ihre Richtung pro Längeneinheit der Verrückung des Berührungspunktes längs der Kurve ändert. Folglich liegt, wenn 2α positiv ist, der Krümmungsradius in der positiven Richtung von z.

Nun sollen sich die x- und y-Axen um einen Winkel θ herumdrehen, und es sollen die neuen Axen x und y mit x' und y' bezeichnet werden. Dann ist

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta, \qquad y = x' \sin\theta + y' \cos\theta.$$

Die Oberflächengleichung wird

$$\begin{aligned} z = {} & (\alpha \cos^2\theta + 2\gamma \sin\theta \cos\theta + \beta \sin^2\theta)\, x'^2 \\ & - 2\,[(\alpha - \beta) \sin\theta \cos\theta - \gamma (\cos^2\theta - \sin^2\theta)]\, x'y' \\ & + (\alpha \sin^2\theta - 2\gamma \sin\theta \cos\theta + \beta \cos^2\theta)\, y'^2. \end{aligned}$$

Die Krümmung in der $x'z'$-Ebene ist

$$2\,(\alpha \cos^2\theta + 2\gamma \sin\theta \cos\theta + \beta \sin^2\theta),$$

und die in der $y'z'$-Ebene ist

$$2\,(\alpha \sin^2\theta - 2\gamma \sin\theta \cos\theta + \beta \cos^2\theta).$$

Die Summe dieser Krümmungen ist $2(\alpha + \beta)$, so daß die Summe der Krümmungen in zwei zueinander senkrechten Ebenen durch die Normale immer denselben Wert hat. Wenn also die Krümmung ihren Maximalwert in einer Ebene durch die Normale hat, so hat sie ihren Minimalwert in der zur ersteren senkrechten Ebene durch die Normale.

Diese beiden Krümmungen heißen die Hauptkrümmungen, ihre Summe ist $2(\alpha + \beta)$.

Betrachten wir jetzt zwei Ebenen, die mit der x-Axe die Winkel θ und $\theta + d\theta$ bilden. Die Krümmung beträgt

$$2(\alpha \cos^2\theta + 2\gamma \sin\theta \cos\theta + \beta \sin^2\theta),$$

und das zwischen ihnen liegende Oberflächenstück kann als der Bruch $d\theta/\pi$ der Oberfläche einer Kugel von dem Radius, der dem Reziproken dieses Ausdruckes gleich ist, betrachtet werden. Somit gilt für die Anziehung der ganzen jenseits der Oberfläche liegenden Substanzmasse auf einen mit der Basis in O, in die anziehende Masse eingebetteten Faden vom Querschnitt eins die Gleichung

$$\left.\begin{array}{r} K \pm \frac{2}{\pi} H \int\limits_0^\pi (\alpha \cos^2\theta + 2\gamma \sin\theta \cos\theta + \beta \sin^2\theta)\, d\theta \\ K \pm (\alpha + \beta) H = K \pm \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

das obere oder untere Vorzeichen ist anzuwenden, je nachdem die Oberfläche konkav oder konvex ist. R und R' bezeichnen die beiden Hauptkrümmungsradien.

683. Gaußsche oder energetische Kapillaritätstheorie. Identität der Oberflächenspannung mit der Energie pro Einheit der Oberfläche. Etwa 25 Jahre nach der Laplaceschen wurde eine neue Kapillaritätstheorie von Gauß gegeben, in welcher die Idee von der Energie der Materie verwertet wurde. Da von den Molekeln der Flüssigkeit angenommen wird, daß sie aufeinander und auf die Molekeln eines mit der Flüssigkeit in Berührung stehenden festen Körpers mit Kräften wirken, die Funktionen der Abstände zwischen den Teilchen sind, so kann ein Ausdruck für die potentielle Energie der Flüssigkeit hingeschrieben werden, und aus dem Prinzip, daß die potentielle Energie immer die Tendenz haben muß, sich zu verringern, kann die Form der Oberfläche in verschiedenen Fällen gefunden werden. Auf diese Weise erörterte Gauß den Gegenstand und stellte die Beschränkungen fest, die bezüglich des Gesetzes der zwischen den Teilchen wirksamen Kraft erforderlich sind, um die theoretischen Schlüsse mit den beobachteten Erscheinungen in Einklang zu bringen. Ein bei Laplace unerklärt gebliebener Punkt wurde durch die Gaußsche Theorie völlig erledigt, nämlich die beobachtete Erscheinung, daß, wenn eine gegebene Flüssigkeit und ein fester Körper miteinander in Berührung stehen, die Flüssigkeitsoberfläche den festen Körper immer unter demselben Winkel trifft. Die Theorie von Gauß soll an dieser Stelle nicht behandelt werden; wir wollen vielmehr das sekundäre Prinzip der Oberflächenspannung und die Konstanz des Berührungswinkels einer Flüssigkeit mit einem festen Körper als gegeben annehmen.

Die energetische Theorie führt nicht weniger direkt als die Laplacesche zum Begriffe der Oberflächenspannung. Denn wenn ein Teil einer Flüssigkeit seine Oberfläche vergrößert, so ist die vermehrte Anzahl von Molekeln, die jetzt in oder nahe der Oberfläche liegen, aus der Nachbarschaft anderer Molekeln entgegen den molekularen Anziehungen herausgerissen worden, und so muß von außen Arbeit auf die Substanz geleistet worden sein, um die Ausdehnung zu bewirken. Folglich ist in diesem Falle — abgesehen von etwaigen Energieänderungen infolge von thermischer oder Schwerewirkung — die potentielle Energie der Substanz von V_0 auf V_1 gestiegen, wo $V_1 - V_0$ die von äußeren Kräften bei der Ausdehnung der Oberfläche geleistete Arbeit ist. Vergrößert sich die Oberfläche von S_0 auf S_1, so ist die bei der Dehnung der Haut pro Flächeneinheit geleistete Arbeit

$$\frac{V_1 - V_0}{S_1 - S_0}.$$

Es leuchtet ein, daß die molekularen Kräfte die Tendenz haben werden, die Größe der Oberfläche zu verringern, so daß V_1 wieder nach V_0 zu abnimmt, d. h. es hat für die Beobachtung, für die es ja keine molekularen Kräfte gibt, den Anschein, als ob es eine zusammenziehbare Haut gebe, die durch Kohäsion mit der darunter befindlichen Flüssigkeit zusammenhängt, in vielen Fällen auch mit dem festen Körper, mit dem die Flüssigkeit in Berührung steht; und durch diese Haut werden die Phänomene scheinbar verursacht. Wir werden uns hier so ausdrücken, als ob diese Haut wirklich existierte, wie sie das ja in einem gewissen Sinne auch wirklich tut; nur darf sich der Leser nicht zu allzu grob sinnlicher Vorstellung von dieser Wirklichkeit verleiten lassen.

Fig. 379.

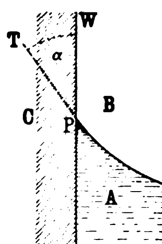
Es sei AB (Fig. 379) eine auf einer Oberflächenhaut gezogene Linie, dann neigt die Haut längs der Oberfläche quer durch ein Element ds von AB zur Zusammenziehung. F sei die durch ds hindurchwirkende Kraft; F/ds wird dann die Oberflächenspannung der Haut genannt; sie werde mit T bezeichnet. Es wird einleuchten, daß, wenn die Haut sich in horizontaler Lage im Gleichgewichte befindet, die Oberflächenspannung in allen Punkten dieselbe sein muß. Dehnt sich die Haut, so daß aus der Fläche S_0 der Flächeninhalt S_1 wird, ohne Änderung der Oberflächenspannung, so muß $T(S_1 - S_0)$ die Arbeit sein, die von äußeren Quellen geleistet worden ist, um diese Flächenzunahme zu erzielen. Denn, denken wir uns die Begrenzung längs der Tangentialebene zur Haut um einen kleinen Abstand u in einer Richtung verschoben, die um den Winkel θ gegen die in jener Ebene in diesem Punkte nach außen gezogene Normale geneigt ist; die gegen die Oberflächenspannung (die senkrecht zur Begrenzung wirkt) quer durch ein Begrenzungselement ds

geleistete Arbeit ist $Tu \cos\theta\, ds$. Nun ist aber $u \cos\theta\, ds$ der von dem Element ds beschriebene Flächeninhalt dS, und somit ist die gesamte, bei Ausdehnung der Haut geleistete Arbeit $\int T dS$, wobei das Integral rings um die Begrenzung genommen ist. Natürlich ist an den Stellen, wo θ größer ist als $\pi/2$, das hinzugefügte Flächenelement negativ, d. h. es findet dort Zusammenziehung der Haut statt. Bei konstantem T ist die geleistete Arbeit $T \int dS$ oder $T(S_1 - S_0)$. Offenbar ist, bei Annahme konstanter Spannung, die gesamte, bei Schaffung einer Oberfläche vom Inhalt S geleistete Arbeit TS. T kann demnach als Energie pro Oberflächeneinheit gedeutet werden.

Als ein elementares Beispiel kann ein einfaches Experiment betrachtet werden, durch das man eine rohe Bestimmung der Oberflächenspannung gewinnen kann. Ein rechtwinkliger Rahmen wird senkrecht aufgestellt und mit einer Haut aus Seifenschaum ausgefüllt, deren untere Kante sich an einen horizontalen Draht anlegt, der nach oben oder unten beweglich ist. Wenn l der Abstand zwischen den vertikalen Rahmenseiten ist, so ist die gesamte nach oben gerichtete Kraft, mit der die Haut den Draht zieht, Tl. Wird der Draht um ein Stück, h, heruntergezogen, so ist die geleistete Arbeit Thl, d. h. TS, wenn S den Zuwachs lh an der Oberfläche bezeichnet. Die Oberflächenspannung T kann durch Messung der Kraft Tl annähernd bestimmt werden.

684. Temperaturänderung bei stärkerer Ausdehnung einer Flüssigkeitsoberfläche. Wenn eine Flüssigkeitshaut sich schnell ausbreitet, so ändert sich ihre Temperatur, in der Regel fällt sie; es muß der Haut Wärme zugeführt werden, wenn ihre Temperatur konstant bleiben soll. Im Falle einer Wasserhaut ist der Wärmebetrag, der ihr zugeführt werden muß, um die Temperatur konstant zu erhalten, wenn die Haut sich ausbreitet, ungefähr der Hälfte des Energiebetrages, der bei der Ausdehnung zur Überwindung der konstanten Oberflächenspannung aufgewendet wird, äquivalent. Es ergibt sich dies aus dem Umstande, daß die Oberflächenspannung eine Funktion der Temperatur ist; die Theorie dieser Wirkung wird im zweiten Bande im Kapitel über Thermodynamik erklärt werden.

Fig. 380.



Man hat zu beachten, daß die Dimensionsformel von T die der Kraft pro Längeneinheit, d. h.

$$[MT^{-2}]$$

ist.

Fig. 380 stellt einen Schnitt durch einen Teil der Flüssigkeit vor, der durch eine vertikale, gerade — oder doch so wenig gekrümmte Wand, daß sie als gerade gelten kann, begrenzt ist. Der Schnitt ist als eine Fläche senkrecht zur Verbindungslinie der Medien gedacht. Im allgemeinen bildet die Flüssigkeitsoberfläche, gleichviel ob die Wand

vertikal ist oder nicht, einen bestimmten Winkel mit der Wandoberfläche. Wenn PT die Linie ist, in der die Ebene der Figur von einer zur Oberfläche im Punkte P tangentialen Fläche geschnitten wird, so heißt der Winkel $WPT = \alpha$ der Kontaktwinkel der Flüssigkeit mit der Oberfläche im Punkte P. In den meisten Fällen sind die in P sich berührenden drei Medien ABC die Flüssigkeit, die Luft und die Materie der festen Wand. Für Quecksilber in Berührung mit Glas bei Vorhandensein von Luft als drittem Medium ist der Winkel WPT ungefähr 48°. Häufig gilt übrigens der Supplementwinkel von WPT als Kontaktwinkel. Wenn das Medium B die Luft ist, so wird dieser Winkel häufig der Luftwinkel der Berührung der Flüssigkeit mit dem festen Körper genannt.

685. Dreieck der Spannungen. In manchen Fällen sind die drei Medien drei Flüssigkeiten oder zwei Flüssigkeiten und Luft, und es könnte nach der Theorie so scheinen, als müßte Gleichgewicht herrschen, wenn die drei Oberflächen so gegeneinander geneigt wären, daß jede der verschiedenen Spannungen T_1, T_2, T_3 in einer die gemeinsame Kante senkrecht schneidenden Ebene dem Sinus des Winkels zwischen den beiden anderen proportional wäre, wie im Dreick der Kräfte. Aber, wie Lord Rayleigh[1]) bewiesen hat, ist das Dreieck der Spannungen niemals möglich, weil immer eine von den drei Flüssigkeiten die Trennungsschicht der beiden anderen überfluten wird. Alle Experimentatoren sind zu diesem Ergebnis gelangt. So behauptet z. B. Marangoni (Pogg. Ann. 143, 1871), daß „die Grenzschicht zwischen zwei Flüssigkeiten eine kleinere Oberflächenspannung hat, als die Differenz der Oberflächenspannungen der Substanzen selbst (mit Ausnahme des Quecksilbers)". Wenn man also zwei Flüssigkeiten hat, deren Oberflächenspannungen in Berührung mit Luft T_1 und T_2 sind, so ist die Oberflächenspannung T_{12} der in Berührung befindlichen beiden Flüssigkeiten kleiner als $T_1 - T_2$. Also ist $T_1 > T_2 + T_{12}$, und die Flüssigkeit T_2 verbreitet sich über die, die Flüssigkeit von der Spannung T_1 von der Luft trennende Schicht. Ein Öltropfen kann nicht auf Wasser stehen, wenn nicht das Wasser schon mit einer dünnen Ölschicht bedeckt ist. Auch ist Quecksilber keine wirkliche Ausnahme. Wie Quincke bewiesen hat, verbreitet sich ein Wassertropfen über eine Oberfläche von reinem Quecksilber; gewöhnlich bleibt ein Wassertropfen auf einer Quecksilberschicht stehen, aber nur deshalb, weil diese mit einer fettigen Haut bedeckt ist.

686. Eine Ölschicht auf einer Wasserfläche. Wirkung des Öls auf Wellen. Ein auf eine Wasserfläche gebrachter Öltropfen verbreitet sich sofort als ein dünnes Häutchen über die Fläche, so daß dadurch die tatsächliche Oberflächenspannung der Wasserfläche ver-

[1]) Lord Rayleigh, Über die Theorie der Oberflächenkräfte. Phil. Mag. Dez. 1890.

ändert wird. Nachdem sich das Öl ganz ausgebreitet hat, vermehrt eine noch weitere Verdünnung der Ölschicht wiederum die Oberflächenspannung. Wenn also Wasser seine Oberflächenform so ändert, wie es bei der Wellenbewegung der Fall ist, tritt an den Stellen, wo sich die Oberfläche zusammenzieht, eine Verdickung der Ölschicht und dementsprechende Abnahme der Spannung auf, und an den Stellen, wo sich die Oberfläche erweitert, Verdünnung der Ölschicht und Zunahme der Spannung. Es werden also Kräfte wachgerufen, die dahin streben, die frühere Konfiguration wieder herzustellen, und die Ölschicht leistet den mit der Ausbreitung von Wellen verbundenen periodischen Schwankungen des Oberflächeninhalts Widerstand. Eine Welle bricht sich infolge des Umstandes, daß sie vorn steiler und hinten sanfter wird. Ist nun die Oberfläche mit einer Ölschicht bedeckt, so wird diese vorn infolge der Zusammenziehung dicker, hinten wegen der Ausdehnung dünner werden. Dadurch würden aber Spannungsänderungen erzeugt werden, die der Formänderung der Welle Widerstand leisten und sie so verhindern, sich zu brechen. Durch diese Wirkung werden auch die Kräuselungen und kleinen superponierten Wellen ausgeglättet, welche anderenfalls die Kämme der großen Wellen zum Fortschreiten und zur Brechung führen würden. Man verdankt diese Erklärung der Wirkung von Öl auf Wellen Osborne Reynolds (Rep. Brit. Assoc. 1880).

687. Wirkung der Dickeänderung auf Oberflächenspannungen. Lord Rayleigh hat nachgewiesen, daß auch an Seifenblasen die Zu- und Abnahme der Oberflächenspannung mit Verdünnung und Verdickung des Seifenhäutchens gezeigt werden kann. Es möge eine Seifenblase in einem Drahtringe dadurch erzeugt werden, daß man den Ring in eine flache Schale mit Seifenlösung eintaucht. Solange die Ebene des Ringes horizontal erhalten wird, muß jeder Teil des Häutchens gleiche Spannung haben; wird aber die Ringebene vertikal gestellt, während das Häutchen im Gleichgewicht bleibt, so wird offenbar die Spannung oben größer werden als am Boden, und zwar um den zum Tragen des dazwischen liegenden Stückes erforderlichen Betrag. Die Flüssigkeit sickert langsam von oben herunter, und die Blase wird oben dünner. Dies geht so lange fort, bis der obere Teil eine gewisse Grenzdicke erreicht, bei der dann die Oberflächenspannung abzunehmen anfängt und die Blase platzt. Dieses Ereignis tritt ein, wenn die Dicke mit molekularen Dimensionen vergleichbar wird, so daß die Messung der Grenzdicke es geradezu ermöglicht, zu einer Schätzung dieser Dimensionen zu gelangen. Es sind Experimente über diese Frage von Reinold und Rücker angestellt worden; die Ergebnisse werden im zweiten Bande behandelt werden.

688. Die durch aufgelöste Substanzen erzeugte Abnahme der Oberflächenspannung des Wassers. Die Löslichkeit einer Sub-

stanz in Wasser führt zu einer graduellen Abnahme der Oberflächenspannung von dem Werte für reines Wasser bis zu dem für die mögliche stärkste Lösung der Substanz. Zum Beispiel löst sich ein auf Wasser gelegtes Stückchen Kampfer, und die Spannung der Wasseroberfläche nimmt ab, und zwar in desto höherem Grade, je mehr Kampfer in dem Wasser an der Oberfläche vorhanden ist; hieraus entstehen die sonderbaren Bewegungen eines Stückes Kampfer auf Wasser. Der Kampfer löst sich, der gelöste Teil wird nach außen gezogen infolge der höheren Spannung der umgebenden Wasseroberfläche. Wenn die Oberfläche mit dem Finger berührt wird, so kann die Bewegung durch das sich der reinen Wasseroberfläche mitteilende und rasch auf ihr verbreitende Fetthäutchen gehemmt werden. Lord Rayleigh hat die zur Hemmung der Bewegung kleiner Kampferstückchen nötige Schichtdicke von Olivenöl dadurch bestimmt, daß er das Gewicht des hinzugefügten Öls und die Fläche des Gefäßes bestimmte. Er fand, daß für eine kreisförmige Oberfläche von 84 cm Durchmesser 0,8 mg genügten. Dies ergibt eine Schicht von $1,6 \times 10^{-7}$ cm Dicke; und Lord Rayleigh schätzt, daß eine Dicke von zwei Milliontel Millimeter genügt haben würde, wenn die Oberfläche von Anfang an vollkommen rein gewesen wäre.

Die Annahme der Oberflächenspannung, die durch Hinzufügung von Alkohol entsteht, kann man sehr deutlich auf folgende Weise zeigen: man überflutet eine schräg gehaltene Glasplatte mit anilingefärbtem Wasser und zieht dann horizontal mitten durch die benetzende Wasserschicht einen in Alkohol getauchten Kamelhaarpinsel. Die Flüssigkeit wird auf beiden Seiten des Alkohols zurückweichen, sie wird auf der oberen Seite herauf und auf der unteren herablaufen unter Freilassung des mittleren Teiles der Platte. Das Herauflaufen wird so lange andauern, bis die Flüssigkeit auf der Platte eine solche Tiefe erreicht hat, daß sie durch die Wirkung der Schwere zurückfließt. Hält man einen in Äther getauchten Pinsel dicht über die Wasserschicht, so wird das Wasser von dieser Stelle aus ringsherum zurückweichen.

689. Die sogenannten Tränen starker Weine. Auf dieselbe Weise ist, wie J. Thomson nachgewiesen hat, das Phänomen der „Tränen“ starker Weine zu erklären. Wein, der ein Glas oder eine Flasche zum Teil füllt, hat eine rundherum an der Wand heraufstehende Schicht, die sich in eine, die Ränder des Gefäßes benetzende dünne Schicht fortsetzt. Aus dieser verdampft der Alkohol schneller als das Wasser, so daß die Spannung zunimmt. Da nun die Spannung oben stärker ist als unten, so wird Flüssigkeit an den Wänden heraufgezogen, bis sie in Tropfen herabläuft. Befindet sich der Wein in einer teilweise gefüllten verkorkten Flasche, so geht die Bewegung nicht von statten, da die Verdampfung aufhört, wenn der Dampf mit der Flüssigkeit im Gleichgewicht ist. Doch kann die Bewegung in Gang gebracht werden, wenn man die Flasche öffnet und den Dampf abzieht, indem man ihn

durch ein Röhrchen absaugt, das so hineingesteckt ist, daß das tiefere Ende sich über der Flüssigkeitsoberfläche befindet. Wenn die alkoholische Lösung zu stark oder zu schwach ist, zeigen sich keine „Tränen". Eine Lösung, die etwa 25 Proz. stark ist, ergibt die beste Wirkung.

690. Steigen und Fallen von Flüssigkeiten in Röhren und zwischen Platten. Wir können nun das Steigen und Fallen einer in einem Rohre oder zwischen zwei Platten eingeschlossenen Flüssigkeit erklären. Fig. 381 zeigt den Anstieg des Wassers in einem Glasrohr über das Niveau des horizontalen Wasserspiegels in einem es umgebenden äußeren Gefäße, Fig. 382 die Depression einer Flüssigkeit, wie Quecksilber in einem ebensolchen Rohre. Für den Fall des Wassers ergibt sich als allgemeines Resultat der Experimente, daß der Kontakt-

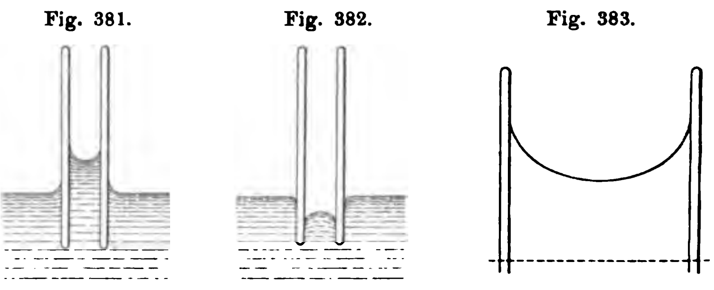


Fig. 381. Fig. 382. Fig. 383.

winkel gleich null ist, d. h., es ergeben sich 180° für den Luftwinkel; für den Fall des Quecksilbers ist der Winkel endlich und ungefähr 48°.

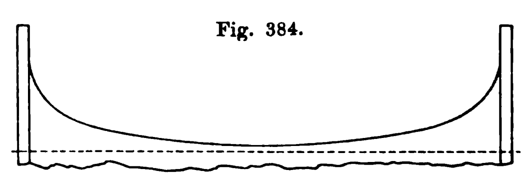


Fig. 384.

Betrachten wir zwei Punkte, einen, P, auf der freien Oberfläche im äußeren Gefäße, den anderen, Q, auf der Meniskusoberfläche im Rohre, in einiger Entfernung von der Wandung. Der Druck in der Flüssigkeit an der freien Oberfläche ist K, in derselben Höhe in dem Rohre ist er

$$K - \frac{1}{2} H\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

wenn r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsradien im Punkte Q sind und z dessen Höhe über P ist. Da diese beiden Drucke gleich sein müssen, so ergibt sich mit Rücksicht auf den Schweredruck in Q:

$$g \varrho z = \frac{1}{2} H\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

oder, wenn man $2\,T$ für H setzt:

$$g\varrho z = T\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Die Fig. 383 und 384 zeigen genauer die Form der Oberfläche in weiten Rohren. Die gestrichelte Linie bedeutet in beiden Fällen den ungestörten Spiegel.

Hat das Rohr einen kleinen Radius a, so sieht man leicht ein, daß r_1 sehr annähernd gleich r_2 sein muß. Am Grunde des Meniskus ist r_1 gleich r_2; wenn wir beide mit r bezeichnen, so erhalten wir

$$g\varrho z = 2\,T\frac{1}{r} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Wenn die Flüssigkeit das Rohr unter einem endlichen Winkel α schneidet, so ist die Krümmung, in einem Schnitt durch den Meridian, an der Kante, wie wir annehmen, $1/r'$, in der anderen Normalebene ist sie $\cos\alpha/a$ (vgl. S. 697). Denn die Oberfläche ist an der Berührungslinie mit dem Rohre im Winkel α zu den erzeugenden Linien der Rohroberfläche geneigt; folglich muß ein enger Oberflächenring in dieser Linie mit einer Kugeloberfläche vom Radius $a/\cos\alpha$ zusammenfallen; wenn also z die Höhe der Kante des Meniskus über dem Niveau der freien Oberfläche ist, so ist

$$g\varrho z = T\left(\frac{1}{r'} + \frac{\cos\alpha}{a}\right) \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Aber der gesamte von der obersten Schicht auf die Flüssigkeit ausgeübte Zug beträgt $2\pi a T\cos\alpha$; und wenn h die mittlere Höhe ist, bis zu der die Flüssigkeit steigt, so ist

$$\pi a^2 g\varrho h = 2\pi a T\cos\alpha$$

oder

$$g\varrho h = 2\,T\frac{\cos\alpha}{a} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Da nun das Rohr sehr eng ist, so ist h sehr annähernd gleich z, und daher ist

$$g\varrho h = T\left(\frac{1}{r'} + \frac{\cos\alpha}{a}\right) \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Die Vergleichung der Formeln (9) und (10) ergibt: $r' = a/\cos\alpha$, d. h. die beiden Krümmungsradien sind am Rande des Meniskus sehr annähernd gleich. Aber am tiefsten Punkte ist $g\varrho z = 2\,T/r$, wenn r der Krümmungsradius an dieser Stelle ist; folglich ist auch dort $1/r = \cos\alpha/a$, und somit jede der Krümmungen die gleiche sowohl am tiefsten Punkte des Meniskus als auch an seinem Rande; und so müssen sie an allen Punkten annähernd gleich sein. Der Meniskus ist demnach ein Teil einer Kugeloberfläche vom Radius $a/\cos\alpha$.

Ist der Kontaktwinkel gleich null, so ist der Krümmungsradius gleich a. Dies ist der Fall für Wasser und jede andere Flüssigkeit, die einen festen Körper benetzt, mit dem sie in Kontakt steht.

Die Höhe, bis zu der eine Flüssigkeit in einem Rohre steigt, steht im umgekehrten Verhältnis zum Radius des Rohres. Dasselbe Gesetz gilt für das Steigen einer Flüssigkeit zwischen zwei benachbarten parallelen Platten; nur ist die Formel hier etwas verschieden. Es gibt nur eine Krümmung, und sie beträgt $\cos\alpha/a$, wenn a der halbe Abstand zwischen den Platten und α der Kontaktwinkel ist. Folglich ist in diesem Falle, wenn h die mittlere Höhe ist,

$$g\varrho h = T\frac{\cos\alpha}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Die Höhe h ist also, wie der Vergleich mit Gl. (9) zeigt, nur die Hälfte derjenigen für ein Rohr von einem, dem Abstande zwischen den Platten gleichen Durchmesser.

In diesem Falle wird, wenn der Krümmungsradius irgend eines Punktes der gekrümmten Oberfläche r ist, die Höhe z, bis zu der die Flüssigkeit steigt, durch den Ausdruck

$$g\varrho z = \frac{T}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

gegeben.

Natürlich wird für den Fall der konvexen Oberfläche die Tiefe h, bis zu der irgend ein Punkt, in dem die Krümmungsradien r_1 und r_2 sind, unter die freie Oberfläche herabsinkt, durch Gl. (6) und der Abfall zwischen den Platten durch Gl. (12) ausgedrückt. Es ist dies derjenige Fall, in welchem die Flüssigkeit die Rohrwandung nicht benetzt, wie z. B. Wasser in einem Rohr, dessen Wandung mit einer Ölschicht überzogen worden ist.

Man kann auf folgende Weise ein interessantes Experiment anstellen, welches das Gesetz des Steigens und Fallens einer Flüssigkeit zwischen zwei Platten veranschaulicht: man stellt zwei rechteckige Glasplatten so auf, daß sie sich längs der einen Vertikalkante berühren, wie in Fig. 385, und daß sie an den beiden anderen Vertikalkanten durch einen dünnen Keil leicht getrennt sind, und stellt sie mit ihren unteren Horizontalkanten in einen Trog, der mit anilingefärbtem Wasser gefüllt ist. Wenn a der Abstand ist, bis zu dem der Keil die letztgenannten Kanten trennt, und l die horizontale Länge der Platten ist, so haben wir als ihren Abstand voneinander in einer Entfernung x von der vertikalen Berührungskante xa/l. Annähernd wird daher die Höhe z, bis zu der das Wasser an diesem Punkte steigt, durch

$$g\varrho z = T\frac{l}{xa}$$

gegeben. Folglich ist

$$xz = T\frac{l}{g\varrho a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

d. h xz ist eine Konstante. Somit ist die Berührungskurve des Wassers mit der Platte eine rechtwinklige Hyperbel, deren Asymptoten die

vertikale Berührungskante der Platten und eine mit der Oberfläche zusammenfallende Linie längs jeder Platte sind.

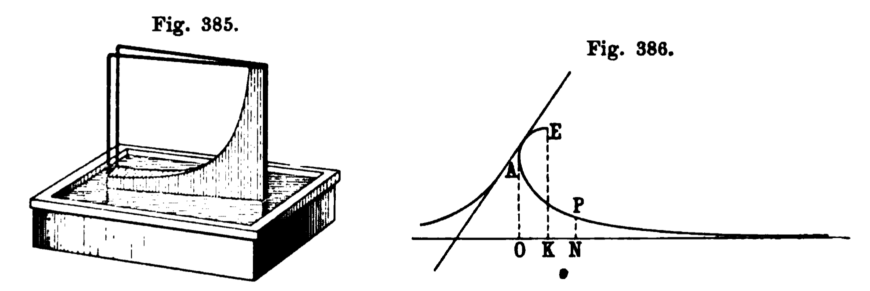


Fig. 385. Fig. 386.

691. Form der Flüssigkeitsoberfläche in der Nähe einer eingetauchten ebenen Platte. Betrachten wir nun die Form der Oberfläche auf jeder Seite einer in eine Flüssigkeit eingetauchten ebenen Platte. Fig. 386 zeigt die Form der Oberfläche wenigstens an allen Punkten, die nicht unendlich nahe an der Wandung liegen. Die Form wird sich für jeden Kontaktwinkel ergeben, wenn man die Platte in solcher Lage zeichnet, daß sie die Oberschicht im geeigneten Winkel schneidet. Ein Schnitt der Oberfläche durch eine zu der horizontalen Kante, in der die Flüssigkeit die Platte trifft, senkrechten Ebene muß die elastische Linie sein, da die Krümmung in irgend einem Punkte P dieses Oberflächenschnittes dem vertikalen Abstande des Punktes von dem in Ruhe befindlichen Niveau proportional ist. Folglich ist, wie wir in § 655 gesehen haben, wenn c eine Konstante ist, die Gleichung des Querschnittes

$$x = -\sqrt{4a^2 - y^2} + a \log \frac{2a + \sqrt{4a^2 - y^2}}{y} + c \quad . \quad . \quad (14)$$

Wenn für c der Wert $a\sqrt{2} - a \log(1 + \sqrt{2})$ gewählt wird, so wird der Anfangspunkt O, am Fuße der vertikalen Tangente genommen, x wird horizontal, y vertikal gemessen. OA, die Höhe des Berührungspunktes über O, ist $a\sqrt{2}$.

Wenn p für dy/dx steht, so ist die Krümmung in irgend einem Punkte P gleich

$$\frac{\frac{dp}{dx}}{(1 + p^2)^{3/2}},$$

und dies steht, wie wir sahen, mit der Ordinate y des Punktes in Beziehung durch die Gleichung

$$T \frac{\frac{dp}{dx}}{(1 + p^2)^{3/2}} = g\varrho y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Setzen wir a^2 für $T/g\varrho$, so verwandelt sich die Gleichung in

$$\frac{a^2 \frac{dp}{dx}}{(1+p^2)^{3/2}} = y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Ein erstes Integral dieser Gleichung erhält man, indem man beide Seiten mit p multipliziert und integriert. Dies ergibt

$$-\frac{a^2}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{2} y^2 + C = \frac{1}{2} y^2 - a^2 \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

da $y = 0$, wo $p = 0$ ist. Also kann diese Gleichung, wenn θ die Neigung der Tangente gegen die x-Axe in irgend einem Punkte ist, da $p = tg\,\theta$ ist, in der Form

$$a^2 \cos\theta = a^2 - \frac{1}{2} y^2 \quad \text{oder} \quad a^2(1-\cos\theta) = \frac{1}{2} y^2$$

also

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{y}{2a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

geschrieben werden.

692. Theorie eines großen Tropfens auf, oder einer Luftblase unter einer horizontalen Platte. Es können verschiedenartige Anwendungen dieses letzten Ergebnisses gemacht werden. Wenn man durch E, den Punkt, in dem die Kurve horizontal ist, eine horizontale Linie zieht, so erhält man annähernd den Meridianschnitt einer sehr großen kreisförmigen Luftblase in Wasser unter einer sehr gut benetzten Glasplatte, d. h. einen von einer Ebene durch die Figuraxe gemachten Schnitt.

Die Höhe der Blase ist KE, und diese ergibt sich aus Gl. (17) in dem negativen Wert der Wurzel aus $(1 + p^2)$. Folglich ist für diesen Punkt $y = 2a$. Die Höhe des Punktes A über der Abszissenaxe ist $a\sqrt{2}$, da $y = 2a \sin\frac{1}{2}\theta$ und $\theta = 90^0$ ist.

Wenn die Höhe der Blase oder die Höhe des Punktes A gemessen ist, so kann die Oberflächenspannung berechnet werden unter Anbringung einer Korrektion für die Vernachlässigung der Krümmung in der anderen Normalebene.

693. Bestimmung der Oberflächenspannung von Blasen und Tropfen. In einem Falle, in dem der Luftkontaktwinkel α ist, denken wir uns eine horizontale Linie durch den Punkt C' gezogen, in welchem die Kurve um eben diesen Winkel gegen die Horizontale geneigt ist. Dann werden wir als Ordinate dieses Punktes, die h heißen möge,

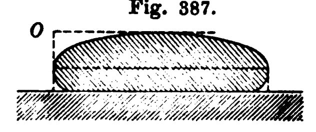
$$h = 2a \sin\frac{\alpha}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

haben. Diese Größe, welche die Höhe der Blase ist, werde gemessen, ebenso wie die Höhe OA, d. h. $a\sqrt{2}$. Dann ist a bekannt, und es

fehlt nur noch eine Bestimmung von ϱ, um die Berechnung der Oberflächenspannung zu ermöglichen. Auch kann, da a bekannt ist, der Kontaktwinkel nach Gl. (19) berechnet werden.

Diese Methode kann auf große Tropfen von Flüssigkeit angewandt werden, welche auf einer horizontalen Platte liegen, ohne sie zu benetzen; z. B. ein Tropfen Quecksilber auf einer Glasplatte, wie in Fig. 387. Wird der Anfangspunkt am Punkte O (Fig. 387) genommen und y nach unten gemessen, so sind die oben gegebenen Formeln ohne Änderung anwendbar. Nur ist ϱ die Dichte der den Tropfen bildenden Flüssigkeit.

Fig. 387.



Die Messung von Tropfen zum Zwecke der Bestimmung der Oberflächenspannung ist von Gauß in seiner Abhandlung über die Kapillarität empfohlen und von Quincke mit großer Sorgfalt ausgeführt worden. Indessen ist zu bedenken, daß die Theorie unvollkommen ist, da die vollständige Differentialgleichung nicht Gl. (16), sondern

$$a^2\left[\frac{\frac{dp}{dx}}{(1+p^2)^{3/2}}+\frac{\cos\theta}{r}\right]=y\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(20)$$

ist, wo r der Radius des horizontalen Schnittes durch den Tropfen an der Krümmungsstelle und θ der Winkel ist, den die Normale in diesem Punkte mit der Durchschnittsebene bildet. Wenn R der Radius des größten Querschnittes und x die Abszisse des Punktes vom Punkte O, Fig. 387, aus gemessen ist, so ist $r = R - x$, und θ der Komplementwinkel von $\operatorname{arc} tg\, p$. Daher ist

$$\cos\theta=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

und die Gleichung lautet:

$$a^2\left[\frac{\frac{dp}{dx}}{(1+p^2)^{3/2}}+\frac{p}{(R-x)\sqrt{1+p^2}}\right]=y\quad.\quad.\quad.\quad(21)$$

Diese Gleichung ist von Laplace erschöpfend behandelt worden in einem zweiten Supplement zum 10. Buch der Mécanique Céleste, worin er die Kapillarität weiter erörtert. Er vergleicht die von Gay-Lussac gemessene Höhe eines Quecksilbertropfens von 1 dm Durchmesser mit der Theorie, wobei er den Kontaktwinkel als 48° nimmt, und findet 3,397 mm als Höhe gegen die beobachtete Höhe von 3,378 mm. Die Höhe eines Tropfens von derselben Größe war vorher von Segner als 3,4067 mm gefunden worden.

Die für dieses Glied erforderliche Korrektion der Oberflächenspannung des Quecksilbers ist von Worthington (Phil. Mag. Jan. 1885) berechnet worden.

694. Die Plateauschen Versuche. Es ist von Plateau eine Reihe wichtiger Untersuchungen angestellt worden, mit Tropfen von Olivenöl in einer Mischung von Alkohol und Wasser, die so abgepaßt war, daß sie gerade die spezifische Schwere des Öls hatte, so daß die Gestalt einer Masse ohne jede andere Verzerrung als die durch die der Masse etwa erteilte Bewegung hervorgerufene betrachtet werden konnte. Es ergab sich, daß ein Öltropfen Kugelgestalt hat, wenn er, der Wirkung jeder Kraft entzogen, in Ruhe ist, ein Ergebnis, das natürlich für alle Flüssigkeiten gelten muß. Die Oberflächenschicht zieht sich so zusammen, daß er die kleinste Fläche einnimmt, die bei einem gegebenen Volumen möglich ist, und das ergibt bekanntlich die Kugelgestalt. Diese ist die einzige Gestalt von endlicher Ausdehnung, welche, wenn die Begrenzung keinem Zwange unterliegt, überall die Bedingung

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{a} \quad \dots \dots \quad (22)$$

befriedigt, wo a eine Konstante ist.

Wenn man einen dieser Tropfen senkrecht mitten durchbohrte mit einem so geölten Draht, daß der Tropfen ihm anhing, und diesen Draht dann um sich selbst drehte, so bauchte sich der Tropfen unter der Wirkung der Zentrifugalkraft horizontal aus, bis schließlich bei irgend einer kleinen Erschütterung ein Äquatorring sich von dem Hauptkörper trennte und um den Äquator der zentralen Masse rotierend verblieb, wie der Ring des Saturn um den Äquator dieses Planeten.

Es sind viele andere hochwichtige Untersuchungen von Plateau ausgeführt worden, die in seiner Statique .... des Liquides soumis aux seules Forces Moléculaires beschrieben sind; hierauf muß der Leser für eingehendere Belehrung verwiesen werden.

695. Häutchen mit zwei Oberflächen. Betrachten wir jetzt Flüssigkeitshäutchen mit zwei, durch eine dünne Flüssigkeitsschicht getrennten Oberflächen. Dies sind z. B. Seifenblasen, die, wenn bei der Bereitung der Lösung [1]) geeignete Maßregeln angewandt werden, sich tagelang halten und in verschiedenen Lagen untersucht werden, sowie auch sich Begrenzungen verschiedener Gestalt anschmiegen können. In diesem Falle kann die Spannung der Blase als das Doppelte der Spannung jeder Oberfläche angesetzt werden.

Die Blase sei geschlossen, p sei der Luftdruck in ihrem Innern,

---

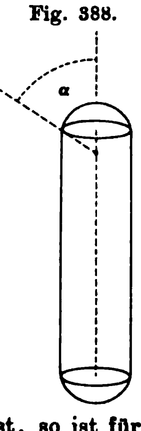
[1]) Man nehme 1 Tl. Marseiller Seife, schneide sie in kleine Stücke und löse sie in 40 Gewtln. mäßig warmen destillierten Wassers; man filtriere und mische 15 Volumtle. der Lösung mit 11 Tln. reinen Glyzerins. Dies lasse man eine Woche stehen; am 8. Tage bringe man es für sechs Stunden auf 3° C., filtriere, indem man der Vorsicht halber ein kleines Gläschen mit Eis in den Filter stellt, wiederhole das Filtrieren, bis die Lösung klar ist, und hebe diese bei normaler Temperatur in Flaschen auf.

P der äußere Luftdruck. Wenn R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien in irgend einem Punkte sind, so ist

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{p - P}{2T} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

696. Zylinderförmige Blase. Als Beispiel wählen wir eine Blase in Gestalt eines Zylinders, der mit zwei sphärischen Kappen abschließt. Man kann sie leicht herstellen, indem man zwei Drahtkreise in horizontalen Ebenen in passendem, vertikalem Abstande und so, daß ihre Zentren in einer Vertikalen liegen, aufhängt. Dies kann geschehen, indem man den unteren Kreis durch drei divergierende Drähte und den oberen durch drei divergierende dünne Fäden stützt, die an Punkten der Ringe befestigt sind, dann etwas Seifenlösung an die Öffnung eines Strohhalmes oder Röhrchens nimmt, das Ende zwischen die Ringe bringt und nun die Blase so lange aufbläst, bis sie mit beiden Ringen in Berührung kommt. Wird dann das Röhrchen vorsichtig zurückgezogen, während man das offene Ende mit dem Finger schließt, so kann man die Blase zwischen den Ringen in Ruhe stehen lassen. Wird dann der obere Ring vertikal gehoben, so wird sich die Blase dehnen und wird sich mit zunehmender Länge der Zylinderform nähern. Denn durch das Heben des oberen Ringes nimmt die Krümmung in einem vertikalen Schnitt durch die Axe ab, während sie in einem horizontalen Durchschnitt zunimmt. Wenn die Krümmung im vertikalen Durchschnitt null geworden ist, so ist die im horizontalen in jedem Punkte $1/a$, wo a der Radius jeden Ringes ist; dann müssen die abschließenden Kappen Kugelkalotten sein. Wenn a der Radius jeden Ringes und $p - P$ wie zuvor die Differenz zwischen innerem und äußerem Druck ist, so ist für den zylindrischen Rumpf der Blase

Fig. 388.



$$2T\frac{1}{a} = p - P \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Wenn ferner r der Radius der Kugelkalotte ist, so ist

$$4T\frac{1}{r} = p - P \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

folglich ist $2/r = 1/a$ oder $2a = r$. Es ist somit der Radius der Enden gleich dem Durchmesser des Röhrchens. Folglich ist (Fig. 388)

$$r \sin\alpha = \frac{1}{2}r \quad \text{oder} \quad \sin\alpha = \frac{1}{2},$$

d. h. $\alpha = 30^\circ$.

697. Das Katenoid. Wenn die kugeligen Enden durchstochen werden, so gleichen sich der innere und der äußere Druck der zylin-

drischen Blase plötzlich aus und die zylindrische Form verschwindet; die Oberfläche verwandelt sich in eine Rotationsoberfläche um die die Zentren der beiden Kreise verbindende Linie und hat in jedem Punkte eine doppelte Krümmung, welche durch die Gleichung

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

gegeben ist.

Diese Formel kann man mit Hilfe des Meunierschen Theorems umformen. Dieses Theorem setzt die Oberflächenkrümmung in einem Punkte P in einer Normalebene in Verbindung mit der Krümmung in einem jene Ebene in einer Tangentiallinie an die Oberfläche in dem besagten Punkte schneidenden Durchschnitt. Wenn R der Krümmungsradius in der Normalebene und α der Winkel zwischen den beiden Ebenen ist, so ist der Krümmungsradius in der anderen Ebene $R \cos \alpha$. Denn die Schnitte der beiden Ebenen in P fallen in unendlicher Annäherung zusammen längs eines kleinen Bogens ds, der seinen Mittelpunkt in P hat. Die Sehnen dieser beiden annähernd zusammenfallenden Bogen sind im Grenzwert von gleicher Länge. Wenn aber d der Abstand der Sehne von P im Normalschnitt ist, so ist der Abstand der anderen Sehne von P gleich $d / \cos \alpha$. Wenn 2θ der von ds im Krümmungsmittelpunkte im Normalschnitt umspannte Winkel ist, so ist

$$R\,(1 - \cos\theta) = d$$

oder, da θ klein ist,

$$\frac{1}{2}\,R\theta^2 = d, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{2}\frac{ds^2}{R} = d.$$

Ebenso ist, wenn r der Krümmungsradius im anderen Durchschnitt ist,

$$\frac{1}{2}\frac{ds^2}{r} = \frac{d}{\cos\alpha}.$$

Somit ist

$$r = R \cos \alpha,$$

und das ist eben das Meuniersche Theorem.

Ist nun $1/R_1$ die Krümmung in einer Ebene durch die Axe, die wir Meridianebene nennen wollen, so ist $1/R_2$ in der zu dieser senkrechten Ebene, die auch die Normale im Punkte P enthält, mit dem Abstand r des Punktes P von der Axe verknüpft durch die Gleichung

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\cos\theta}{r},$$

wenn r der Abstand des Punktes P von der Axe und θ der Winkel MPN ist. Demnach ist

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{\cos\theta}{r}$$

oder

$$r = -R_1 \cos\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Es ist somit die Krümmung in der Meridianebene entgegengesetzt der in der anderen Normalebene, und der Krümmungsradius in der ersteren Ebene ist PN, der Abstand des Punktes P von der Kreuzung der Normalen mit der Oberflächenaxe. Die Kreuzung der Oberfläche durch eine axiale Ebene ist also (s. oben § 324 f.) eine Art Kette, deren Axe die Direktrix ist. Daher wird die Oberfläche ein Katenoid genannt.

Wenn die Drähte enger zusammengestellt oder weiter auseinander gerückt werden, als es der zylindrischen Gestalt der Blase zwischen ihnen entspricht, so wird sich die Blase im ersten Falle konvex in einer Meridianebene ausbauchen, im zweiten wird sie durch die äußere Luft eingedrückt werden. Wenn wir (Fig. 389) s als von P nach Q anwachsend annehmen, so werden wir für die Krümmung in P

Fig. 389.

$$-\frac{d\theta}{ds}$$

haben.

Wenn ferner y der Abstand des Punktes P von der Kurvenaxe ist, so haben wir für die Krümmung in der anderen Ebene $\cos\theta/y$. Folglich ist

$$-\frac{d\theta}{ds}+\frac{\cos\theta}{y}=\frac{1}{a} \quad \ldots\ldots\ldots (28)$$

wenn $2a$ für $2T/(p-P)$ steht. Nun ist aber $\cos\theta = y/\varrho$, wo ϱ für PN, den Krümmungsradius in der zweiten Normalebene steht und $\sin\theta = dy/ds$ ist. Folglich ist $ds = dy/\sin\theta$, und die soeben mitgeteilte Gleichung wird jetzt

$$-y\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, dy = \frac{1}{a}\, y\, dy;$$

das Integral von dieser ist

$$y\cos\theta = \frac{y^2}{2a} + C \quad \ldots\ldots\ldots (29)$$

wo C eine Konstante ist. Nun ist $\cos\theta = y/\varrho$ und daher

$$y^2\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{2a}\right) = C \quad \ldots\ldots\ldots (30)$$

698. Kapillare Rotationsoberflächen, Entstehung der Unduloide, Katenoide und Nodoide. Nun denken wir uns die Kurve PQ durch das Rollen, entlang der Axe, einer anderen Kurve, mit dem Berührungspunkt in N, beschrieben. PM ist das vom Punkt P auf die Tangente an die rollende Kurve gefällte Lot. Die in Gl. (30) gegebene Beziehung zwischen dem Radiusvektor ϱ und y ist genau die Beziehung zwischen der Länge des Radiusvektors ϱ vom Brennpunkte eines Kegelschnittes nach einem Punkte auf der Kurve und dem Lote, das vom

Brennpunkte aus auf die Tangente an den Kegelschnitt in P gefällt wird. Der Leser kann dies ohne weiteres für die Ellipse aus dem Vergleich mit den Gleichungen aus § 79 entnehmen. Die eine Halbaxe des Kegelschnittes ist a, die andere ist $\sqrt{2aC}$. Somit ist die Kurve die vom Brennpunkt eines Kegelschnittes, während er der Kurvenaxe entlang rollt, beschriebene Linie.

Wenn die rollende Kurve eine Ellipse ist, heißt die vom Brennpunkte gezeichnete Kurve Unduloide (Fig. 390); ist sie eine Parabel, so heißt die Kurve Kettenlinie (Fig. 389, s. v. S.); ist sie endlich eine Hyperbel, so heißt die Kurve Nodoide und besteht aus einer Reihe von Schleifen, wie in Fig. 391. Die entsprechenden Umdrehungsflächen heißen Unduloid, Katenoid und Nodoid.

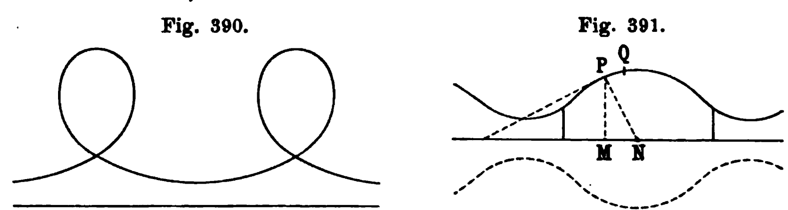


Fig. 390. Fig. 391.

699. Stabilität von Zylinder und Katenoid. Es ist hier nicht Raum, die Stabilität von Zylinder und Nodoid zu behandeln. Für diese Untersuchungen sei der Leser auf Maxwells Artikel über Kapillarität in der Encyclopaedia Britannica, 9. Auflage, verwiesen. Die Ergebnisse sind, daß eine zylindrische Blase zwischen den Kanten zweier paralleler kreisförmiger Endplatten, wenn keine Kräfte auf sie wirken, nur dann stabil ist, wenn der Abstand zwischen den Platten kleiner ist als der Umfang.

Ein an den Enden von zwei offenen Ringen begrenztes Katenoid ist stabil, wenn die Tangenten an die Enden der erzeugenden Kettenlinie sich über der Direktrix der Kurve schneiden, d. h. ehe sie die Axe des Katenoids erreichen.

Der erste Fall ist wichtig durch seine Geltung für die Stabilität eines Flüssigkeitsstrahles. Zylindrische Teile, die länger sind als die besagte Grenze, werden in einzelne getrennte Teilchen zerstäuben, deren jedes die Tendenz nach der Kugelgestalt haben wird, und die, wenn sie sich fortgesetzt unter der Wirkung der Schwerkraft frei bewegen, schließlich, nach einer genügenden Anzahl von Schwingungen um die Kugelgestalt, diese auch wirklich annehmen werden.

700. Einfluß der Oberflächenspannung auf die Wellenausbreitung. Der Einfluß der Kapillarität auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist zuerst von Lord Kelvin (Phil. Mag. Okt. 1871) und sodann von Kolaček (Wied. Ann. 5, 1878) untersucht worden. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen, die kurz sind im Vergleich mit der Tiefe des Wassers, ist durch die Gleichung

$$v = \sqrt{g\frac{\lambda}{2\pi}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

gegeben, wo λ die Wellenlänge und g eine solche Größe ist, daß $g\varrho z$ der Druck in einer Tiefe z unter der Oberfläche an irgend einem Punkte ist. In gewöhnlichen Fällen ist g nur einfach die Beschleunigung durch die Schwere. Die Wirkung der Oberflächenspannung geht aber dahin, den Druck in einer Tiefe z zu vermehren, wenn die Oberfläche konvex ist, und ihn zu vermindern, wenn sie konkav ist. Es sei das Wellenprofil längs der Ausbreitungsrichtung durch den Ausdruck

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$$

gegeben, wo y die Höhe der Oberfläche über dem mittleren Niveau derselben ist. Wir haben dann für die Krümmung

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} y,$$

und es ist folglich der von der Krümmung herrührende Druck in der Oberfläche

$$-T\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} Ty \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Der Druck im mittleren Oberflächenniveau ist dieser Ausdruck, vergrößert um $g\varrho y$, so daß der Gesamtdruck dort den Wert

$$g\left(1 + 4\pi^2\frac{T}{g\varrho\lambda^2}\right)\varrho y$$

erreicht. Es geht also die Wellenausbreitung so vor sich, als ob die Schwere von g auf $g\,(1 + 4\pi^2 T/g\varrho\lambda^2)$ zunähme. Somit ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\lambda\varrho}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Dieser Ausdruck wird für verschiedene Werte von ϱ verschiedene Werte haben. Er wird seinen kleinsten Wert für

$$\frac{g\lambda}{2\pi} = \frac{2\pi T}{\lambda\varrho},$$

d. h. für

$$\lambda^2 = \frac{4\pi^2 T}{g\varrho}$$

haben, und es wird alsdann

$$v = \sqrt[4]{4g\frac{T}{\varrho}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

sein.

701. Wellen und Rippungen. Für Wellen, bei welchen λ größer ist als $2\pi\sqrt{T\cdot g\varrho}$, ist mehr die Schwerkraft als die Oberflächenspannung maßgebend, für Wellen, bei welchen λ kleiner ist als dieser Grenzwert, mehr die Oberflächenspannung als die Schwerkraft. Diese letzteren

Wellen nennt man nach Lord Kelvin u. A. Rippungen oder Kräuselungen. Man kann sie sehr deutlich erkennen, wenn man von einem Boote aus eine feine Angelrute, durch ein eingetauchtes Bleikügelchen gespannt, ins Wasser hält, während das Boot vorwärts gerudert wird. Es entsteht ein Wellenmuster, das sich bis in einige Entfernung vor der Angel ausbreitet. Die Wellen gehen von der Angelschnur vorn im Wasser (das sich gerade an der Schnur mit derselben Geschwindigkeit wie diese bewegt) aus, bis ein Punkt erreicht wird, wo infolge der langsameren Bewegung des Wassers die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen gerade der Bootsgeschwindigkeit gleich ist. Dieser Punkt bezeichnet die Spitze des Musters von stationären Wellen, die sich mit dem Boote vorwärts bewegen. Die der Schnur nächste stationäre Welle ist die Welle von kleinster Geschwindigkeit, dann kommen die beiden Gruppen schneller fortschreitender Wellen, nämlich die Gravitationswellen und die Kräuselungen. Die ersten nehmen an Wellenlänge zu, die zweiten ab und beide nehmen an Amplitude ab in dem Maße, wie die Entfernung von der Schnur wächst. Wenn w die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen und V die Geschwindigkeit der Quelle ist, so ist die Außenseite des Wellenmusters in einiger Entfernung von seiner Spitze, um den Winkel

$$\arcsin \frac{w}{V}$$

gegen die Bewegungsrichtung geneigt.

702. Bestimmung der Oberflächenspannung durch Kräuselungen. Dieses theoretische Ergebnis ist von Lord Rayleigh und Mathiessen geprüft und von dem ersteren zur experimentellen Bestimmung der Oberflächenspannung benutzt worden [1]. Die Methode ist jeder anderen vorzuziehen, da bei ihr Vorsichtsmaßregeln zur Reinhaltung der Flüssigkeitsoberfläche getroffen werden können, die bei den anderen Methoden nicht anwendbar sind.

Ein flacher Porzellantrog, 25 zu 30 cm, nahm das Wasser auf; zur Wellenerregung diente ein geradkantiges Stückchen Glas, das an der einen Zinke einer durch einen Elektromagneten in Schwingung erhaltenen Stimmgabel befestigt war; diese letztere hatte die durch Vergleichung mit Normalgabeln bestimmte Schwingungszahl 42,12. Sichtbar gemacht wurden die Wellen mit Hilfe einer in die Brennebene einer großen Linse von etwa 80 cm Brennweite gebrachten Gasflamme. Die Linse befand sich nur ein paar Zentimeter über der Wasseroberfläche, und die Flamme wurde ein ganz weniges auf die eine Seite der Symmetrieaxe postiert, damit nicht der Brennpunkt nach der Reflexion und einem zweiten Durchgang durch die Linse mit der Lichtquelle zusammenfiele.

---

[1]) Lord Rayleigh, Phil. Mag. Juli 1883 und November 1890. Matthiessen, Wied. Ann. **38**, 1889.

Eine in Verbindung mit dem Erreger in Einklang erhaltene Stimmgabel blendete das Licht der Flamme bei jeder Schwingung mit Hilfe eines Stückchens Weißblech ab; auf diese Weise wurde die Oberfläche bei jeder Schwingung momentan sichtbar und zeigte die Wellen immer in derselben Phase.

Das Auge wurde dicht an den Brennpunkt herangebracht, zu dem das reflektierte Lichte gelangte, und so subtil war die Anordnung, daß Wellen sichtbar wurden, die bei Betrachtung der Oberfläche auf die gewöhnliche Weise vollkommen unsichtbar blieben.

Bei einigen der Versuche wurde eine etwas schwerere Stimmgabel (Schwingungszahl 40,9) benutzt und das Ergebnis als mit den mit der anderen Stimmgabel erzielten völlig übereinstimmend gefunden.

Um die Wasserfläche rein zu erhalten, wurde ein dünner Metallreifen, breiter als das Wasser tief war, eng um den die Wellen erregenden Taucher herumgelegt und dann losgelassen, so daß er sich bis an die Gefäßwandung ausdehnte. Diese ein- oder zweimal angewandte Prozedur reinigte die Oberfläche sehr gründlich; von Zeit zu Zeit wurde sie wiederholt, da sich Staubteilchen aus der Luft auf der Wasserfläche festsetzten.

Die Anzahl der Kräuselungen zwischen zwei Punkten dicht an der Oberfläche wurde gezählt, und es ergab sich daraus die Wellenlänge. Die (vorher bekannte) Periode ermöglichte es alsdann, die Oberflächenspannung durch Gl. (33) zu berechnen, wobei $g\lambda/2\pi$ als zu vernachlässigen betrachtet wurde.

Als mittleres Resultat ergab sich T für Wasser als 74 Dynen pro cm bei der Temperatur von 18° C. Dies ist bedeutend unter dem von Quincke aus Beobachtungen an Luftblasen unter Glasplatten gefundenen Werte. Dagegen stimmt es mit anderen Beobachtungen von Lord Rayleigh über die Transversalschwingungen von Wasserstrahlen (Proc. R. Soc. Nr. 196, 1879) überein, für welche die Quinckeschen Resultate nach den Angaben Worthingtons eine zu kleine Wellenlänge ergaben.

703. Mikroskopische oder teleskopische Methode. Die folgende Methode wurde von Craw gelegentlich seiner Versuche über die Oberflächenspannung von Quecksilber in Berührung mit verschiedenen Lösungen ausgearbeitet. Es wird eine Flüssigkeit in ein flaches Gefäß gefüllt, das auf dem Resonanzkasten eines Monochords steht. Wird das Monochord gestrichen, so entsteht ein deutliches Muster stehender Kräuselwellen durch Interferenz der von den Gefäßwandungen vorschreitenden Wellen. Diese Wellen enthalten verschiedene konstituierende Serien, von denen jede durch geeignete Verteilung von Glasstäbchen auf der Oberfläche herausgehoben werden kann.

Fig. 392 (a. f. S.) veranschaulicht die Anordnung. T ist ein rechteckiger Trog mit der Flüssigkeit, der mit dem Resonanzkasten fest ver-

bunden ist. Das von der Lichtquelle L ausgehende Licht wird durch die Sammellinse C parallel gemacht, geht durch den Schlitz S, wird durch den Spiegel U (der sich jeder Lage anpassen läßt) auf die Flüssigkeitsoberfläche geworfen und von dort in das Mikroskop zum Ablesen oder besser in das Teleskop eines horizontalen Kathetometers H reflektiert. Der Spiegel ist mit dem Teleskop starr verbunden.

Das Monochord wird durch eine elektrische Anordnung in Schwingung erhalten. Zwei Drähte A und B werden auf die Höhe einer Normalstimmgabel gestimmt und durch parallel verbundene Elektromagnete EE, einer über, der andere unter seinem Draht, erregt. Der Quecksilberkontakt für jeden Draht dient als Unterbrecher für den Elektromagneten des anderen, so daß die Gleichförmigkeit der Tonhöhe und Phase der beiden Drähte gesichert ist. Das Schlitzbild und der Faden im Okular werden in genauer Koinzidenz mit dem Bilde des Kammes einer Kräuselwelle und parallel mit ihm angeordnet, und das Mikroskop

Fig. 392.

(oder Teleskop) wird über m Kämme wegbewegt. Dann nimmt man die Differenz der Skalenablesungen d, woraus sich $\lambda = d/m$ als Länge einer einzelnen Kräuselwelle ergibt. Die auf diesem Wege erhaltenen Messungen haben sich als innerhalb des persönlichen Fehlers (ungefähr 0,10 Proz. der Oberflächenspannung) mit denjenigen übereinstimmend erwiesen, welche durch eine einfache Serie ebener Wellen von kleiner Amplitude, entweder durch Funkenbeleuchtung und Photographie oder durch direkte Mikroskopablesung gemessen, gewonnen wurden.

704. Scheinbare Anziehung und Abstoßung zwischen zwei Platten. Bewegung eines Tropfens in einem konischen Rohr. Wenn eine Flüssigkeit zwischen zwei eng zusammenstehenden Platten ansteigt, so ziehen diese scheinbar einander an; in Wahrheit werden sie nur durch den Überdruck auf die Außenseiten aneinander gepreßt. Es ist nicht schwierig, die Kraft für einen gegebenen Fall zu berechnen. Lassen wir Wasser zwischen zwei in einem großen Gefäße nahe beieinander vertikal und parallel aufgestellten Platten bis zu einer mittleren Höhe h über dem Niveau im Gefäße steigen. Der Druck in einer Höhe x ist $P - g\varrho x$, wenn P der Atmosphärendruck ist. Nun ist

aber der Druck auf die Außenseite P; folglich ist der resultierende Druck auf einen horizontalen Streifen der Platte, dessen Länge l und Breite dx ist, $g\varrho l x dx$. Der gesamte Druck auf eine Länge l der Platten ist also

$$g\varrho l \int_0^h x dx = \frac{1}{2} g\varrho l h^2.$$

Hat die Flüssigkeit einen Kontaktwinkel α mit den Platten, so muß ein Glied $Tl \sin\alpha$ hinzugefügt werden.

Steht die Flüssigkeitsoberfläche zwischen den Platten tiefer als das ungestörte äußere Niveau, und stehen die Platten dicht beieinander, so stoßen sie sich scheinbar ab mit einer Kraft, die auf dieselbe Weise berechnet werden kann.

Fig. 393.

Betrachten wir eine kreisförmige Flüssigkeitsschicht zwischen zwei eng benachbarten parallelen, horizontalen Platten. Der Kontaktwinkel sei α. Die Oberfläche wird in jedem Schnitt, senkrecht zu den Platten und durch ihren Mittelpunkt gehend, konkav und in jedem Querschnitt parallel mit den Platten konvex sein.

Wenn d der Abstand zwischen den Platten ist, so ist der Krümmungsradius im ersten Querschnitt annähernd $\frac{1}{2} d/\cos\alpha$, so daß die Krümmung $2\cos\alpha/d$ ist. Wenn R der Radius der Platte ist, so ist die andere Krümmung $1/R$. Folglich beträgt die Abnahme des Druckes:

$$T\left(2\frac{\cos\alpha}{d} - \frac{1}{R}\right).$$

Der Flächeninhalt ist πR^2, und darum ist der von der Druckdifferenz herrührende Druck, mit dem jede Platte gegen die andere gedrückt wird:

$$\pi R^2 T\left(2\frac{\cos\alpha}{d} - \frac{1}{R}\right) = 2\pi R^2 T\frac{\cos\alpha}{d} - \pi R T.$$

Hierzu muß der von der Schicht ausgeübte Zug $2\pi R T \sin\alpha$ hinzugerechnet werden, so daß die ganze Kraft

$$2\pi R^2 T\frac{\cos\alpha}{d} - \pi R T(1 - 2\sin\alpha)$$

beträgt.

So werden zwei zusammengerückte Eisblöcke mit einer Schicht Wasser zwischen sich zueinander gezogen und backen zusammen. Ein Teil des in Berührung gebrachten Eises schmilzt infolge der durch den Druck erzeugten Erniedrigung des Gefrierpunktes, dadurch läßt der Druck teilweise nach, und die Schicht gefriert, wodurch sie die beiden Blöcke zusammenschweißt.

Ferner wird ein Flüssigkeitstropfen in einem konischen Rohre sich nach dem engeren oder weiteren Teile des Rohres bewegen, je nachdem die Flüssigkeit das Rohr benetzt oder nicht. Am engen Ende des Tropfens ist die Krümmung größer und wird der Flüssigkeit durch die Schicht eine größere Kraft erteilt, als an seinem weiten Ende. Diese Kraft ist nach dem engeren Rohrende zu gerichtet, wenn die Oberfläche konkav und entgegengesetzt, wenn sie konvex ist.

705. Messung der Oberflächenspannung durch Kapillarröhren. Viele Bestimmungen der Oberflächenspannung des Wassers sind durch Messung des Ansteigens oder Abfallens von Flüssigkeiten in Röhren gemacht worden. Eine der ersten wurde von Gay-Lussac gemacht und von Laplace in seinem schon zitierten Supplement beschrieben. Die Röhre war von weißem Glas und hatte einen inneren Durchmesser von 1,29441 mm. Die Erhebung des tiefsten Punktes der Oberfläche betrug 23,1634 mm bei einer Temperatur von 8,5° C. Das Wasser benetzte die Röhre und der Kontaktwinkel war null. Wenn wir ein Sechstel des Röhrendurchmessers hinzu addieren, erhalten wir als mittlere Höhe 23,3791 mm. Hieraus ergibt sich als Oberflächenspannung des Wassers bei 8,5° C. der Wert 74,2 Dynen pro Zentimeter, fast genau das von Lord Rayleigh für die Temperatur von 18° C. gefundene Resultat.

Ein mit einer weiten Röhre angestelltes Experiment ergab ein fast genau übereinstimmendes Resultat.

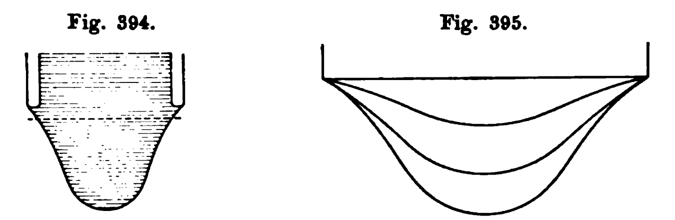
Bei der Ausführung solcher Experimente ist es wesentlich, die Röhren äußerst sorgfältig nach den wirksamsten chemischen Methoden zu reinigen und die benutzten Flüssigkeiten so gut als möglich von Verunreinigung frei zu halten. Die dünnste Fettschicht auf der Wasseroberfläche in einer Röhre würde die Höhe der Säule verringern und das Resultat ungenau machen. Die Höhe der Säule muß aus der Entfernung mittels eines Kathetometerteleskops sorgfältig abgelesen werden.

706. Form der Tropfen. Man hat Versuche gemacht, die Oberflächenspannung von Flüssigkeiten dadurch zu ermitteln, daß man das Gewicht der von einem horizontalen, kreisrunden Mundstück, das mit einem die betreffende Flüssigkeit enthaltenden Gefäße in Verbindung steht, herabfallenden Tropfen feststellt. Doch hat man bei solchen Versuchen irrtümlich geschlossen, daß das Gewicht des Tropfens $2\pi r T$ betrage, wo r der Radius des Tropfens auf der Abreißhöhe ist. Wenn der Tropfen in dieser Höhe zylindrisch ist, so muß der Druck im Inneren den atmosphärischen um T/r übertreffen, was eine nach unten gerichtete Kraft vom Betrage $\pi r T$ auf den fallenden Tropfen ergeben würde. Es könnte also das Gewicht des Tropfens nur gleich $\pi r T$ sein, und die aus dem Gewichte nach der falschen Formel erhaltene Oberflächenspannung würde das Doppelte des eigentlichen Wertes sein. Die Methode ist auch aus anderen Gründen nicht zuverlässig. Die Los-

lösung des Tropfens ist von dem Loche der Röhre beeinflußt. Selbst mit einem in beiden Fällen gleichen äußeren Durchmesser und Befestigung an der äußeren Kante ist das Gewicht des losgelösten Tropfens merklich verschieden, je nachdem das Loch sehr weit oder sehr eng ist. Der Leser sei auf eine Abhandlung von Lord Rayleigh, Phil. Mag., Oktober 1899, verwiesen.

Fig. 394 zeigt die theoretische Form eines hängenden Tropfens. Die unterbrochene horizontale Linie zeigt das Niveau des normalen

Fig. 394. Fig. 395.



Atmosphärendruckes in dem Tropfen. Man wird bemerken, daß dort die Krümmungen im horizontalen und vertikalen Schnitt entgegengesetzt sind; sie heben sich sogar, wie man leicht einsieht, gerade gegenseitig auf, so daß $1/R_1 + 1/R_2 = 0$ und die Druckdifferenz null ist. Fig. 395 ist aus einer interessanten Abhandlung über hängende Tropfen von Worthington (Proc. R. Soc., 16. Juni 1881) entnommen. Der Tropfen war Terpentin, das aus einer vertikalen Zylinderröhre austropfte, deren unteres Ende mit einem scharfen Instrumente flach geschliffen war. Das vergrößerte Bild des Tropfens wurde durch eine Linse auf einem Schirme entworfen und in verschiedenen Entwickelungsstadien des Tropfens aufgenommen.

Siebzehntes Kapitel.

Messungen und Instrumente.

707. Messung der Masse. Wage. Das meiste von dem, was in Betreff der Maßeinheiten zu sagen ist, findet sich bereits im ersten Kapitel sowie in Verbindung mit den Definitionen abgeleiteter Einheiten an den Stellen, wo diese vorkommen. Es gibt aber einige Punkte im Zusammenhange mit der Messung der Masse, der Längenmessung in gewissen besonderen Fällen und der Winkelmessung, die geeignet sind, an dieser Stelle besprochen zu werden.

Vor allen Dingen handelt es sich um das Standard-Instrument zur Messung der Masse: die Wage. Sie besteht im wesentlichen aus einem zweiarmigen Hebel, dem sogenannten Wagebalken, der um eine horizontale, senkrecht zu seiner Länge verlaufende Axe beweglich ist, und an seinen beiden Enden zwei Wagschalen trägt, die die zu vergleichenden Massen aufnehmen. Im allgemeinen werden die Arme genau gleich lang gemacht, d. h. wenn die Verbindungslinie zwischen den Punkten, wo die Schalen am Balken befestigt sind, horizontal ist, so ist sie senkrecht zur Axe, und diese Punkte sind von der die Axe enthaltenden vertikalen Ebene gleich weit entfernt. Ferner ist das System so konstruiert und angeordnet, daß der Balken ruhig in der horizontalen Lage verharrt, wenn die Wagschalen sich daran befinden und keine Gewichte tragen. Jede Abweichung des Balkens von der horizontalen Lage kann durch einen kleinen auf einem Zapfen aufgesetzten Arm, den der Balken über seinem Mittelpunkte trägt, korrigiert werden. Wird derselbe gedreht, so geht der Schwerpunkt ein wenig nach der einen oder der anderen Seite des Balkens, und außerdem natürlich seitwärts. Der Schwerpunkt des Balkens einschließlich der Wagschalen liegt unterhalb der Drehungsaxe des Balkens.

708. Beschaffenheit einer Präzisionswage. Um Irrtümer zu vermeiden, die aus der Reibung sich ergeben könnten, läßt man den Balken auf zwei horizontalen „Schneiden" schweben, die äußerst sorgfältig aus gehärtetem Stahl gemacht und so abgeschliffen sind, daß sie

eine gerade glatte Kante haben. Diese Schneiden sind nach unten gerichtet und ruhen auf glatten horizontalen Achatplatten, deren je eine sich auf jeder Seite des Balkens befindet. An jedem Ende des Balkens befindet sich eine nach oben gerichtete horizontale Schneide. Auf jeder dieser Schneiden ruht mittels einer Achatplatte ein Glied, an dem die Wagschale jedes Endes befestigt ist. Der Abstand zwischen den Schneiden ist die Länge des Balkens. Die Teile sind in der Fig. 396,

Fig. 396.



einer von Brunée in Göttingen hergestellten Präzisionswage, zu sehen Ein System von Hebeln ermöglicht es, den Balken auf seine Schneiden zu legen, wenn die Wage gebraucht werden soll, und ihn anderweitig zu stützen, wenn sie nicht im Gebrauch ist. Die Spitze eines langen, vom Balken herabhängenden und sich mit ihm drehenden Zeigers bewegt sich längs einer graduierten Skala nahe an der Basis der tragenden Säule und erlaubt so noch eine sehr kleine Abweichung des Balkens von der horizontalen Lage zu messen.

Die Wage ist in einem gut angepaßten Gehäuse eingeschlossen, so daß der Balken u. s. w. vor Luftzug geschützt ist, und es werden Vor-

richtungen in feinster Arbeit angebracht, um die Gewichte aufzulegen und zu bewegen, ohne das Gehäuse zu öffnen. Gut ist es, das Gehäuse innen, an Stellen, wo kein Glas ist, mit dünnem Kupferblech auszufüttern, um die innere Temperatur auszugleichen.

Mit Hilfe eines vom einen Ende des Gehäuses herausragenden Armes kann man kleine „Reiter" an verschiedenen Stellen des Balkens aufsetzen, um kleine Änderungen der Gewichte um bekannte Beträge vorzunehmen. Hierfür dient eine graduierte Skala längs des Balkens, wie die Figur zeigt. Die Wirkung eines Reiters von bekanntem Gewichte kann von der Graduierung der Skala abgelesen werden.

Auch kann man aus Fig. 396 die Vorrichtung der „Arretierung" erkennen, durch welche der Balken, wenn nötig, in seine normale Lage zurückgebracht werden und die mittelste Schneide jederzeit in eine bleibende Stellung auf ihrer Unterlage gebracht werden kann. Ebenso sind dort die Maßregeln erkennbar, die getroffen sind, um die Endschneiden sich mit absoluter Sicherheit auf den Achatplatten bewegen zu lassen. Die Wagschalen müssen mit dem Ansatzstück, an dem sie hängen, durch ein oder zwei lose Glieder verbunden sein, damit nicht ein Unterschied durch das Auflegen eines Gewichtes auf der einen oder der anderen Stelle der Schale sich geltend machen kann. Eine vollständige Vertrautheit mit dem Bau, dem Gebrauch und der Regulierung der Wage ist nur durch langes sorgfältiges Umgehen mit dem Apparate zu erlangen; hier kann kein Versuch gemacht werden, auf die Einzelheiten einzugehen.

709. Theorie der Wage. Empfindlichkeit. Es werde eine Wage betrachtet, deren Mittel- und Endschneiden parallel und horizontal stehen und fast in einer Ebene liegen. Die an den Ansatzstücken der Enden angehängten Gewichte einschließlich Wagschalen u. s. w. seien w und $w + \delta w$, die Längen der korrespondierenden Arme l und $l + \delta l$. Der Schwerpunkt des Balkens in horizontaler Stellung sei in einem Abstande h unter der Ebene der Endschneiden, und die mittlere Schneide sei in einer Höhe h' über der Ebene durch die Endschneiden; das Gewicht des Balkens sei w', und dieser drehe sich von der Horizontalen weg um einen Winkel θ. Das nach der Wiederherstellung des Gleichgewichtes strebende Moment ist, wie der Leser an der Hand einer schematischen Zeichnung leicht einsehen kann:

$$w(l\cos\theta + h'\sin\theta) + w'(h + h')\sin\theta$$
$$-(w + \delta w)\,[(l + \delta l)\cos\theta - h'\sin\theta].$$

Ist das Kräftepaar null, d. h. herrscht in der abgelenkten Lage Gleichgewicht, so ist

$$tg\,\theta = \frac{w\delta l + \delta w(l + \delta l)}{(2w + \delta w)h' + w'(h + h')}\,.$$

Sind die Arme gleich lang, so ist $\delta l = 0$, und

$$\frac{tg\,\theta}{\delta w} = \frac{l}{(2w + \delta w)h' + w'(h + h')} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Das Verhältnis $tg\,\theta / \delta w$ gilt als Maß der Empfindlichkeit der Wage. Eine Skala, die so geteilt wäre, daß sie Tangenten der Abweichungen anzeigte, würde, horizontal an der Basis der tragenden Säule angebracht und von einem, von dem Balken herabhängenden Zeiger durchmessen, Werte von $tg\,\theta$ für verschiedene Werte von δw ergeben. Für den Gebrauch aber genügt es, da die Ablenkungen klein sind, eine kreisförmige Skala zu benutzen, wenn sie gleichmäßig geteilt ist. Gewöhnlich ist die Wage so konstruiert, daß alle Schneiden in einer Ebene liegen, und daß daher h' nur einen kleinen veränderlichen Wert infolge der Biegung des Balkens unter den an seinen Enden angehängten Gewichten hat. Die Empfindlichkeit ist daher um so größer, je größer l und je kleiner das Gewicht w' des Balkens ist. Da h' klein ist, ist die Empfindlichkeit nahezu unabhängig von der Last $2w$, wenigstens in einem beträchtlichen Bereiche ihrer Wertereihe. Gewöhnlich ist h' gleich null für eine gewisse mittlere Last und hat daher entgegengesetzte Werte, je nachdem die Last kleiner oder größer ist als der betreffende Wert. Die Empfindlichkeit nimmt also mit wachsender Belastung erst zu und dann ab; sie kann durch Auf- und Abwindung eines kleinen, von dem Balken getragenen Gewichtes, wodurch der Wert von h variiert wird, geändert werden. Wenn ihr Wert s bekannt ist, so kann der Wert von δw durch Ablesen der Ablenkung θ gefunden werden; er ist annähernd $\theta . s$.

710. Stabilität der Wage. Eine Wage soll nicht nur empfindlich, sondern auch so schnell als möglich in der Wirkung sein. Um zu erkennen, wovon diese letztere Eigenschaft abhängt, muß die Zeitdauer einer kleinen Schwingung ermittelt werden. Der Balken sei also um einen Winkel θ abgelenkt, es sei $\delta w = 0$ und $\delta l = 0$. Das aufrichtende Kräftepaar beträgt

$$wg(l\cos\theta + h'\sin\theta) + w'g(h + h')\sin\theta - wg(l\cos\theta - h'\sin\theta),$$

oder

$$2wgh'\sin\theta + w'g(h + h')\sin\theta.$$

Die Abstände der Vertikalen, in denen die Gewichte w liegen, von der Vertikalen durch die Axen sind $l\cos\theta + h\sin\theta$, $l\cos\theta - h\sin\theta$. Folglich ist, wenn w die an jedem Balkenende aufgehängte Gesamtmasse ist und unter der Annahme, daß sich die Gewichte w in jedem Augenblicke in der Vertikalen durch den Aufhängepunkt bewegen, das Moment der Bewegungsgröße der Gewichte um die Axe

$$w\frac{d\theta}{dt}(l\cos\theta + h\sin\theta)^2 + w\frac{d\theta}{dt}(l\cos\theta - h\sin\theta)^2$$
$$= 2w\frac{d\theta}{dt}(l^2\cos^2\theta + h^2\sin^2\theta).$$

Ferner ist, wenn k der Gyrationsradius des Balkens um die Axe ist das Moment der Bewegungsgröße des Balkens $w'k^2\dot{\theta}$. Setzt man den zeitlichen Änderungsgrad der Bewegungsgröße des Systems (unter Vernachlässigung der Glieder, die $\dot{\theta}^2$ als Faktor enthalten) gleich dem aufrichtenden Kräftepaar, so erhält man für die Periode T einer kleinen Schwingung

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{2wl^2 + w'k^2}{g[2wh' + w'(h + h')]} .$$

Wenn, wie gewöhnlich, h' null oder nahezu null ist, so ist

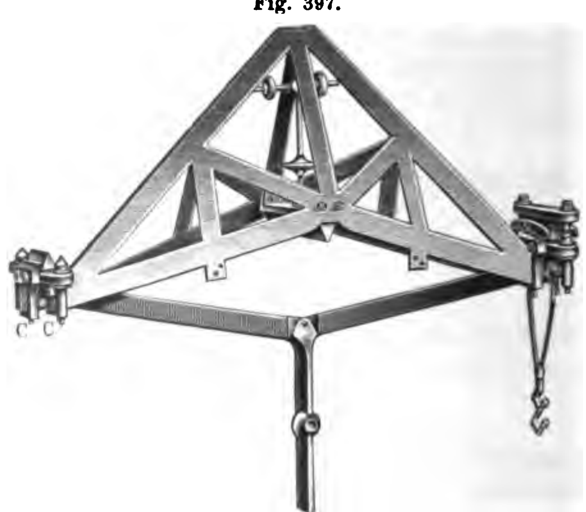
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2wl^2 + w'k^2}{gw'h}} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wenn mit s die Empfindlichkeit $tg\,\theta/\delta w$ bezeichnet wird, so ist nach Gl. (1):

$$T = C\sqrt{s},$$

wo C eine von der Last in der Wagschale abhängende Konstante ist. Für eine gegebene Belastung ändert sich also die Periode direkt wie die Quadratwurzel der Empfindlichkeit.

Fig. 397.



Eine kurze Periode ermöglicht es, Ablesungen der Ablenkung auf jeder Seite schnell auszuführen und festzustellen, ob annähernd Gleichgewicht erreicht worden ist. Offenbar ist aber diese erwünschte Geschwindigkeit der Wiederaufrichtung unvereinbar mit großer Empfindlichkeit, und es ist nur möglich, ein Kompromiß zwischen beiden einzugehen, dessen spezielle Wahl von dem Grade der in den Wägungen zu erreichenden Genauigkeit abhängen wird. Die Länge des Balkens sollte immer genügend sein, um jede Unsicherheit über die wirksame

Länge des Armes infolge der Lageverschiebung der Endansätze auf ihren Schneiden unmöglich zu machen. Es ist immer wünschenswert, den Balken so leicht als möglich zu machen, und dies wird erreicht, indem man ihm die Gestalt eines leichten, durchbrochenen Bindebalkens gibt und ihn von so leichtem Material als möglich macht. Man fertigt jetzt Aluminiumwagen an, und Fig. 397 veranschaulicht eine sehr leichte und steife Balkenform aus diesem Material, die in der in Fig. 396 gezeigten Wage in Anwendung kommt.

711. Justierung der Wage. Vor jedesmaligem Gebrauche muß die Wage mit Hilfe der Fußschrauben sorgfältig nivelliert und durch das bewegliche Gewicht bis zu der gewünschten Empfindlichkeit justiert werden. Die zunehmende Empfindlichkeit kann durch Beobachtung der wachsenden Periode verfolgt werden; es ist oben gezeigt worden, daß die Empfindlichkeit mit dem Quadrat der Periode proportional ist. Die Horizontalität des Balkens bei unbelasteten Wagschalen wird durch den drehbaren Arm oder andere für diesen Zweck gemachte Vorrichtungen hergestellt.

Wenn die Wage richtig arbeitet, wird sie nur geringen Reibungswiderstand erfahren. Dies kann dadurch geprüft werden, daß man den Balken um die Mittellage schwingen läßt und die Teilstriche auf der horizontalen Skala beobachtet, welche die Weite der aufeinander folgenden Ablenkungen des Zeigers bezeichnen; sie sollen langsam an Amplitude abnehmen. Ferner soll der Zeiger immer in dieselbe Lage auf der Skala zurückkehren, wenn mehrere Male nacheinander der Balken von den Schneiden abgenommen und wieder auf sie aufgelegt wird.

Man muß aufpassen, ob die Wirkung eines Gewichtes von der Stelle der Wagschale unabhängig ist, auf die es aufgelegt wird. Die Veränderlichkeiten dieser Art werden nur gering sein, wenn, wie eben gesagt wurde, die Wagschale durch ein oder zwei völlig lose Gelenke mit dem am Ansatzstücke befestigten Haken verbunden ist.

712. Wägung durch Schwingungen. Um Zeit zu sparen, tut man gut, beim Wägen die aufeinanderfolgenden Umkehrpunkte des Zeigers auf der Skala zu verzeichnen; denn aus diesen Ablesungen läßt sich die Lage, in der die Nadel zur Ruhe kommen würde, ableiten, ohne daß man das völlige Aufhören der Schwingungen abzuwarten braucht. Für diese Ablesungen wählt man zweckmäßig den Nullpunkt der Skala am rechten Ende, so daß der Mittelpunkt die Zahl 10 oder 20 u. s. w., je nach der Einteilung, trägt. Eine Reihe von aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten, mit einem linksstehenden angefangen, sei n_1, n_2, n_3 u. s. w., und die Lage, in der die Nadel schließlich zur Ruhe kommen würde, sei n. Die erste Ablenkung von der Ruhelage ist $n_1 - n$, die zweite $n - n_2$, die dritte $n_3 - n$. Wenn man annimmt,

daß in den drei aufeinander folgenden Ablenkungen die gleiche Abnahme statthat, so ist

$$n_1 - n - (n - n_2) = n - n_2 - (n_3 - n)$$

oder

$$n = \frac{n_1 + n_3 + 2\,n_2}{4}.$$

Wenn der Teilstrich, an dem der Zeiger der Wage bei gleicher Belastung der Wagschalen zur Ruhe kommt, m ist, so ist $n - m$ die von der Ungleichheit der Belastungen herrührende Ablenkung. Wenn der Betrag w dieser Ungleichheit bekannt ist (er kann so klein als irgend erforderlich gemacht werden, wenn man gleiche bekannte Gewichte W, W in die Wagschalen legt und ein bekanntes kleines Gewicht w hinzufügt), so ist die Empfindlichkeit proportional mit $(n - m)/w$.

Dies wird selbstverständlich die Empfindlichkeit für die Belastung $2\,W$ sein; man muß für verschiedene Belastungen verschiedene Bestimmungen ausführen, und eine Kurve mit den Belastungen als Abszissen und den Empfindlichkeiten als Ordinaten auf Koordinatenpapier aufzeichnen, um die Resultate in einer für die Bestimmung des Gewichtsunterschiedes benutzbaren Form darzustellen.

713. Bestimmung des Verhältnisses der Wagearme. Das Verhältnis der Längen der Arme einer Wage kann folgendermaßen bestimmt werden, wobei nicht angenommen wird, daß die benutzten Gewichte wirklich ihren Nennwert haben. Der Nennwert der beiden Gewichte in der linken bezw. rechten Wagschale, die den Balken genau im Gleichgewichte halten, sei w und w'. Dann tausche man diese beiden selben Gewichte gegeneinander aus, wobei im allgemeinen nicht wieder genaues Gleichgewicht herrschen wird, und ändere w in $w + \delta w$, um wieder Gleichgewicht zu schaffen. (Wenn δw für das Gleichgewicht negativ sein muß, so muß das es darstellende Gewicht in die Wagschale mit w' gelegt werden.) Wenn alsdann l und l' die Längen des linken und rechten Armes sind, so ist $wl = w'l$, $w'l = (w + \delta w)l'$ und daher annähernd

$$\frac{l}{l'} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\delta w}{w} \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

Als Beispiel sei das folgende aus Kohlrauschs „Lehrbuch der physikalischen Messungen" gewählt. Ein einzelnes Gewicht von nominal 50 g in der linken Wagschale wurde durch eine Anzahl von Gewichten, insgesamt von 50,00083 g, aufgewogen. Alsdann wurden die Gewichte ausgetauscht und es fand sich, daß, wenn 0,00256 g zu dem 50 g-Gewichte hinzugefügt und die überschüssigen 0,00083 g auf der anderen Seite weggenommen wurden, wieder Gleichgewicht eintrat. Also war δw offenbar 0,00256 + 0,00083, d. h. 0,00339 g. Folglich ist

$$\frac{l}{l'} = 1 + \frac{0{,}003\,39}{100} = 1{,}000\,033\,9.$$

Das Verhältnis der Summe der Gewichtsstücke, die nominell 50,000 83 g ausmachten, zu dem wirklichen Gewichte des mit 50 g bezeichneten Stückes war also l'/l, d. h. 1,000 033 9 oder 50,001 695 : 50. Nimmt man also das 50 g-Gewicht als richtig an, so hatten die Gewichtsstücke von 50 g ein Mehrgewicht gegenüber dem Nennwerte von 0,000 865 g. Hieraus ist die Methode, nach der man einen Satz Gewichte vergleicht und prüft, zu ersehen.

714. Doppelwägung. Irrtümer, die sich aus der Ungleichheit von l und l' ergeben, können durch das Verfahren der Doppelwägung vermieden werden. Der Körper wird in eine Wagschale, etwa die linke, getan und durch Gewichte w_1 in der rechten aufgewogen. Alsdann wird er in die andere Wagschale herübergebracht und durch ein Gewicht w_2 in der linken aufgewogen. Dann ist, wenn W das wahre Gewicht des Körpers ist, $Wl = wl'$ und $w_2 l = Wl'$. Folglich ist $W = \sqrt{w_1 w_2}$. Da nun w_1 und w_2 nur wenig verschieden sind, so kann, wenn es nicht auf äußerste Genauigkeit ankommt, statt des geometrischen auch das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ als Wert von W gesetzt werden.

Dasselbe Resultat ergibt auch eine Vergleichung von l und l'; sie hat aber den Nachteil, daß dabei w_1 und w_2, die nominellen Werte der Gewichte, als die richtigen Werte angenommen sind. Alsdann ist $l/l' = \sqrt{w_1/w_2}$.

715. Reduktion der Wägung auf das Vakuum. Wägungen werden gewöhnlich in Luft ausgeführt und erfordern eine Korrektion für den Auftrieb der Luft, wie oben, § 423, ausgeführt wurde. Es sei ϱ die Dichte des Körpers und ϱ_a die der Luft. Dann ist, wenn W das wahre Gewicht des Körpers ist, das Gewicht der durch ihn verdrängten Luft $W\varrho_a/\varrho$. Also ist das durch den Wägungsprozeß gemessene Gewicht $W(1 - \varrho_a/\varrho)$. Wenn anderseits der Nominalwert der den Körper aufwägenden Gewichte W' und ihre Dichte (bezw. ihre mittlere Dichte, wenn sie aus verschiedenen Stoffen gemacht sind) ϱ_w ist, so ist ihr effektives Gewicht $W(1 - \varrho_a/\varrho_w)$. Demnach ist

$$W\left(1 - \frac{\varrho_a}{\varrho}\right) = W'\left(1 - \frac{\varrho_a}{\varrho_w}\right)$$

und

$$W = W'\frac{1 - \dfrac{\varrho_a}{\varrho_w}}{1 - \dfrac{\varrho_a}{\varrho}} = W'\left(1 + \frac{\varrho_a}{\varrho} - \frac{\varrho_a}{\varrho_w}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

letzteres sehr annähernd, da ϱ_a klein ist im Vergleich mit ϱ.

Ein durch die Wägung in Luft ohne Korrektion für den Auftrieb erlangter Näherungswert von ϱ genügt für den Gebrauch auf der rechten Seite dieser Gleichung. Der Wert von ϱ_w ist gewöhnlich genügend genau bekannt. Für Messinggewichte kann ϱ_w als 8,4, für Platingewichte als 21,5 angenommen werden. Wenn der Nominalwert der Messinggewichte W_1' und der der Platingewichte W_2' ist, so ist

$$\varrho_w = \frac{21{,}5 \times 8{,}4\ W'}{21{,}5\ W_1' + 8{,}4\ W_2'} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Der Wert von ϱ_a für gewöhnliche atmosphärische Luft wird gewöhnlich zu 0,0012 g pro Kubikzentimeter angesetzt.

Wenn also ein Stück Kupfer von der Dichte 8,9 mit Messinggewichten gewogen wird und W' das scheinbare Gewicht in Luft in Grammen ist, so ist die Korrektion 0,0012 (1/8,9 — 1/8,4) eines Grammes pro Gramm von W', d. h. 0,008 eines Milligramms pro Gramm von W', und das wahre Gewicht beträgt

$$W = W'(1 - 0{,}000\,008).$$

Hier ist also die Korrektion sehr klein; sie kann aber auch recht groß werden, z. B. wenn man ein Stück Holz vom spezifischen Gewichte 1 durch Platingewichte wägt: hier ist die Korrektion 0,0012 (1 — 1/21,5), also 0,001 144, und das wahre Gewicht

$$W = W'(1{,}001\,144).$$

716. Korrektion des spezifischen Gewichtes auf das Vakuum. Bei Ermittelung des spezifischen Gewichtes wird die Substanz in Luft und in Wasser gewogen. Die Korrektion für die Wägung in Luft muß in der eben beschriebenen Weise geschehen. W sei das soeben gefundene wahre Gewicht. Die von der Temperatur abhängende Dichte des Wassers sei ϱ'. Der scheinbare Gewichtsverlust eines in Wasser eingetauchten Körpers ist $W\varrho'/\varrho$. Wenn das das Gleichgewicht herstellende Gewicht auf der anderen Wagschale W'' ist, so ist das wahre Gewicht in Wasser $W''(1 - \varrho_a/\varrho_w)$, wo wie vorher ϱ_w die Dichte der Gewichte ist. Es ist daher

$$W\left(1 - \frac{\varrho'}{\varrho}\right) = W''\left(1 - \frac{\varrho_a}{\varrho_w}\right).$$

Folglich ist $W\varrho'/\varrho = W - W''(1 - \varrho_a/\varrho_w)$ und

$$\varrho = \frac{W\varrho'}{W - W''\left(1 - \frac{\varrho_a}{\varrho_w}\right)} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Wenn aber W' wie bisher das Nominalgewicht des Körpers in Luft ist, so ist

$$W = W'\left(1 - \frac{\varrho_a}{\varrho_w} + \frac{\varrho_a}{\varrho}\right),$$

und hieraus erhält man, wenn man für ϱ im Klammergliede den Näherungswert $\varrho' W'/(W' - W'')$ setzt und Glieder, die klein von der zweiten Ordnung sind, vernachlässigt:

$$\varrho = \frac{W'\varrho'}{W' - W''}\left(1 - \frac{\varrho_a}{\varrho'} + \varrho_a\right),$$

oder

$$\varrho = \varrho_1\left(1 - \frac{\varrho_a}{\varrho'}\right) + \varrho_a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

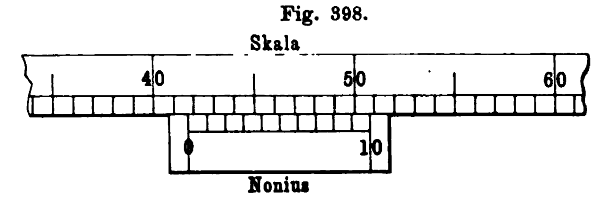
wo ϱ_1 der unkorrigierte Wert von ϱ ist.

---

717. Längenvergleichung. Der Komparator. Zur exakten Längenmessung werden verschiedene Vorrichtungen benutzt. Eine davon ist der Komparator, der dazu dient, mit Hilfe eines graduierten Maßstabes den Abstand zwischen zwei Marken auf einem Stabe oder einer Skala festzustellen. An dem Normalmaßstabe ist ein Gleitstück befestigt, das ein Ablesungsmikroskop trägt. Das Instrument ist so eingerichtet, daß die Linie, deren Länge bestimmt werden soll, der Skala parallel und unter dem Objektiv des Mikroskops liegt. Dann wird eine der Marken in den Brennpunkt des Mikroskops und in Koinzidenz mit einem vom Okular getragenen Fadenkreuz gebracht. Dieses Fadenkreuz befindet sich in der Brennebene des Objektivs, wenn sich das Objekt im Brennpunkte befindet. Alsdann wird eine Ablesung von der Lage eines Zeigers gemacht, der quer über die Skala läuft, wenn das Gleitstück bewegt wird. Darauf wird das Gleitstück längs der Skala verschoben, bis die andere Marke in den Brennpunkt und in Koinzidenz mit dem Fadenkreuze im Gesichtsfelde gebracht ist. Die Ablesung der Marke wird wiederum vollzogen, und die Verschiebung längs dem Maßstabe ergibt den zu ermittelnden Abstand.

718. Der Vernier oder Nonius. Zur genaueren Entfernungsbestimmung kann der Vernier oder Nonius benutzt werden. Das

Fig. 398.



Schema ist in Fig. 398 angegeben. Auf der einen Kante des Gleitstückes, das sich an der graduierten Seite des Maßstabes hin und her schieben läßt, werden in ein Stück, das auf der Skala des Maßstabes in neun Teile geteilt ist, 10 Teilstriche vermerkt, und diese Teilstriche (nicht die Zwischenräume) werden als 0, 1, 2, 3..., 10 in der Richtung der wachsenden Zahlen des Maßstabes bezeichnet. Die Marke null heißt der Nullstrich des Nonius und liegt zwischen zwei Teilstrichen

der Skala. Der Abstand des Nullstriches von dem ersten hinter ihm liegenden Teilstriche des Maßstabes wird folgendermaßen gefunden. Der Teilstrich n des Nonius möge mit einem Teilstriche der Skala zusammenfallen, dann beträgt der eben genannte Abstand n Zehntel eines Zwischenraumes oder Teiles des Maßstabes. Um dies einzusehen, schieben wir den Nullstrich des Nonius so weit zurück, daß er mit dem vorher unmittelbar hinter ihm gelegenen Skalenstrich zusammenfällt. Der Teilstrich 1 auf dem Vernier wird hinter dem vor ihm befindlichen Skalenteilstrich gerade um den Unterschied zwischen einem Verniergrade und einem Skalengrade, also um $^1/_{10}$-Skalengrade, zurückbleiben, der Teilstrich 2 hinter dem nächsten vor ihm befindlichen gerade um $^2/_{10}$ eines Skalenteiles u. s. w., so daß der Noniusteilstrich n hinter dem nächsten vor ihm befindlichen Skalenteilstrich um einen Abstand zurückbleibt, der gerade $n/10$ eines Skalengrades beträgt.

Also, wenn die Entfernung, um die der Nullstrich zurückgerückt worden ist, $n/10$ eines Skalengrades beträgt, so fiel der Teilstrich n des Nonius mit einem Teilstriche des Maßstabes zusammen, als der Nullstrich des Nonius in der bewußten Lage war.

Wenn, wie es vorkommen kann, kein Teilstrich des Verniers mit einem Skalenstriche zusammenfällt, so werden zwei aufeinander folgende Vernierstriche — etwa der $(n - 1)$. und der n. zwischen zwei Skalenstrichen liegen. Dann wird ein gedachter Teilstrich, um $n + f$ Noniusgrade vom Nullstrich entfernt (wo f ein Bruch ist), mit einem Teilstrich des Maßstabes zusammenfallen, und der zu messende Abstand ist $n + f$ zehntel eines Maßstabgrades vom Nullstriche entfernt. Der Bruchteil f kann meistens mit genügender Genauigkeit geschätzt werden. Das Ergebnis kann durch Schätzung des Bruchteiles f' eines Noniusgrades, um den sich der Teilstrich $n - 1$ vor dem dahinter liegenden Skalenstrich befindet, geprüft werden. Dann ist die zu messende Entfernung ebenfalls $(n - 1 + f')$ zehntel eines Maßstabgrades.

Manchmal läuft die Graduierung des Nonius in entgegengesetzter Richtung wie die des Maßstabes. In diesem Falle müssen 10 Noniusgrade 11 Maßstabgrade einschließen. Auch sind manche Nonien in 50 Grade auf 49 des Maßstabes bezw. in 50 Grade auf 51 des Maßstabes geteilt, je nachdem die Graduierung des Nonius mit der Maßstabgraduierung gleich oder entgegengesetzt läuft. Der Nonius ermöglicht es dann, einen Bruchteil eines Skalengrades in 50teln eines Maßstabgrades zu berechnen. In manchen Fällen werden die Striche des Nonius sogar noch verdoppelt, so daß die Noniusablesung das Resultat in 100teln von Maßstabgraden ergibt.

719. Messung von Strecken durch die optische Bank. Die Einrichtung eines längs einem graduierten Maßstabe beweglichen Gleitstückes kann benutzt werden, um den mit der Maßstabrichtung parallelen Abstand zwischen zwei parallelen Flächen, die quer zum Maßstabe

liegen, zu bestimmen. In den meisten Fällen stehen diese senkrecht zum Maßstabe, wie bei den an der sogenannten optischen Bank angebrachten Schirmen und Linsen (s. Bd. II). Hier trägt das Gleitstück eine der Flächen, deren Abstand voneinander ermittelt werden soll. Nachdem die Ablesung des Nullstrichs seines Nonius erfolgt ist, als die beiden Flächen in der richtigen Stellung waren, wird das Gleitstück soweit verschoben, bis die von ihm getragene Fläche mit dem nächst gelegenen Ende eines kleinen Maßstabes in Berührung kommt, dessen anderes Ende mit der Fläche in Berührung steht. Sein Nonius wird abgelesen und die Verschiebung aus beiden Ablesungen gefunden; zu der bekannten Länge des Maßstabes hinzuaddiert, ergibt sie den gesuchten Abstand.

720. Mikrometerschraube und Noniustaster. Mikrometerschrauben werden zur Messung kleiner Strecken, wie z. B. der Dicke von Drähten, benutzt. Bei allen verschiebt sich ein Punkt um eine bestimmte Strecke bei jeder Umdrehung der Schraube, die einen mit Kreisteilung versehenen Kopf hat, an dem Bruchteile einer Umdrehung abgelesen werden können. Die Schraube bewegt sich längs eines graduierten Maßstabes, durch den man die Strecke erkennt, um die sich die Schraube von der Nullstellung aus bewegt hat, als welche gewöhnlich diejenige gilt, bei der sich die Spitze mit dem vor ihr angebrachten Vorsprung berührt. Wird die Schraube zurückgedreht, so bildet sich eine Spalte zwischen ihrer Spitze und diesem Vorsprung, und in diese Spalte wird der zu messende Körper in geeigneter Weise eingeschoben. Dann wird die Schraube vorwärts gedreht, bis der Körper zwischen der Spitze und dem Vorsprung fest eingeklemmt ist. Die Zahl der ganzen Teile auf der Skala und der durch die Ablesung auf dem Schraubenkopfe angegebene Bruchteil ergeben die zu messende Größe. Wenn z. B. der Maßstab halbe Millimeter anzeigt, der Kopf in 20 Grade geteilt ist und die Schraube eine Umdrehung für jeden Maßstabgrad macht, wenn ferner die Ablesung des Maßstabes bei einer Messung 4 und die Kopfablesung 13 ergibt, so beträgt die Strecke $4^{13}/_{20}$ halbe Millimeter oder 2,325 mm.

Die Konstruktion der gewöhnlichen Mikrometerschraube ist darin fehlerhaft, daß der Schraubenkopf kaum je groß genug gemacht wird, um exakte Graduierung zu ermöglichen; außerdem muß der Schraubendraht sehr sorgfältig geschnitten sein, um ohne „toten Gang“ zu laufen. Der Vorsprung sollte immer verstellbar sein, um eine etwa falsch gewordene Nullstellung am Instrumente wieder ausgleichen zu können.

Eine andere Form dieses Instrumentes ist der Noniustaster. Hierbei sind die sogenannten Backen des Tasters zwei längs einem graduierten metallenen Lineal bewegliche Vorsprünge. Einer von diesen wird mit einem durch eine Stellschraube beweglichen Nonius versehen,

durch den die Stellung des Gleitstückes von der Skala abgelesen werden kann. Der zu messende Körper wird in die Spalte gebracht und das Gleitstück an ihn herangeschoben. Dann wird der Nonius abgelesen und die Strecke berechnet.

721. Sphärometer. Eine Form der Mikrometerschraube ist sowohl zur Messung der Dicke von Körpern als auch der Oberflächenkrümmungen — z. B. von Linsen — eingerichtet. Drei parallele, in abgerundeten Spitzen endende Stahlfüße, so angeordnet, daß sie in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks liegen, werden durch einen Rahmen zusammengehalten, der außerdem eine Mutter trägt. durch die eine vierte Stahlspitze senkrecht zu der eben erwähnten Dreieckebene, also parallel mit den drei Füßen, bewegt werden kann. Diese Spitze liegt, wenn sie sich in der Ebene des Dreiecks befindet, genau im Schwerpunkte desselben, d. h. von jedem der drei Scheitelpunkte in einem Abstande von $s/\sqrt{3}$, wo s die Seite des Dreiecks ist. Die Mutter trägt einen großen Mikrometerschraubenkopf, dessen Kante von einem mit der Bewegungsrichtung der Mittelspitze parallelen Maßstabe überragt wird. Eine Umdrehung des Kopfes entspricht einem Grade der Skala, die gewöhnlich in halbe Millimeter geteilt ist, so daß, wenn, wie üblich, der Kopf in 250 Grade geteilt ist, eine Umdrehung des Kopfes um einen Grad eine Bewegung der Spitze um $^1/_{500}$ mm oder $^1/_{5000}$ cm ergibt.

Wird das Instrument benutzt, um die Dicke einer Glasplatte zu messen, so setzt man es auf eine horizontale Glasplatte auf, deren obere Fläche vollständig eben ist, und schraubt die vierte Spitze in einen genügenden Abstand zurück; dann legt man die zu messende Platte zwischen die das Dreieck bildenden Spitzen, und die vierte Spitze wird allmählich bis zur Berührung heruntergeschraubt. Die Berührung macht sich sofort dadurch bemerkbar, daß das Instrument um die mittelste Spitze zu schwanken oder wackeln beginnt, welcher Moment von einem an das Instrument gewöhnten Experimentator mit größter Genauigkeit festgestellt wird. Die Ablesungen vom Maßstabe und der Mikrometerschraube ergeben die Strecke, um welche die vierte Spitze aus der Ebene der drei Spitzen zurückgeschraubt worden ist, wenn die Mikrometerschraube sich am Nullpunkte des Maßstabes befindet.

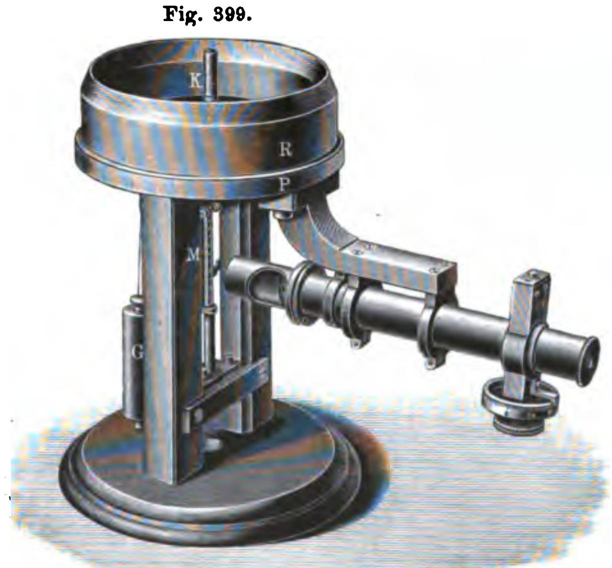
Soll diese Anordnung benutzt werden, um die Krümmung einer sphärischen Oberfläche zu messen, so wird das Instrument auf die Oberfläche aufgesetzt und die vierte Spitze so gestellt, daß gerade Berührung eintritt. Dann werden die Ablesungen gemacht und ergeben den Abstand d eines Oberflächenpunktes von der Ebene der drei Spitzen. Betrachten wir die Ebene, die durch den Mittelpunkt der Kugel und einen der Füße F hindurchgeht und die Verbindungslinie der beiden anderen Füße in einem Punkte P schneidet. Der Abstand FP ist $s\sqrt{3}/2$, und in einem Punkte auf der Linie $2/3\,FP$, d. h. $s/\sqrt{3}$ von F

entfernt, ist der Radius senkrecht zu FP. Folglich ist, wenn r der Radius der Oberfläche ist, $(r - d)^2 + s^2/3 = r^2$, oder

$$r = \frac{s^2}{6d} + \frac{1}{2}d \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Eine wesentliche Vervollkommnung hat das Sphärometer durch Carl Zeiß in Jena dadurch erfahren, daß die drei Füße durch einen kreisförmigen, nach oben gerichteten Rand ersetzt wurden, während die abgerundete Mittelspitze sich infolge einer Federwirkung einfach in

Fig. 399.



Berührung mit dem betreffenden Körper einstellt (Fig. 399). Der Rand ist nicht scharf, sondern hát eine innere Schneide (für konvexe Flächen) und eine äußere (für konkave).

722. Bifilarwage. Die Messung von Kräftepaaren durch bifilare Aufhängung ist bereits in § 302 (S. 329) erwähnt und die Theorie der Anordnung besprochen worden. Das durch die doppelte Aufhängung ausgeübte Gegenkräftepaar ist in Gl. (19) und (20) des sechsten Kapitels gegeben; es seien hier einige Bemerkungen über die Einstellung des Instrumentes und über seine Vorteile hinzugefügt. Die Aufhängung wird gewöhnlich bei einem Instrumente benutzt, das durch Stellschrauben leicht in seiner Lage geändert werden kann. So kann die die Befestigungspunkte der Fäden verbindende Linie leicht nach der einen oder anderen Seite geneigt werden. Nimmt man sowohl die oberen Befestigungspunkte als die unteren auf gleichem Niveau und die Fäden als gleich lang an, so daß die Bifilarwage richtig ein-

gestellt ist, so würde eine leichte Hebung der einen Seite die Größe c des § 302 ändern, ohne f merklich zu beeinflussen. Denn es würde etwas mehr Gewicht dem einen Faden zugemutet werden als dem anderen, und die Empfindlichkeit, gemessen am Verhältnis der Ablenkung zum widerstrebenden Kräftepaar, wird zunehmen. Wenn also die Gleichheit nur annähernd hergestellt wird, wird f sehr klein sein, und jeder Zuwachs von c wird die Empfindlichkeit steigern. Wenn dagegen die Wirkung des Neigens des Instrumentes die ist, die auf die Fäden wirkenden Gewichte mehr auszugleichen, so wird die Empfindlichkeit vermindert. Jede Änderung der Empfindlichkeit wird sich sofort bei Beobachtung der Schwingungsdauer bemerkbar machen. welche der Quadratwurzel der Empfindlichkeit proportional ist. Wenn eine geringe Hebung des einen Fadens durch Neigen des Instrumentes die Schwingungsdauer verlängert, während die Hebung des anderen Fadens sie verkürzt, so ist der erste Faden stärker belastet als der andere, und die Ungleichheit muß durch Verkürzung des schwächer belasteten Fadens und Verlängerung des anderen beseitigt werden, bis eine solche Einstellung erreicht ist, daß eine Abweichung von ihr durch Heben des einen oder anderen Fadens in jedem Falle die Periode verlängert.

723. Korrektion der Bifilarwage wegen der Torsions- und Biegungsstarrheit. Jeder Faden wirkt als unifilare Aufhängung infolge seiner Drillung. Wenn τ die Torsionselastizität jedes Fadens ist, so ist das ganze, von der Bifilarwage gelieferte Kräftepaar nach § 302, nach der dort angenommenen Bezeichnung, für einen kleinen Winkel

$$L = Mg \frac{ab}{l} \sin\theta + 2\tau \frac{\theta}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Haben die Fäden auch Biegungselastizität, so wird jeder von ihnen durch die Ablenkung in die Kurve gebogen, die oben Fig. 371 von dem halben Balken zwischen jedem Ende und der Mitte gezeigt wird. Wir nehmen an, daß die beiden Enden durch die Art der Befestigung vertikal erhalten werden, dann kommt durch das Biegen der Fäden ein Kräftepaar ins Spiel. Wenn die senkrechte, streckende Kraft in jedem Faden K, die Biegungselastizität (§ 651) des Fadens B und der Faden lang ist, so muß das aus der eben mitgeteilten Formel abgeleitete Kräftepaar im Verhältnis 1 zu $1 - 2\sqrt{B}/l\,\sqrt{K}$ vergrößert werden (wie der Leser aus den im § 651 entwickelten Sätzen beweisen kann), d. h. das Kräftepaar ist dasselbe als das nach der Gleichung für eine Aufhängung berechnete, die um $2/\sqrt{B/K}$ kürzer wäre als l. Der Betrag dieser Verkürzung ist ganz merklich; für einen Draht von $^1/_{100}$ cm Durchmesser beläuft er sich bei einer Streckung durch ein Gewicht von 100 g auf: 0,22 cm für Kupfer, 0,17 cm für Silber, 0,18 cm für Gold und 0,26 cm für Platin. Diese Korrektionen sind durch zwei zu dividieren, wenn nur ein Ende des Drahtes in senkrechter Richtung befestigt ist.

724. Vergleichung bifilarer und unifilarer Wagen. Eine Vergleichung der bifilaren Aufhängung mit einer unifilaren, die durch die Torsion ein gegenwirkendes Kräftepaar liefert, zeigt, daß für Silber-, Gold- und Kupferdraht (den doppelten Draht bei der bifiliaren und den einfachen bei unifilarer Aufhängung), wenn er gerade stark genug ist, um das Gewicht zu tragen, beide Wagen die gleiche Empfindlichkeit haben, wenn das Verhältnis des Abstandes der Drähte voneinander zum Durchmesser ungefähr 5 ist, und für Platindraht, wenn dieses Verhältnis 6 ist.

Die Bifilarwage hat vor der unifilaren den Vorteil, daß sie nur sehr wenig dem Einfluß der Temperatur unterliegt. Die Längenänderung der Fäden tut bei ihr eine viel geringere Wirkung als die Änderung der Torsionselastizität. Sie könnte selbstregulierend gemacht werden, indem man die Drähte an einem Balken befestigte, der durch seine Ausdehnung die Enden gerade weit genug auseinander treiben würde, um die Zunahme der Fadenlänge auszugleichen.

725. Messung kleiner Kräftepaare durch Pendel. Eine sehr einfache Methode, kleine Kräftepaare zu messen, besteht darin, daß man das Kräftepaar in einer horizontalen Ebene angreifen läßt, indem es entgegengesetzt gerichtete Ablenkungen zweier einfacher Pendel von gleicher Länge und gleichen Pendelkörpern verursacht. Die Pendel seien an zwei Punkten gleicher Höhe aufgehängt, und ein horizontal gestelltes Drehkreuz, auf das das Kräftepaar wirken soll, werde über den Kügelchen und so gegen die Fäden gestellt, daß diese in entgegengesetzten Richtungen abgelenkt werden, wenn das Kreuz gedreht wird, während sie dabei in parallelen Ebenen verbleiben. Diese letztere Bedingung kann dadurch erfüllt werden, daß man die gerade über den Pendelkörpern befindlichen Teile der Fäden sich längs zwei horizontalen Stäben zu bewegen zwingt, die senkrecht zu der Ebene der ungestörten Fäden angebracht sind.

Wenn M die Masse jedes Pendelkörpers ist, so ist das Kräftepaar $2\,Mgp \sin\theta$, wo p der Abstand der Aufhängepunkte der Pendel voneinander und θ der Ablenkungswinkel ist.

726. Loch, Schlitz und Ebene als Träger eines Instrumentes. Es ist oft von Wichtigkeit, ein Instrument von seinem Platze fort und dann derart wieder dorthin zurückzubringen, daß es die vorige Stelle genau wieder einnimmt. Dies kann geschehen, indem man das Instrument auf drei Füße, z. B. die abgerundeten unteren Enden dreier Stellschrauben, stellt und das von Lord Kelvin angegebene Arrangement von Loch, Schlitz und Ebene benutzt. In den als Träger dienenden Tisch wird ein triedrisches Loch von der Gestalt einer verkehrten dreieckigen Pyramide geschnitten, und in einer Linie damit, so daß sein Mittelpunkt gerade um den Abstand der Füße des Instrumentes unter-

einander von dem Loche entfernt ist, ein V-förmiger Schlitz, beide, Loch wie Schlitz, weit genug, um je einen Fuß des Instrumentes aufzunehmen. Wird dann das Instrument mit dem einen Fuße in das Loch, mit dem zweiten in den Schlitz und mit dem dritten auf die ebene Oberfläche gestellt und dann nivelliert, so kann es nur in einer einzigen Stellung, mit demselben Fuße wie vorhin im Loche und demselben im Schlitze stehen. Wenn also die Stellschrauben nicht verändert werden, kann es mit absoluter Sicherheit, wieder die alte Lage einzunehmen, fortgenommen und wieder zurückgebracht werden, vorausgesetzt, daß an dem Träger nichts geändert worden ist.

727. Dynamometer oder Ergometer. Ergometer oder, wie sie gewöhnlich genannt werden, Dynamometer, sind Arbeitsmesser. Es gibt ihrer zwei Arten, Friktionsdynamometer und Transmissionsdynamometer. Die erstere Art verbraucht alle geleistete Arbeit, ermöglicht es aber, die in irgend einer Zeit von einem primären Motor gelieferte gesamte Arbeit nach dem überwundenen Reibungswiderstande und der Geschwindigkeit, mit der er überwunden wurde, zu schätzen. Um ein Schwungrad oder eine senkrechte Rolle wird ein Seil oder Riemen geschlungen, und es werden an den beiden Enden zwei verschiedene Gewichte angehängt, um es auf der Rinne des Rades zu erhalten. Nun wird die Rolle in der Richtung in Bewegung gesetzt, daß es mittels der von der Rinne dem Riemen erteilten Reibung das schwerere Gewicht nach oben zieht; wenn der Reibungswiderstand groß genug ist, wird das Gewicht gehoben werden. Kann diese Schwebe aufrecht erhalten und die Geschwindigkeit gemessen werden, so kann das Maß, in welchem Arbeit geleistet wird, berechnet werden.

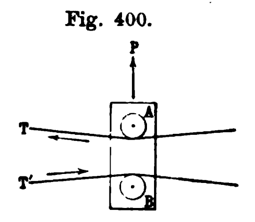
Ayrton und Perry haben gefunden, daß bei Benutzung einer gerieften Rolle und eines Hanfseiles ein Knoten im Seile, der durch den Zug am Seile sanft in die Rille eingezwängt wird, genügt, um dem System die nötige Selbstregulierung zu erteilen, so daß es bei Veränderungen des Reibungskoeffizienten stetig weiter laufen kann. Die Reibungsflächen werden durch darauf tropfendes Seifenwasser kühl erhalten. Wenn große Friktionsdynamometer benutzt werden sollen, z. B. solche, bei denen ein von Holzklötzen eingefaßtes Metallband den Radrand umgibt und durch eine Feder oder ein an der betreffenden Seite niederziehendes Gewicht am Drehen gehindert wird („Bremszaun"), wird manchmal der Rand ausgehöhlt und ein großer Wasserstrom wird um ihn herum fließend erhalten, um Unglücksfälle durch Heißlaufen zu verhüten. Die ganze Arbeit wird im Erzeugen von Wärme ausgegeben, die daher bei einer großen Maschine in sehr bedeutendem Verhältnis erzeugt wird.

Die Berechnung des Arbeitsmaßes ist sehr einfach. Es sei C der Umfang des Rades in Metern, W die Gewichtsdifferenz in Kilogrammen zwischen den beiden Seilenden (oder der Zug in der Feder auf das eben

erwähnte System) und N die Zahl der Umdrehungen in der Minute. Das gesamte, auf das Rad wirkende Widerstands-Kräftepaar ist dann $WC/2\pi$. Der bei einer Umdrehung zurückgelegte Winkel ist 2π, und folglich ist die bei einer Umdrehung geleistete Arbeit WC. Die in der Minute geleistete Arbeit ist demnach WCN in Meter-Kilogrammen, und der Effekt in Pferdestärken ist $WCN/4500$.

728. Transmissionsdynamometer. Es gibt verschiedene Formen von Transmissionsdynamometern. Es seien hier nur zwei erwähnt, das von Hefner-Alteneck und das Federdynamometer von Ayrton und Perry. Im ersteren trägt ein vertikales Glied zwei Rollen, A und B; auf diese wirken die beiden Teile des Treibriemens oder -seiles, wie in der Fig. 400 zu sehen. Die eine Seite, die Treibseite des Riemens, ist fest, die andere verhältnismäßig locker. Die treibende Seite geht über der Rolle B hindurch, die lockere Seite unter der oberen Rolle A. Das Glied wird also mit einer von der Differenz der streckenden Kräfte abhängigen Kraft P heruntergezogen werden, und diese Kraft wird durch eine Feder gemessen, wenn das Glied im Gleichgewichte ist, in derjenigen Lage, in welcher die Teile des Riemens auf beiden Seiten jeder Rolle alle den gleichen Winkel mit der Horizontalen bilden. Dieser Winkel sei θ. Wenn dann T' und T die streckenden Kräfte in den festen und losen Teilen des Riemens sind, so ist $2(T' - T)\sin\theta = P$ oder $T' - T = P/2\sin\theta = P/2\theta$, wenn θ klein ist. P sei in Kilogrammen ausgedrückt, und der Riemen habe die Geschwindigkeit von v Metern in der Minute, dann ist die Arbeit gleich $Pv/2\theta$ pro Minute, d. h. der Effekt in Pferdestärken ist $Pv/9000\theta$.

Fig. 400.



Es gibt andere Dynamometer, wo die Arbeit direkt von einer Axe auf die andere ohne Riemenübertragung vermittelt wird. Eines von diesen ist von Ayrton und Perry erfunden. Die Verbindung zwischen den getriebenen und treibenden Axen wird durch Federn hergestellt, deren Ablenkung durch das treibende Kräftepaar eine versilberte Perle veranlaßt, einen Kreis zu beschreiben, dessen Durchmesser vom Betrage des Kräftepaares abhängt. Die Beobachtung dieses Durchmessers und der Geschwindigkeit führt zur Ermittelung des Effektes.

Das Prinzip dieses letzteren Dynamometers ähnelt einigermaßen dem vor langer Zeit von James Thomson erfundenen, das von Joule bei seinen letzten Bestimmungen des Arbeitsäquivalents der Wärme benutzt worden ist. In einem zylindrischen Gefäße wurde Wasser durch eine Schaufel herumgetrieben, welche durch Stricke, die durch fallende Gewichte sich von einer senkrechten Spindel abwickelten, im Gefäße herumbewegt wurde. Die Reibung zwischen Wasser und Gefäß strebte danach, das Gefäß mit der Schaufel herumzudrehen, und das auf die

Schaufel ausgeübte Drehungsbestreben wurde durch Messung des Kräftepaares ermittelt, das nötig war, um das Gefäß in Ruhe zu erhalten. Das Produkt dieses Kräftepaares in die Winkelgeschwindigkeit ergab den Effekt.

Dasselbe Prinzip ist benutzt worden, um die zum Treiben der Armatur einer Dynamomaschine im magnetischen Felde verbrauchte Arbeit zu messen, und so die zur Erzeugung der Ströme in der Schließung verbrauchte Aktivität zu bestimmen. Feldmagnete und Armatur werden von getrennten Rahmen getragen, und derjenige, welcher die Magnete trägt, kann sich um eine Axe in einer Linie mit dem die Armatur tragenden drehen. Die elektromagnetische Wirkung strebt einerseits danach, die Armatur zum Stillstande zu bringen, anderseits danach, die Magnete in derselben Richtung herumzudrehen, in der die Armatur rotiert. Das Kräftepaar, das notwendig ist, um die Magnete in Ruhe zu erhalten, wird bestimmt und der Effekt wie vorher gefunden.

REGISTER.

(Die Zahlen bedeuten die Seiten.)

A.

B.

H.

I.

J.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

Y.

Z.

Druckfehler.

S. 52, Z. 12 v. u.: Schmiegungsebene statt Schwingungsebene.
S. 132, Z. 16 v. o.: pro sec. pro sec. statt pro sec.
S. 155, Formel 19: z statt s.
S. 164, Z. 9 v. u.: (s. ob. § 24) $\dot{\varphi}/\omega$.
S. 171, Z. 12 v. u.: $+ \gamma^2$ statt $= \gamma^2$.
S. 181, Z. 8 v. o.: $\dot{\theta} = 0$ statt $\theta = 0$.
S. 182, Z. 2 vor Gl. 61: $\eta \Sigma P$, $\zeta \Sigma P$.
S. 186, Z. 13 v. u.: $\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$ statt G.
S. 192, Formel 73: $(r - a)^2$ statt $(v - a)^2$.
S. 217, Z. 3 v. o.: 2. $p v^{\varkappa} = c'$ statt 2. $p v^k = c'$.
S. 221, Z. 8 u. 9 v. u.: δx statt δ_x.
S. 257, Z. 17 v. o.: $\dfrac{\partial F}{\partial \dfrac{dp}{dt}}$, statt $-\dfrac{\partial F}{\partial \dfrac{dp}{dt}}$, auch $\dfrac{\partial F}{\partial \dfrac{dq}{dt}}$, statt $-\dfrac{\partial F}{\partial \dfrac{dq}{dt}}$.
S. 276, Z. 7 u. 8 v. u. zu streichen: „und m die Masse des ganzen Instrumentes ist".
S. 276, Z. 2 v. u.: Fig. 146 statt 144, und dann einzufügen: „m bezeichnet dann die Masse des ganzen Instrumentes".
S. 366, Formel 32: ω statt w.
S. 371, Formel 45: $T_0\, e^{-\frac{s}{R}}$ statt $T_0\, e^{\frac{s}{R}}$.
S. 457, Z. 7 u. 8 v. u. zu streichen: „und ... läuft".
S. 465, Z. 3 v. u.: „Höhe über dem Schwerpunkt" statt „Lage".
S. 469, Z. 6 v. u.: „erzeugte Neigung" statt „erzeugtes Vornüberneigen".
S. 478, Z. 2 v. u.: $(W/c\varrho w)$ statt $(W/c)\varrho w$.

Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig.

Die Wissenschaft.

Sammlung naturwissenschaftlicher und mathematischer Monographien.

I. Heft. Curie, Mme. S., **Untersuchungen über die radioaktiven Substanzen.** Übersetzt und mit Litteratur-Ergänzungen versehen von W. Kaufmann. Mit eingedruckten Abbild. gr. 8. Preis geh. 3 ℳ, geb. in Lnwd. 3,80 ℳ.

Berichte der Deutschen Physikalischen Gesellschaft

enthaltend

Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, im Auftrage der Gesellschaft herausgegeben von **Karl Scheel** und

Halbmonatliches Literaturverzeichnis der „Fortschritte der Physik", dargestellt von der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, redigiert von **Karl Scheel** (Reine Physik) und **Richard Assmann** (Kosmische Physik).

gr. 8. Jährlich 24 Hefte, am 1. und 15. jedes Monats erscheinend.
Preis pro Jahrgang M. 8.—.

Vorlesungen über Experimentalphysik.

Von **August Kundt,**
weiland Professor an der Universität Berlin.
Herausgegeben von **Karl Scheel.**

Mit dem Bildnis Kundts, 534 Abbildungen und einer farbigen Spektraltafel.
gr. 8. Preis geh. 15 ℳ, geb. in Halbfranz 17,50 ℳ.

Die Dissoziierung und Umwandlung chemischer Atome.

Von **Dr. Johannes Stark,**
Privatdozent an der Universität Göttingen.
8. Preis geh. 1,50 ℳ.

Sichtbare und unsichtbare Bewegungen.

Vorträge,
auf Einladung des Vorstandes des Departements Leiden der Maatschappij tot nut van 't Allgemeen im Februar und März 1901
gehalten von

H. A. Lorentz.

Unter Mitwirkung des Verfassers aus dem Holländischen übersetzt von
G. Siebert.

Mit 40 Abbildungen. gr. 8. Preis geh. 3 ℳ, geb. 3,80 ℳ.

Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig.

Wellenlehre und Schall.

Von W. C. L. van Schaik.

Autorisirte deutsche Ausgabe bearbeitet von

Professor Dr. Hugo Fenkner.

Mit 176 in den Text eingedruckten Abbildungen.

gr. 8. Preis geh. 8 *M.*, geb. 9 *M.*

Tafeln über die Spannkraft des Wasserdampfes

zwischen 76 und 101,5 Grad,

bezogen auf das Luftthermometer.

Mit einem Beiblatt: Enthaltend die Correctionen auf das Wasserstoff-Thermometer.

Auf Grund der Ergebnisse neuer Versuche berechnet und herausgegeben

von Dr. H. F. Wiebe,

Professor an der physikalisch-technischen Reichsanstalt.

Zweite vermehrte Ausgabe. gr. 8. Preis geh. 2 *M.*

Einführung in die physikalische Chemie

von Dr. James Walker,

Professor der Chemie an der Universität Dundee.

Nach der zweiten Auflage des Originals unter Mitwirkung des Verfassers übersetzt und herausgegeben von

Dr. H. v. Steinwehr,

Assistent bei der physikalisch-technischen Reichsanstalt zu Charlottenburg.

Mit 48 eingedruckten Abbildungen. gr. 8. Preis geh. 6 *M.*, geb. 7 *M.*

Physikalisch-chemische Theorieen

von Dr. A. Reychler,

Professor an der Universität zu Brüssel.

Nach der dritten Auflage des Originals bearbeitet von

Dr. B. Kühn.

Mit Abbildungen. gr. 8. Preis geh. 9 *M.*, geb. 10 *M.*

Physikalisches Praktikum

mit besonderer Berücksichtigung der physikalisch-chemischen Methoden von

Eilhard Wiedemann und Hermann Ebert.

Vierte verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 366 Holzstichen.

gr. 8. Preis geh. 10 *M.*, geb. 11 *M.*



QA 845 .G7215 1904 C.1
Lehrbuch der Physik.
Stanford University Libraries
3 6105 030 418 235

DATE DUE

TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004



